بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

(گرایش آنالیز عددی)

عنوان

جواب‌های تقریبی برای معادلات انتگرال و اینتگرو-دیفرانسیل به کمک روش توابع پایه شعاعی

از:

ملیکا محمدی

استاد راهنما:

دکتر حسین امینی‌خواه

اسفند ۱۳۹۳

تقدیم به

ما حصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم به آنان که مهر آسمانی‌شان آرام بخش آلام زمینی‌ام است

به جاودانه‌ترین همراه عمرم، همسر مهربانم

به استوارترین تکیه‌گاهم، دستان پرمهر پدرم

به زیباترین نگاه زندگی‌ام، چشمان پر نور مادرم

و

به بهترین برادر دنیا، علی عزیزم

امروز هستی‌ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما

تقدیر و تشکر

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره‌ای ساخت تا وسعت آن‌را از دریچه اندیشه‌های آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. اکنون که در سایه‌سار بنده نوازیهایش پایان نامه حاضر به انجام رسیده است بر خود لازم میدانم تا مراتب سپاس را از استاد فرهیخته‌ام جناب آقای دکتر حسین امینی خواه به‌جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان نامه به انجام نمی‌رسید. بی‌شک بنده قادر به جبران لحظه‌ای از زحمات ایشان نیستم. برای ایشان از درگاه خداوند بزرگ موفقیت و سلامتی طلب می‌کنم.

همچنین از جناب آقای دکتر خجسته و جناب آقای دکتر مهردوست که زحمت مطالعه و رفع نواقص بیشمار این پایان نامه را کشیدند سپاسگذارم.

اکنون جا دارد از آقای مهرعلیزاده، آقای اسدی، سرکار خانم صالحی و خانم اسعدی نیز تشکر کنم که بسیاری از مشکلات را برایم سهل نمودند.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

۳. فصل سوم : جواب‌های تقریبی برای معادلات انتگرال و اینتگرو-دیفرانسیل به کمک روش توابع پایه شعاعی

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

چکیده

جواب‌های تقریبی برای معادلات انتگرال و اینتگرو-دیفرانسیل به کمک روش توابع پایه شعاعی

ملیکا محمدی

در این پایان نامه، یک روش هم‌مکانی برای حل معادلات انتگرال و اینتگرو-دیفرانسیل خطی بیان می‌کنیم. این روش بر پایه‌ی توابع پایه‌ای شعاعی و به‌کار بردن صفرهای چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته به عنوان نقاط هم‌مکانی است. برای تأیید دقت و کارآمدی روش، نتایج عددی با جواب واقعی مقایسه شده‌اند.

واژه های کلیدی: روش توابع پایه‌ای شعاعی؛ نقاط هم‌مکانی؛ چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته؛ معادلات انتگرال؛ معادلات اینتگرو-دیفرانسیل.

Abstract

An approximate solutions for the integral and integro-differential equations by radial basis functions

Melika Mohammadi

In this dissertation, we propose a collocation method for solving linear integral and integro-differential equations.This method is based upon radial basis functions, using zeros of the shifted Legendre polynomial as the collocation points. The results of numerical expriments are compared with the exact solution in illustrative examples to confirm the accuracy and efficiency of the presented scheme.

Keyword: Radial basis function; the collocation points; shifted Legendre polynomial; integral equations; integro-differential equations.

پیشگفتار

انواع معادلات انتگرال و اینتگرو-دیفرانسیل در بسیاری از مسائل مهندسی، فیزیک، شیمی و بیولوژی ظاهر می‌شوند، به‌گونه‌ای که تعدادی از پدیده‌های فیزیکی و بیولوژیکی در قالب این معادلات نمایش داده می‌شوند. البته معادلات انتگرال به عنوان نمایش جواب معادله دیفرانسیل نیز به‌کار می‌رود. دانشمندان و محققین در پژوهش‌های خود در کاربرد علوم در مواردی نظیر انتقال گرما، پدیده انتشار، پخش نوترون و غیره به حل معادلات انتگرال و اینتگرو-دیفرانسیل نیاز پیدا می‌کنند.

