بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

حسابان کسری و معادلات دیفرانسیل کسری

استاد راهنما: دکتر قاسم برید لقمانی

استاد مشاور: دکتر محمدرضا هوشمنداصل

پژوهش و نگارش: سارا جوانمردی

شهریورماه ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

تاریخچه

لایب نیتز در نامه‌ای در سال ۱۶۹۵ بحثی را با هوپیتال درباره مشتق از مرتبه صحیح آغاز کرد که آیا می‌توان این مشتق را به مرتبه غیر صحیح نیز تعمیم داد. هوپیتال احساس تعجب و تحیر کرد و در پاسخ، سوال ساده‌ای را بیان کرد:

اگر مرتبه مشتق $\frac{1}{2}$ باشد چه اتفاقی می‌افتد؟

لایب نیتز دلسردی خود را در نامه‌ای در تاریخ ۳۰ سپتامبر همان سال بیان کرد، البته او بر این باور بود که یک روز نتایج مفیدی درباره این مطلب به تصویر کشیده خواهد شد.

تاریخ ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ تاریخ دقیق تولد حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری است.

برای دیدن جزئیات بیشتر تاریخچه حسابان کسری رجوع کنید به [۲۰]. در قرن‌های بعدی نظریه حسابان کسری (مشتق کسری و انتگرال کسری) مورد توجه بسیاری از ریاضی‌دان‌ها قرار گرفت. همچنین در چند دهه گذشته، دانشمندان و مهندسین کاربردی به چنین معادلات دیفرانسیل کسری، یک چارچوب طبیعی برای بحث در مورد انواع مختلف از سوالات مدل سازی از قبیل سیستم‌های ویسکولاستیک[۱]، الکترود- قطبش الکترولیت، الکتروشیمی، پردازش سیگنال و فرآیندهای انتشار، پردازش، کنترل و $\cdots$ تحقق بخشیدند.

در حال حاضر سه نوع از مشتقات کسری که اغلب استفاده می‌شوند، مشتق کسری گرانوالد- لت‌نیکوف که در سال ۱۸۶۷ گرنوالد[۲] از پاراگوئه و لت‌نیکوف [۳] از مسکو در سال ۱۸۶۸ معرفی کردند، مشتق کسری ریمان- لیوویل [۴] در سال ۱۹۷۴ توسط اولدهام [۵] و اسپانیر [۶] و در سال ۱۹۹۳ توسط میلر[۷] و راس[۸]معرفی شد و مشتق کسری کاپوتو توسط کاپوتو [۹] در سال ۱۹۷۶ و

[۱] Viscoelasticity
[۲] Grunwald
[۳] Letnikov
[۴] Riemann- Liouville
[۵] Oldham
[۶] Spanier
[۷] Miller
[۸] Ross
[۹] Caputo

بحث‌های زیادی برروی خصوصیات این مشتقات وجود دارد. قابل ذکر است که مشتق کسری کاپوتو تعریف بسیار کاربردی تری در زمینه علوم و مهندسی دارد.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به معرفی انتگرال و مشتق از مرتبه دلخواه پرداخته و ویژگی‌های آن‌ها را بیان و اثبات کرده‌ایم، که این مبحث در طبقه بندی حسابان کسری جای می‌گیرد. سپس به بررسی معادلات دیفرانسیل کسری و جواب‌های تحلیلی آن‌ها پرداخته و در بخش آخر بدلیل آن‌که معمولا جواب‌های تحلیلی این گونه معادلات (اعم از خطی و غیرخطی) قابل محاسبه نیست، به بیان روش‌های عددی می‌پردازیم.

فصل ۱

حسابان کسری

۱.۱ مقدمه

حسابان کسری به معنای محاسبه اعداد کسری و محاسبه مشتق و انتگرال معمولی نیست، بلکه نامی است برای نظریه انتگرال‌ها و مشتق‌ها از هر مرتبه دلخواه که تعمیمی برای مشتق از مرتبه n و انتگرال $n-$گانه است. دنباله نامتناهی از انتگرال‌های $n-$گانه و مشتق‌های مرتبه n زیر را در نظر بگیرید:

$$\cdots, \quad \int_a^t d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1, \quad \int_a^t f(\tau_1) d\tau_1, \quad f(t), \quad \frac{df(t)}{dt}, \quad \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \quad , \cdots$$

نماد بکار رفته برای مشتق از مرتبه حقیقی دلخواه α توسط دیویس[1] به صورت زیر پیشنهاد شد

$${}_aD_t^{\alpha} f(t).$$

نام کوتاه مشتق از مرتبه دلخواه را مشتق کسری می‌نامند.

