

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش اقتصادی - اجتماعی

خانواده جدیدی از توزیع‌های گوسی وارون

استاد راهنما:

دکتر محمد حسین علامت ساز

پژوهشگر:

زهرا زائری

بهمن ماه ۱۳۸۹

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات
و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه
متعلق به دانشگاه اصفهان است.



دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی آمار گرایش اقتصادی - اجتماعی

خانم زهرا زائری امیرانی

تحت عنوان

خانواده جدیدی از توزیع های گوسی وارون

در تاریخ ۸۹/۱۱/۲۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه بسیار خوب به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای اول پایان نامه دکتر محمد حسین علامت ساز با مرتبه ی علمی استاد امضا

۲- استاد داور داخل پایان نامه دکتر افشین پرورده با مرتبه ی علمی استادیار امضا

۳- استاد داور خارج از گروه دکتر علی رجالی با مرتبه ی علمی دانشیار امضا

امضای مدیر گروه

تشکر و قدردانی:

حمد و سپاس بیکران خداوند سبحان را سزااست که این بنده را بر اتمام این تحقیق توانا ساخت. به مصداق کلام زیبای «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق» بر خود لازم می دانم از کلیه بزرگوارانی که مرا در این تحقیق یاری نمودند تشکر و قدردانی نمایم.

- جناب آقای دکتر محمد حسین علامت ساز، استاد محترم راهنما که از رهنمودهای بیدریقشان در تمام مراحل پژوهش بهره مند بوده ام.

- اساتید محترم داور و ناظر که نظرات ارزشمندشان بر غنای این پژوهش افزود.

و

- خانواده عزیزم که کمک های بیدریقشان پیمودن این راه را بر من هموار ساخت.

و

- همسر عزیزم که با حوصله تمام مرا در این امر یاری رساند.

تقدیم به:

پدر و مادر و همسر م

چکیده

خانواده توزیع های گوسی وارون از توزیع های نامتقارنی تشکیل شده است که به میزان قابل توجهی مشابه خانواده توزیع های گوسی در ارائه راه حل های ساده استنباطی در مدل سازی و تحلیل داده های مثبت چوله مورد استفاده قرار می گیرند. این توزیع به ویژه می تواند به عنوان مدلی برای طول عمر خرابی و بررسی قابلیت اعتماد یک سیستم با فرآورده های صنعتی به کار رود.

در این پایان نامه، ابتدا خانواده توزیع های گوسی وارون و ویژگی های اصلی توزیعی و استنباطی آن مورد بررسی قرار داده می شود و توزیع های مرتبط با این خانواده از قبیل توزیع های نمونه گیری و گوسی وارون چند متغیره معرفی خواهند شد. سپس توزیع گوسی وارون تعمیم یافته و توزیع های α - گوسی وارون مورد بررسی قرار داده می شوند و خصوصیات آنها معین می گردند. همچنین یک مدل جدید توزیع گوسی وارون معروف به توزیع گوسی نوع وارون را تعریف می شود و خصوصیات توزیعی و استنباطی آن مطالعه و کاربرد آن در یک مجموعه داده نشان داده می شود. بالاخره، توزیع گوسی وارون آمیخته مورد بررسی قرار می گیرد و روش جدیدی برای محاسبه گشتاوهای توزیع ارائه می شود. سپس از آن برای انتخاب مدل استفاده می شود و کاربرد توزیع گوسی آمیخته با استفاده از چهار مجموعه داده تشریح خواهد شد.

کلید واژه ها: توزیع گوسی وارون، توزیع گوسی وارون تعمیم یافته، توزیع گوسی وارون چند متغیره، توزیع لاگرانژ چند متغیره، روش درستمایی.

فهرست مطالب

صفحه عنوان

فصل اول: معرفی توزیع گوسی وارون

۱-۱ شرحی بر موضوع	۱
۲-۱ فرایند وینر	۳
۳-۱ توزیع گوسی وارون	۳
۴-۱ تابع مولد گشتاور و تابع مشخصه	۶
۵-۱ متغیرهای تصادفی وارون و علت نام گذاری توزیع	۷
۶-۱ خواص توزیع	۹
۷-۱ مشخصه های اصلی	۱۳
۸-۱ تولید اعداد تصادفی از گوسی وارون	۱۴
۹-۱ روند کار پایان نامه	۱۷

فصل دوم: توزیع های مرتبط با توزیع گوسی وارون

۱-۲ مقدمه	۱۸
۲-۲ توزیع های آماری مرتبط	۱۹
۱-۲-۲ توزیع نرمال وزنی غیرخطی	۱۹
۲-۲-۲ توزیع t -استیودنت وزنی غیرخطی	۲۳
۳-۲ توزیع های نمونه گیری	۲۷
۴-۲ معرفی توزیع گوسی وارون چند متغیره	۳۷
۵-۲ بسط چند متغیره رابطه معکوس	۳۷
۶-۲ رابطه معکوس توزیع گوسی وارون چند متغیره با توزیع نرمال چند متغیره	۳۸
۷-۲ توزیع لاگرانژ چند متغیره	۳۹
۸-۲ بسط لاگرانژ و ارتباط معکوس	۴۰
۹-۲ همگرایی توزیع لاگرانژ چند متغیره به توزیع گوسی وارون چندمتغیره	۴۱