در این پایان نامه از روش توابع پایه‌ای شعاعی و صفرهای چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته به عنوان نقاط هم‌مکانی برای حل برخی از معادلات انتگرال و همچنین معادلات اینتگرو-دیفرانسیل خطی استفاده می‌کنیم. از بین انواع توابع پایه‌ای شعاعی از تابع مولتی کوادریک (MQ) استفاده می‌کنیم.

پایان نامه حاضر شامل سه فصل می‌باشد: در فصل اول به تعاریف مقدماتی انواع معادلات انتگرال می‌پردازیم. در فصل دوم روش توابع پایه‌ای شعاعی با ارائه چندین مثال معرفی می‌شود. در این فصل درون‌یابی توابع به کمک توابع پایه‌ای شعاعی بررسی شده است. انتهای فصل نیز به کاربردهای توابع پایه‌ای شعاعی اشاره دارد. در فصل سوم ترکیب روش توابع پایه‌ای شعاعی و روش هم‌مکانی مبتنی بر صفرهای چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته را برای حل معادلات انتگرال و اینتگرو-دیفرانسیل بیان کرده و با ارائه نتایج عددی صحت و دقت روش را نشان می‌دهیم.

فصل اول

تعاریف و مقدمات

۱-۱ تعاریف

یک معادله انتگرال معادله ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد. یک نمونه از معادله انتگرال که در آن $u(x)$ تابع مجهولی است که باید معلوم شود به‌صورت زیر است

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt. \qquad (۱-۱)$$

$k(x,t)$ هسته معادله انتگرالی نامیده می‌شود وتوابع $\alpha(x), \beta(x)$ حدود انتگرال هستند. در معادله (۱-۱) تابع مجهول یعنی $u(x)$ تنها در زیر علامت انتگرال ظاهر شده است و در حالت‌های دیگر ممکن است تابع مجهول در خارج از علامت انتگرال هم حضور داشته باشد. باید توجه کرد که هسته معادله یعنی $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند. هدف تعیین تابع مجهول $u(x)$ است که در رابطه (۱-۱) صدق کند. برای این‌کار روش‌های مختلفی به‌کار برده می‌شود. به معادلات انتگرال نظیر (۱-۱) معادلات انتگرال خطی می‌گویند زیرا تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال خطی است یعنی توان یک دارد اما اگر تابع $u(x)$ زیر علامت انتگرال با توابعی غیر خطی نظیر $u^2(x)$ ، $e^{u(x)}$ ، $\cos u(x)$ و ... بیان شوند آنگاه معادله انتگرال را غیرخطی می‌گویند.

۱-۲ تقسیم بندی معادلات انتگرال خطی

۱- معادلات انتگرال فردهلم[۱] ؛

۲- معادلات انتگرال ولترا[۲] ؛

۳- معادلات انتگرال-دیفرانسیل ؛

۴- معادلات انتگرال منفرد.

اکنون تعاریف و ویژگی‌های عمده هر نوع را بررسی می‌کنیم.

۱-۲-۱ معادلات انتگرال خطی فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم که در آنها حد پایین و حد بالای انتگرال‌گیری به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند به‌صورت زیر می‌باشد

$$\Phi(x)u(x) = f(x) + \lambda\int_{a}^{b} k(x,t)u(t)dt, \quad a \le x,t \le b. \qquad (۲-۱)$$

[1] -Fredholm
[2]- Volterra

که در آن هسته معادله انتگرال $k(x,t)$ و $f(x)$ توابع معلوم و λهم یک پارامتر معلوم می‌باشد. معادله (۱-۲) را خطی گویند زیرا تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال به‌طور خطی ظاهر شده است یعنی توان $u(x)$ یک است.

بر حسب اینکه $\Phi(x)$ هریک از مقادیر زیر را انتخاب کند، معادلات انتگرال فردهلم خطی به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند

۱-زمانی‌که $\Phi(x)=0$ معادله (۱-۲) به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)u(t)dt=0. \qquad (۱-۳)$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می‌نامند.