واژه انتگرال کسری در این پایان نامه انتگرال از مرتبه دلخواه که متناظر با مقدار منفی α است. نماد مجزایی را برای انتگرال کسری بکار نمی‌بریم، انتگرال کسری از مرتبه $\beta > 0$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$${}_aD_t^{-\beta} f(t).$$

در این فصل سعی بر این است که عملگر مشتق از مرتبه صحیح را به مشتق از مرتبه ناصحیح تبدیل کنیم، در این راستا تعریف‌های مختلفی از انواع مشتقات کسری بیان می‌شود و ویژگی‌های این عملگرها را نشان می‌دهیم تا در فصل‌های بعدی از آن‌ها استفاده کنیم.

[1] Davis

۲.۱ مشتق کسری گرنوالد- لت‌نیکوف

فرض کنید تابع $y = f(t)$، پیوسته باشد. طبق تعریف معمول مشتق از مرتبه اول برای تابع $y = f(t)$ داریم:

$$f' = \frac{df}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \tag{1.2.1}$$

با به‌کار گرفتن دو بار از تعریف (۱.۲.۱) برای مشتق مرتبه دوم داریم:

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

با استفاده از (۱.۲.۱) و (۲.۲.۱) داریم:

$$f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \tag{3.2.1}$$

و با استقرا داریم:

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} f(t - rh), \tag{4.2.1}$$

که

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} \tag{5.2.1}$$

نماد رایج برای ضرایب دو جمله‌ای است.

اگر قسمت کسری عبارات (۱.۲.۱) تا (۳.۲.۱) را برای عدد صحیح مثبت دلخواه p تعمیم دهیم داریم:

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} f(t - rh), \tag{6.2.1}$$

که در رابطه فوق n نیز یک عدد صحیح است.

واضح است، برای $p \le n$

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p}, \tag{۷.۲.۱}$$

زیرا در این حالت با توجه به رابطه (۵.۲.۱) همه ضرایب بعد از $\begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix}$ برابر با صفر اند.

مقدار منفی p را در نظر بگیرید. برای ساده شدن محاسبات نمایش می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)\cdots(p+r-1)}{r!} \tag{۸.۲.۱}$$

در این صورت

$$\begin{pmatrix} -p \\ r \end{pmatrix} = \frac{-p(-p-1)\cdots(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \tag{۹.۲.۱}$$

با تعویض p در (۶.۲.۱) با $-p$ می‌توان نوشت

$$f_h^{(-p)}(t) = h^p \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh), \tag{۱۰.۲.۱}$$

که در آن p یک عدد صحیح مثبت است.

اگر n ثابت باشد، در این صورت $f_h^{(-p)}(t)$ وقتی که $h \to 0$ به مقدار حدی صفر میل می‌کند. برای رسیدن به مقدار حدی مخالف صفر، فرض می‌کنیم وقتی که $h \to 0$، $n \to \infty$، در واقع قرار می‌دهیم $h = \frac{t-a}{n}$، بطوریکه a ثابت حقیقی است و مقدار حد $f_h^{(-p)}(t)$ را خواه متناهی یا نامتناهی باشد به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t). \tag{۱۱.۲.۱}$$

در این جا نماد ${}_a D_t^{-p} f(t)$، در واقع عملگر مشخصی است که روی تابع $f(t)$ عمل می‌کند و a و t را انتهای پایانی این عملگر نسبت داده‌اند.

چند حالت خاص را نشان می‌دهیم:

برای $p=۱$ داریم:

$$f_h^{(-۱)}(t)=h\sum_{r=\circ}^{n}f(t-rh). \tag{۱۲.۲.۱}$$

باتوجه به $t-nh=a$ و پیوستگی تابع $f(t)$، نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{\substack{h\to\circ\\ nh=t-a}} f_h^{(-۱)}(t)={}_aD_t^{-۱}f(t)=\int_a^t f(\tau)d\tau \tag{۱۳.۲.۱}$$

حال قرار دهید $p=۲$

$$\left[\begin{array}{c} ۲ \\ \\ r\end{array}\right]=\frac{۲\times ۳\times\cdots\times(۲+r-۱)}{r!}=(r+۱),$$

داریم:

$$f_h^{(-۲)}(t)=h\sum_{r=\circ}^{n}h(r+۱)f(t-rh). \tag{۱۴.۲.۱}$$

با نمایش دادن $t+h=y$، می‌توان نوشت

$$f_h^{(-۲)}(t)=h\sum_{r=۱}^{n+۱}(rh)f(y-rh), \tag{۱۵.۲.۱}$$

و با $h\to\circ$ داریم

$$\lim_{\substack{h\to\circ\\ nh=t-a}} f_h^{(-۲)}(t)={}_aD_t^{-۲}f(t)=\int_a^t d\zeta_۲\int_a^{\zeta_۲}f(\zeta_۱)d\zeta_۱$$

$$=\int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{۱۶.۲.۱}$$

زیرا $t\to y$ وقتی که $h\to\circ$.