عنوان

صفحه

فصل سوم: توزیع گوسی و ارون تعمیم یافته

۱-۳	مقدمه.....	۴۳
۲-۳	توزیع گوسی و ارون تعمیم یافته.....	۴۴
۳-۳	تابع مولد گشتاور و تابع مشخصه.....	۴۶
۴-۳	ویژگی‌های توزیع.....	۴۷
۵-۳	توزیع های α - گوسی و ارون.....	۴۹
۶-۳	تابع مولد گشتاور و تابع مشخصه توزیع.....	۵۳
۷-۳	ویژگی‌های توزیع α - گوسی و ارون.....	۵۴

فصل چهارم: مدل جدید توزیع گوسی و ارون

۱-۴	مقدمه.....	۵۷
۲-۴	توزیع های متقارن در R	۵۸
۳-۴	مدل جدید.....	۶۴
۱-۳-۴	تابع چگالی توزیع گوسی نوع و ارون.....	۶۴
۲-۳-۴	مد توزیع گوسی نوع و ارون.....	۶۶
۳-۳-۴	تابع توزیع تجمعی توزیع گوسی نوع و ارون.....	۶۷
۴-۴	برآورد و استنباط.....	۷۰
۱-۴-۴	برآورد درست‌نمایی پارامترهای توزیع گوسی نوع و ارون.....	۷۰
۲-۴-۴	ماتریس مشتقات مرتبه دوم.....	۷۱
۳-۴-۴	استنباط آماری برای توزیع گوسی نوع و ارون.....	۷۱
۵-۴	شبیه سازی.....	۷۲
۶-۴	توابع توزیع گوسی نوع و ارون.....	۷۲
۱-۶-۴	توابع احتمالاتی توزیع گوسی نوع و ارون.....	۷۲
۲-۶-۴	توابع آماری توزیع گوسی نوع و ارون.....	۷۳
۷-۴	کاربرد داده های.....	۷۴
۱-۷-۴	داده های طول عمر.....	۷۴
۲-۷-۴	تشخیص.....	۷۶

عنوان	صفحه
۱-۲-۷-۴. نمودار $q - q$ نمودار $p - p$	۷۸
۲-۲-۷-۴. آزمون کلموگروف- اسمیرنوف	۷۸
۳-۲-۷-۴. معیار اطلاعات شوارتس	۷۹

فصل پنجم: توریع گوسی و ارون آمیخته

۱-۵ مقدمه	۸۱
۲-۵. توریع گوسی و ارون آمیخته و تبدیل‌های توریع	۸۲
۳-۵. گشتاورهای توریع	۸۵
۱-۳-۵. گشتاورهای صحیح	۸۶
۲-۳-۵. رابطه بین گشتاورهای توریع های گوسی و ارون و توریع ساندرز-برن بام	۸۷
۳-۳-۵. گشتاورهای کسری	۸۸
۴-۵. نیکویی برازش بر اساس گشتاورها	۸۹
پیوست ها	۹۵
منابع و مآخذ	۱۰۵

فهرست جدول ها

صفحه	عنوان
۱۶	جدول ۱-۱ شباهت های توزیع گوسی و گوسی وارون.....
۵۹	جدول ۱-۴ کرنل g وثابت نرمال ساز c برای توزیع های مشخص شده.....
۶۰	جدول ۲-۴ تابع توزیع تجمعی $Z \sim S(g)$ برای توزیع های مشخص شده.....
۶۰	جدول ۳-۴ مقادیر $\varpi_g(u) = \frac{g'(u)}{g(u)}$ و $\varpi'_g(u)$ برای کرنل های مشخص شده.....
۶۰	جدول ۴-۴ توزیع $U = Z^2$ در صورتی که $Z \sim S(g)$
۶۱	جدول ۵-۴ گشتاورهای اول $Z \sim S(g)$ برای توزیع های مشخص شده.....
۶۲	جدول ۶-۴ ضریب چولگی $Z \sim S(g)$ برای توزیع های مشخص شده.....
۶۹	جدول ۷-۴ چهار گشتاور اول توزیع $T \sim IGT(\mu, \lambda; g)$
۶۹	جدول ۸-۴ واریانس و ضریب تغییرات و ضرایب کشیدگی و چولگی توزیع $T \sim IGT(\mu, \lambda; g)$
۷۴	جدول ۹-۴ داده های مربوط به زنان باز نشسته که دارای معلولیت موقت بوده اند.....
۷۵	جدول ۱۰-۴ آمار توصیفی داده های مربوط به زنان باز نشسته که دارای معلولیت موقت بوده اند.....
۷۷	جدول ۱۱-۴ تغییرات نسبی در پارامترها و مدل های مشخص شده.....
۷۹	جدول ۱۲-۴ مقدار SIC و R^2 و D_n برای مدل های مشخص شد.....
۸۰	جدول ۱۳-۴ فاصله های اطمینان تقریبی μ, λ
۹۰	جدول ۱-۵ داده های مربوط به غلظت دی اکسید سولفور موجود در هوا.....
۹۱	جدول ۲-۵ داده های مربوط به ارتفاع جنین موش ها.....
۹۱	جدول ۳-۵ داده های مربوط به زمان تعمیر فرستنده و گیرنده.....
۹۳	جدول ۴-۵ آمار توصیفی چهار مجموعه داده.....