۲-زمانی‌که $\Phi(x)=1$ معادله به‌صورت

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt.$$

درخواهد آمد. به این معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می‌گویند.

۱-۲-۲ معادله انتگرال خطی ولترا

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا یعنی معادلاتی که در آن‌ها حد بالا و پایین انتگرال‌گیری به‌جای اینکه یک عدد ثابت باشد به‌صورت تابع از x ظاهر می‌شود، به شکل زیر است

$$\Phi(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)u(t)dt. \qquad (۱-۴)$$

که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال به‌صورت خطی است.

باید توجه کرد که (۱-۴) را می‌توان به‌عنوان یک حالت خاص معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت به‌طوری‌که هسته $k(x,t)$ برای $t>x$ و $x\in[a,b]$ صفر فرض شود.

معادلات انتگرال ولترا را می‌توان با توجه به مقدار $\Phi(x)$ به دو گروه دسته‌بندی نمود.

۱- در حالتی‌که $\Phi(x)=0$ معادله (۱-۴) به صورت زیر تبدیل خواهد شد

$$f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)u(t)dt=0.$$

به‌این نوع معادله، معادله انتگرال ولترا نوع اول گویند.

۲- زمانی که $\Phi(x)=1$ آن‌گاه معادله (۱-۴) به شکل

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)u(t)dt.$$

در خواهد آمد. که به آن معادله انتگرال ولترای نوع دوم گویند.

تذکر ۱ (ساختمان معادلات فردهلم و ولترا)

در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی نوع اول تابع مجهول تنها به طور خطی زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود اما در نوع دوم تابع مجهول هم در زیر علامت انتگرال و هم در خارج از آن به‌صورت خطی ظاهر می‌شود.

تذکر ۲ (حدود انتگرال گیری)

در معادلات انتگرال فردهلم، انتگرال‌گیری روی یک فاصله متناهی با حدود ثابت انجام می‌شود اما در معادلات انتگرال ولترا حداقل یکی از حدود انتگرال‌گیری متغیر است و معمولاً همان حد بالای انتگرال‌گیری به‌عنوان متغیر انتخاب می‌شود.

تذکر ۳ (ظهور معادلات انتگرال)

باید به این نکته مهم توجه کرد که معادلات انتگرال در خیلی از مسائل مهندسی فیزیک، شیمی و بیولوژی ظاهر می‌شوند. البته معادلات انتگرال به‌عنوان نمایش جواب معادلات دیفرانسیل هم به‌کار می‌رود، به‌طوری‌که اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر به‌صورت یک مسئله مقدار مرزی باشد، آنگاه معادله انتگرالی که ظاهر می‌شود از نوع فردهلم خواهد شد و اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مسئله مقدار اولیه باشد آنگاه معادله حاصل یک معادله انتگرال ولترا خواهد بود.

تذکر ۴ (خاصیت خطی)

همان‌طور که اشاره شد تابع مجهول $u(x)$ در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم در زیر علامت انتگرال به‌صورت توان یک ظاهر می‌شود. اما زمانی معادلات انتگرال غیرخطی فردهلم و ولترا خواهیم داشت که به‌جای $u(x)$ عبارتی نظیر $F(u(x))$ آورده شود.

تذکر ۵ (خاصیت همگن بودن)

اگر در معادله انتگرال فردهلم نوع دوم و ولترا نوع دوم شرط $f(x) = 0$ برقرار باشد آنگاه معادله حاصل را یک معادله همگن می‌نامند، در غیر این‌صورت معادله مورد نظر را یک معادله انتگرال غیر همگن می‌گویند.

تذکر ۶ (رفتار تکین معادله انتگرال)

یک معادله انتگرال را منفرد (تکین) می‌نامند اگر انتگرال‌گیری، ناسره باشد. این معمولا زمانی رخ می‌دهد که فاصله انتگرال‌گیری نامتناهی باشد یا اینکه هسته معادله در یک یا تعداد بیشتری نقطه از حوزه‌ی مورد نظر یعنی $a \leq t \leq b$ بی‌کران باشد.