حال برای $p=۳$، رابطه عمومی برای ${}_aD_t^{-p}$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\left[\begin{array}{c} ۳ \\ \\ r\end{array}\right]=\frac{۳\times ۴\times\cdots\times(۳+r-۱)}{r!}=\frac{(r+۱)(r+۲)}{۱\cdot ۲},$$

داریم:

$$f_h^{(-۳)}(t) = \frac{h}{۱\cdot ۲}\sum_{r=۰}^{n}(r+۱)(r+۲)h^{۲}f(t-rh). \tag{۱۷.۲.۱}$$

نمایش می‌دهیم، مانند حالت قبل، $y = t + h$، داریم

$$f_h^{(-۳)}(t) = \frac{h}{۱\cdot ۲}\sum_{r=۱}^{n+۱}r(r+۱)h^{۲}f(y-rh) \tag{۱۸.۲.۱}$$

عبارت (۱۸.۲.۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f_h^{(-۳)}(t) = \frac{h}{۱\cdot ۲}\sum_{r=۱}^{n+۱}(rh)^{۲}f(y-rh) + \frac{h^{۲}}{۱\cdot ۲}\sum_{r=۱}^{n+۱}rhf(y-rh). \tag{۱۹.۲.۱}$$

حال با فرض $h \to ۰$ داریم

$${}_aD_t^{-۳}f(t) = \frac{۱}{۲!}\int_a^t (t-\tau)^{۲}f(\tau)d\tau, \tag{۲۰.۲.۱}$$

زیرا $y \to t$ وقتی که $h \to ۰$ و

$$\lim_{\substack{h\to ۰\\ nh=t-a}} \frac{h^{۲}}{۱\cdot ۲}\sum_{r=۱}^{n+۱}rhf(y-rh) = \lim_{\substack{h\to ۰\\ nh=t-a}} \frac{h}{۲}\int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau = ۰.$$

طبق روابط (۱۳.۲.۱)-(۲۰.۲.۱) عبارت کلی زیر را برای ${}_aD_t^{-p}$ پیشنهاد می‌کنیم:

$${}_aD_t^{-p}f(t) = \lim_{\substack{h\to ۰\\ nh=t-a}} h^{p}\sum_{r=۰}^{n}\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \frac{۱}{(p-۱)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-۱}f(\tau)d\tau. \tag{۲۱.۲.۱}$$

برای اثبات رابطه (۲۱.۲.۱) با استقرا نشان می‌دهیم اگر این رابطه برای p برقرار باشد، در این صورت برای $p+۱$ نیز برقرار است.

با معرفی

$$f_۱(t) = \int_a^t f(\tau)d(\tau), \tag{۲۲.۲.۱}$$

واضح است $f_۱(a) = ۰$ و بعلاوه داریم:

$$f_۱(t-rh) - f_۱(t-(r+۱)h) \cong hf(t-rh), \tag{۲۳.۲.۱}$$

با استفاده از رابطه (۲۳.۲.۱) داریم

$$
{}_aD_t^{-p-1}f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p+1}\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f(t-rh)
$$

$$
= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p}\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t-rh) \tag{۲۴.۲.۱}
$$

$$
- \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p}\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} f_1(t-(r+1)h) \tag{۲۵.۲.۱}
$$

لازم به ذکر است که با توجه به رابطه (۸.۲.۱) به راحتی می‌توان نشان داد:

$$
\begin{bmatrix} p+1 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} \tag{۲۶.۲.۱}
$$

بعلاوه قرار می‌دهیم:

$$
\begin{bmatrix} p+1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0. \tag{۲۷.۲.۱}
$$

با به کار بردن رابطه (۲۶.۲.۱) در (۲۴.۲.۱) و تعویض r با $r-1$ در (۲۵.۲.۱) و با استفاده از رابطه (۲۷.۲.۱) داریم :

$$
{}_aD_t^{-p-1}f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p}\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f_1(t-rh) + \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p}\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f_1(t-rh)
$$

$$
- \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p}\sum_{r=1}^{n+1}\begin{bmatrix} p+1 \\ r-1 \end{bmatrix} f_1(t-rh)
$$

$$
={}_a D_t^{-p}f_1(t) - \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p}\begin{bmatrix} p+1 \\ n \end{bmatrix} f_1(t-(n+1)h)
$$

$$=_a D_t^{-p} f_۱(t) - (t-a)^p \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} p+۱ \\ \\ n \end{bmatrix} \frac{۱}{n^p} f_۱(a - \frac{t-a}{n}).$$

با توجه به تعریف تابع $f_۱(t)$:

$$\lim_{n\to\infty} f_۱(a - \frac{t-a}{n}) = ۰. \qquad (۲۸.۲.۱)$$

می‌دانیم که تابع گاما را به صورت حدی نیز می‌توان نمایش داد

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+۱)\cdots(z+n)}, \qquad (۲۹.۲.۱)$$

بطوریکه $\Re(z) > ۰$ است[۲۸].

حال با استفاده از رابطه (۲۹.۲.۱) داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} p+۱ \\ \\ n \end{bmatrix} \frac{۱}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{(p+۱)(p+۲)\cdots(p+n)}{n^p n!} = \frac{۱}{\Gamma(p+۱)} \qquad (۳۰.۲.۱)$$

با توجه به روابط نشان داده شده داریم:

$$_aD_t^{-p-۱} f(t) =_a D_t^{-p} f_۱(t) = \frac{۱}{(p-۱)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-۱} f_۱(\tau) d\tau$$

$$= -\frac{(t-\tau)^p f_۱(\tau)}{p!} |_{\tau=a}^{\tau=t} + \frac{۱}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau) d\tau$$

$$= \frac{۱}{p!} \int_a^t (t-\tau)^p f(\tau) d\tau. \qquad (۳۱.۲.۱)$$

به این ترتیب اثبات (۲۱.۲.۱) با استقرا به پایان رسید.

حال نشان می‌دهیم رابطه (۲۱.۲.۱) نمایش یک انتگرال $p-$ گانه است.

با گرفتن انتگرال از رابطه زیر :

$$\frac{d}{dt}(_aD_t^{-p} f(t)) = \frac{۱}{(p-۲)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-۲} f(\tau) d\tau =_a D_t^{-p+۱} f(t)$$

داریم:

$$ {}_aD_t^{-p}f(t) = \int_a^t {}_aD_\tau^{-p+۱}f(\tau)d\tau, \tag{۳۲.۲.۱} $$

از طرفی به طور مشابه برای ${}_aD_\tau^{-p+۱}f(\tau)$ داریم:

$$ {}_aD_\tau^{-p+۱}f(\tau) = \int_a^t {}_aD_\tau^{-p+۲}f(\tau)d\tau, \cdots , \tag{۳۳.۲.۱} $$

با بکار بردن رابطه (۳۳.۲.۱) در (۳۲.۲.۱) داریم:

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{-p}f(t) &= \int_a^t d\tau \int_a^t {}_aD_\tau^{-p+۲}f(\tau)d\tau \\ &= \int_a^t d\tau \int_a^t d\tau \int_a^t {}_aD_\tau^{-p+۲}f(\tau)d\tau \\ &= \underbrace{\int_a^t d\tau \int_a^t d\tau \cdots \int_a^t f(\tau)d\tau.}_{p\ times} \end{aligned} \tag{۳۴.۲.۱} $$

دیدیم که رابطه (۴.۲.۱) بیانگر مشتق از مرتبه صحیح n و رابطه (۲۱.۲.۱) بیانگر انتگرال $p-$گانه برای تابع پیوسته $f(t)$ و هر دو حالت‌های خاصی از رابطه کلی زیر هستند:

$$ {}_aD_t^{p}f(t) = \lim_{\substack{h\to ۰ \\ nh=t-a}} h^{-p}\sum_{r=۰}^{n}(-۱)^r \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} f(t-rh), \tag{۳۵.۲.۱} $$

این نمایش اگر $p=m$ مشتق از مرتبه m و اگر $p=-m$ باشد انتگرال $m-$ گانه است.