درضمن دو دسته دیگر از معادلات انتگرال را اکنون معرفی می‌کنیم.

۱-۲-۳ معادلات اینتگرو-دیفرانسیل

ولترا در اوایل سال ۱۹۰۰ در حال مطالعه موضوع رشد جمعیت بود که با معادلات اینتگرو-دیفرانسیل مواجه شد. در این‌گونه معادلات تابع مجهول $u(x)$ در دو طرف ظاهر می‌شود. در یک طرف زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر به‌عنوان یک مشتق معمولی نمایان می‌شود. تعدادی از پدیده‌ها در فیزیک و بیولوژی در قالب این نوع معادلات ظاهر می‌شوند، البته این‌گونه معادلات

در هنگام تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرال هم نمایان می‌گردند. در زیر نمونه‌ای از این نوع معادلات آورده شده است

$$u''(x) = -x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \qquad u(0) = 0\ , u'(0) = 1.$$

که به آن معادله اینتگرو-دیفرانسیل ولترا می‌گویند این تقسیم‌بندی بر اساس حدود انتگرال‌گیری انجام شده است.

۱-۲-۴ معادلات انتگرال منفرد

معادله انتگرال از نوع اول

$$f(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt. \tag{۱-۵}$$

یا از نوع دوم

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt. \tag{۱-۶}$$

را که در آنها حد پایین، حد بالا و یا هر دو حدود انتگرال‌گیری نامتناهی باشند، معادله انتگرال منفرد می‌نامند. به علاوه اگر هسته معادله انتگرال (۱-۵) و (۱-۶) در یک نقطه یا در نقاط بیشتری از دامنه انتگرال‌گیری نامتناهی باشد بازهم این‌گونه معادلات را معادلات انتگرال منفرد می‌نامند. مثال زیر نمونه‌ای از معادله انتگرال منفرد است که حدود انتگرال‌گیری نامتناهی است:

$$u(x) = 2x + 6\int_0^\infty \sin(x-t)u(t)dt.$$

هم‌چنین نمونه‌ای که در زیر مشاهده می‌کنید معادله انتگرال منفرد است که هسته در زمان نامتناهی می‌شود:

$$x = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1.$$

۱-۳ جواب یک معادله انتگرال

یک جواب از معادله انتگرال یا اینتگرو-دیفرانسیل روی فاصله انتگرال‌گیری یک تابع $u(x)$ است به‌طوری‌که آن تابع در معادله داده شده صدق کند.

معادله انتگرال ولترای

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt. \tag{۱-۷}$$

را در نظر بگیرید. در اینجا $u(x)=e^x$ یک جواب از معادله انتگرال ولترا است. با جای‌گذاری $u(x)=e^x$ در طرف راست معادله (۱-۷) داریم:

$$e^x = 1+\int_0^x e^t dt = 1+[e^t]_0^x = e^x = u(x).$$

نکات قابل توجه و با ارزشی در ارتباط با جواب معادلات انتگرال یا معادلات اینتگرو-دیفرانسیل وجود دارد که اکنون به آنها اشاره می‌کنیم. اولین نکته مهمی که مطرح می‌شود این است که آیا جواب وجود دارد و اگر وجود دارد آیا جواب یکتا است یا نه؟ دومین نکته مهم آن است که آیا این جواب با یک فرم بسته‌ای که قابل توصیف بر حسب توابع مقدماتی نظیر یک چندجمله‌ای یا یک تابع نمایی یا هذلولوی یا مثلثاتی باشد، قابل نمایش است؟

البته همیشه نمی‌توان جواب را به‌یک فرم بسته مشخص کنیم اما به‌جای آن می‌توان جواب را به شکل یک سری به‌دست آورد. با توجه به اینکه تحقیق حاضر بیشتر پیرامون معادلات انتگرال ولترا، معادلات اینتگرو- دیفرانسیل ولترا است، به معرفی این دسته معادلات می‌پردازیم.

۱-۴ معادلات انتگرال ولترا

در این بخش روی معادلات انتگرال ولترا غیر همگن نوع دوم به شکل زیرکه در آن $K(x,t)$ هسته معادله و λ یک پارامتر است تمرکز می‌کنیم.

همان‌طورکه قبلا اشاره کردیم حدود بالای انتگرال گیری در معادلات انتگرال ولترا توابعی از x هستند و برخلاف معادلات انتگرال فردهلم این حدود مقادیر ثابت نیستند. هدف، ارائه چند روش متنوع جهت تعیین جواب $u(x)$ می‌باشد و پیرامون قضایا و جنبه‌های نظری مربوط به‌وجود و یکتایی جواب و یا مفهوم همگرایی بحث نخواهیم کرد.

۱-۵ معادلات اینتگرو-دیفرانسیل

اکنون معادلات اینتگرو-دیفرانسیل که در آن هر دو عملگر انتگرال و دیفرانسیل در معادله ظاهر می‌شوند، را مطالعه می‌کنیم. این نوع معادلات ابتدا در اوایل سال ۱۹۰۰ توسط ولترا معرفی شدند. ولترا در حال مطالعه پدیده رشد جمعیت و به‌خصوص تأثیر وراثت بود که در تحقیق خود با این‌گونه معادلات مواجه شد و نام مذکور را برای آنها انتخاب کرد.

دانشمندان و محققین در پژوهش خود در کاربرد علوم در مواردی نظیر انتقال گرما، پدیده انتشار، پخش نوترون و ... به حل این معادلات نیاز پیدا کردند. جزئیات بیشتر درباره مواردی را که این‌گونه معادلات ظاهر می‌شوند می‌توان در کاربردهای فیزیک و زیست شناسی و مهندسی پیدا کرد. به این نکته مهم باید توجه کرد که در معادلات اینتگرو-دیفرانسیل تابع مجهول و حداقل یکی از مشتق‌هایش در خارج و هم‌چنین زیر علامت انتگرال قرار دارند. یکی از جاهایی که معادلات اینتگرو-دیفرانسیل ظاهر می‌شوند و می‌توان آنها را به سادگی دید در تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرال با استفاده از قاعده لیب‌نیتز

است. در این حالت معادله اینتگرو-دیفرانسیل را می‌توان به عنوان یک مرحله میانی در تعیین یک معادله انتگرال ولترا با معادله دیفرانسیل داده شده، تلقی کرد. در زیر چند مثال از معادلات اینتگرو-دیفرانسیل آورده شده است:

$$u''(x) = e^x - x + \int_0^1 xtu'(t)dt, \qquad u(0) = 0,\ u'(0) = 1. \tag{۱-۸}$$

$$u'(x) = x - \int_0^x (x-t)u(t)dt, \qquad u(0) = 0. \tag{۱-۹}$$

از مثال‌های بالا واضح است که تابع مجهول $u(x)$ یا یکی از مشتق‌هایش در زیر علامت انتگرال و هم‌چنین دیگر مشتق‌هایش در خارج از علامت انتگرال ظاهر می‌شوند. لذا در معادلات بالا عملگر مشتق و انتگرال با هم در یک معادله حضور دارند. در نتیجه عبارت اینتگرو-دیفرانسیل برای این‌گونه معادلات به‌کار برده می‌شوند که نشان دهنده ترکیب هر دو مفهوم در آن معادلات است. باتوجه به حدود انتگرال گیری معادله‌ی (۱-۸) را معادله‌ی اینتگرو-دیفرانسیل فردهلم و معادله‌ی (۱-۹) را معادله اینتگرو-دیفرانسیل ولترا می‌نامیم.