۱.۲.۱ انتگرال از مرتبه دلخواه

حالتی را در نظر می‌گیریم که $p<۰$ باشد. در عبارت (۳۵.۲.۱) به جای p، $-p$ قرار می‌دهیم در این صورت (۳۵.۲.۱) به فرم زیر در می‌آید:

$$ {}_aD_t^{-p}f(t) = \lim_{\substack{h\to ۰ \\ nh=t-a}} h^{p}\sum_{r=۰}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh), \tag{۳۶.۲.۱} $$

بطوریکه، در بالا، h و n رابطه $nh = t - a$ را دارند. برای اثبات وجود حد در (۳۶.۲.۱) و محاسبه حد ابتدا به بیان قضیه زیر می‌پردازیم :

قضیه ۱.۲.۱. دنباله‌های $\alpha_{n,k}, \beta_k, (k = ۱, ۲, \cdots)$ را در نظر گرفته و فرض کنید روابط زیر نیز برقرار اند:

$\lim_{k\to\infty} \beta_k = ۱,$

$\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,k} = ۰ \qquad \forall k,$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=۱}^{n} \alpha_{n,k} = A \qquad \forall k,$

$\sum_{k=۱}^{n} \mid \alpha_{n,k} \mid < K \qquad \forall n.$

در این صورت :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=۱}^{n} \alpha_{n,k}\beta_k = A.$$

برهان. رجوع شود به [۲۸]. $\square$

حال با استفاده از قضیه (۱.۲.۱) به محاسبه حد (۳۶.۲.۱) می‌پردازیم. داریم:

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h\to ۰\\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=۰}^{n} \left[\begin{array}{c} p \\ \\ r \end{array} \right] f(t-rh)$$

$$= \lim_{\substack{h\to ۰\\ nh=t-a}} \sum_{r=۰}^{n} \frac{۱}{r^{p-۱}} \left[\begin{array}{c} p \\ \\ r \end{array} \right] h(rh)^{p-۱} f(t-rh)$$

$$= \frac{۱}{\Gamma(p)} \lim_{\substack{h\to ۰\\ nh=t-a}} \sum_{r=۰}^{n} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-۱}} \left[\begin{array}{c} p \\ \\ r \end{array} \right] h(rh)^{p-۱} f(t-rh)$$

$$= \frac{۱}{\Gamma(p)} \lim_{n\to\infty} \sum_{r=۰}^{n} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-۱}} \left[\begin{array}{c} p \\ \\ r \end{array} \right] \frac{t-a}{n} \left(r\frac{t-a}{n} \right)^{p-۱} f(t - r\frac{t-a}{n})$$

قرار دهید :

$$\beta_r = \frac{\Gamma(p)}{r^{p-۱}} \left[\begin{array}{c} p \\ \\ r \end{array} \right],$$

و

$$\alpha_{n,r} = \frac{t-a}{n} \left(r\frac{t-a}{n} \right)^{p-۱} f(t - r\frac{t-a}{n}).$$

حال با استفاده از رابطه (۲۹.۲.۱) نمایش حدی تابع گاما داریم:

$$\lim_{r\to\infty} \beta_r = \lim_{r\to\infty} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-۱}} \left[\begin{array}{c} p \\ \\ r \end{array} \right] = ۱. \qquad (۳۷.۲.۱)$$

واضح است، تابع $f(t)$ در بازه بسته $[a,t]$ پیوسته است، در این صورت:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=\circ}^{n} \alpha_{n,r} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=\circ}^{n} \frac{t-a}{n} \left(r\frac{t-a}{n} \right)^{p-۱} f(t - r\frac{t-a}{n})$$

$$= \lim_{h\to\circ} \sum_{r=\circ}^{n} h(rh)^{p-۱} f(t-rh) = \int_a^t (t-\tau)^{p-۱} f(\tau) d\tau. \qquad (۳۸.۲.۱)$$

با توجه به روابط (۳۷.۲.۱) و (۳۸.۲.۱) و قضیه (۱.۲.۱) به نتیجه زیر می‌رسیم:

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h\to\circ \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=\circ}^{n} \left[\begin{array}{c} p \\ \\ r \end{array} \right] f(t-rh) = \frac{۱}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-۱} f(\tau) d\tau \qquad (۳۹.۲.۱)$$

اگر $f'(t)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، در این صورت با گرفتن انتگرال جزء به جزء، رابطه (۳۹.۲.۱) به صورت زیر در می‌آید:

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+۱)} + \frac{۱}{\Gamma(p+۱)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(t) d\tau,$$

و اگر تابع $f(t)$ دارای $m+۱$ مشتق پیوسته باشد، در این صورت:

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \sum_{k=\circ}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+۱)} + \frac{۱}{\Gamma(p+m+۱)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+۱)}(t) d\tau.$$