فصل دوم

روش توابع پایه شعاعی

۲-۱ مقدمه

۲-۱-۱ روش شبکه‌بندی

یکی از روش‌های تقریب چند متغیره روی نواحی کلی (نه لزوماً مستطیلی یا مکعبی) این است که ناحیه تقریب را با اجتماعی از زیر ناحیه‌های منظم مانند مثلث‌ها، مستطیل‌ها، هرم‌ها یا مکعب‌ها تقریب بزنیم و سپس تقریب‌های موضعی روی این ناحیه‌ها را به‌دست می‌آورم و درآخر یک تقریب سراسری از درجه همواری معین در کل ناحیه بسازیم. این همان روش المان‌های متناهی است که به کمک شبکه‌بندی ناحیه انجام می‌گردد. این روش اساس بسیاری از روش‌های عددی به‌خصوص در حل معادلات دیفرانسیل جزئی است. از جمله روش‌هایی که از این نوع تقریب استفاده می‌کنند می‌توان به روش المان‌های متناهی، روش المان‌های مرزی و روش حجم‌های متناهی اشاره کرد.

۲-۱-۲ روش‌های فاقد شبکه

در روش‌های فاقد شبکه از شبکه‌بندی ناحیه به مفهوم روش المان‌های متناهی استفاده نمی‌شود و به‌جای آن تقریب بر اساس مجموعه‌ای از نقاط که با کیفیت مناسب درون ناحیه پراکنده شده‌اند نوشته می‌شوند. لفظ بدون شبکه در مقابل شبکه بندی مثلثی یا مستطیلی در حالت دو بعدی و یا شبکه هرمی یا مکعبی در حالت سه بعدی استفاده می‌شود. در سال‌های اخیر روش‌های متنوعی برای تقریب بدون شبکه به‌وجود آمده است. با وجود اینکه تحقیقات در سال‌های اخیر رخ داده است اما روش‌های فاقد شبکه ایرادی در پیاده‌سازی و ساختار الگوریتم‌های خود ندارند و با بررسی مختصر از این تحقیقات انجام شده در این زمینه می‌بینیم که این روش‌ها با توجه به پایه‌های قوی ریاضی، کاربردهای گوناگونی دارند. البته طبقه‌بندی و مرتب‌سازی این روش‌ها به‌دلیل اینکه روش‌ها تحت نام‌های دیگر همچون روش Grid free، Grid less، Mesh free، تفاضل متناهی تعمیم یافته و هیدرودینامیک ذره‌ای هموار به‌کار می‌روند، کار ساده‌ای نیست و با مشکلاتی روبه‌رو است. با وجود این نام‌ها، روش فاقد شبکه از روش‌های شبکه‌بندی همچون المان‌های متناهی، روش المان مرزی و روش حجم متناهی که به علت وابستگی آنها به استفاده از المان، شبکه‌های مشبک یا حجم‌های متناهی به‌عنوان ساختارهای اساسی برای جداسازی معادلات دیفرانسیل جزئی موجود، تا حدودی برتری دارند. در حالی که روش‌های فاقد شبکه برای جداسازی معادلات دیفرانسیل به توده‌هایی از نقاط نیاز دارند. اما چرا باید به دنبال توسعه‌ی روش‌های فاقد شبکه باشیم در حالی‌که روش‌های المان متناهی، روش المان مرزی و روش حجم متناهی به‌طور وسیع به‌کار می‌روند و در پیاده‌سازی و تحلیل‌ها به‌طور گسترده کاربرد دارند. جواب این سوال به سختی موجود در جداسازی و به‌دست آوردن شبکه بندی مناسب، برمی‌گردد. به‌طوری‌که شبکه‌بندی همیشه چالشی برای محاسبات دانشمندان ایجاد کرده است. با وجود این‌که توان محاسباتی زیاد، دانشمندان را قادر ساخته تا با مسائل با ابعاد بزرگ و مختلط روبه‌رو شوند و با پیشرفت الگوریتم‌ها محدودیت‌های شبکه‌بندی را کنار بگذارند اما در صنعت برای مواجه با محصولات جدید و رایج که به‌وسیله تکنولوژی شبیه‌سازی به‌دست می‌آیند، شبکه‌بندی چالش‌های بزرگی را ایجاد می‌کند. همچنین در قسمت‌هایی