فهرست نمودارها

صفحه	عنوان
۵.....	شکل ۱-۱ منحنی چگالی احتمال توزیع گوسی وارون برای $\lambda = 1$ و مقدار μ
۵.....	شکل ۲-۱ منحنی چگالی احتمال توزیع گوسی وارون برای $\mu = 1$ و مقدار λ
۶۲	شکل ۴-۱ نمودار ضریب کشیدگی برای توزیع‌های متقارن.....
۶۳	شکل ۴-۲ نمودارهای منحنی چگالی گوسی نوع وارون $\mu = 1, \lambda = 4$ برای هسته‌های مشخص شده.....
۷۵	شکل ۴-۳ نمودارهای بافت نگارو جعبه‌ای.....
۷۶	شکل ۴-۴ لگاریتم تابع درست‌نمایی مدل گوسی وارون نوع با هسته t -استیودنت در برابر پارام.....
۷۷.....	شکل ۴-۵ تأثیر موضعی برای مدل‌های مشخص شده.....
۷۸.....	شکل ۴-۶ نمودار $q-q$ برای مدل‌های مشخص شده.....
۸۵	شکل ۵-۱ نمودارهای منحنی چگالی تبدیل‌های $T(X)$ به طوری که $X \sim MIG(\mu, \lambda, p)$
۹۲.....	شکل ۵-۲ نمودار بافت نگار چهار مجموعه داده مشخص شده.....
۹۳.....	شکل ۵-۳ نمودار $\beta_1 - \beta_3$ و $\gamma_3 - \gamma$ برای توزیع‌های مشخص شده.....
۹۴.....	شکل ۵-۴ نمودار از نمودار $p-p$ چهار مجموعه داده مشخص شده.....

فصل اول

معرفی توزیع گوسی وارون

شرحی بر موضوع

خانواده گوسی وارون^۱ (IG) از توزیع‌های نامتقارنی تشکیل شده است که به طور گسترده برای مدل‌سازی و تحلیل داده‌های نامنفی چوله مورد استفاده قرار می‌گیرد. این توزیع‌ها به ویژه به عنوان مدلی برای طول عمر خرابی و بررسی قابلیت اعتماد یک فرآورده صنعتی و همچنین برای توصیف فراوانی سرعت باد جهت ارزیابی انرژی باد مورد استفاده قرار می‌گیرند. توزیع گوسی وارون توسط شرو دینگر^۲ (۱۹۱۵) به دلیل خواص مهم فیزیکی آن تحت عنوان توزیع زمان اولین گذر در حرکت براونی مطرح گردید. وی مشاهده نمود که اگر $X(t)$ یک حرکت براونی با $X(0) = 0$ و رانش مثبت δ و ثابت انتشار β^2 باشد، آنگاه زمان اولین گذر از موقعیت

مکانی $a > 0$ دارای توزیع گوسی وارون با پارامترهای $\lambda = \frac{a^2}{\beta^2}$, $\mu = \frac{a}{\mu}$ است.

^۱ Inverse Gaussian

^۲ Schrodinger

در مقاله ای مروری فولکز و چیکارا^۱ (۱۹۸۷) شباهت‌های قابل توجه بین خانواده‌های گوسی وارون و خانواده گوسی اشاره کرده‌اند. یورگنسن^۲ (۱۹۹۰) تابع توزیع گوسی وارون تعمیم یافته را معرفی نمود و خواص آن را بیان کرد. مطالعه ای گسترده درباره پیدایش و خواص نظری توزیع IG توسط سشادری^۳ (۱۹۹۹) صورت گرفت. مادولکاروناتارجان^۴ (۲۰۰۲) خصوصیات این توزیع از جمله تقارن، چولگی و کشیدگی را بررسی کردند. آنها همچنین نتایج جذابی در مورد این توزیع و خصوصیات آن به دست آوردند. به عنوان مثال نشان دادند که توزیع گوسی وارون متعلق به خانواده نمایی است و در صورتی که داده‌ها نامنفی و چولگی مثبت باشند به عنوان جایگزینی برای توزیع نرمال استفاده می‌شود. توزیع گوسی وارون چند متغیره توسط مینامی^۵ (۲۰۰۴) معرفی شد او در سال ۲۰۰۷ نشان داد که توزیع لاگرانژ چند متغیره به توزیع گوسی وارون چند متغیره میل می‌کند. مادولکارو وانگ^۶ (۲۰۰۷) روابط بین R متقارن با توزیع گوسی وارون متقارن را بیان کردند. همچنین درباره توزیع $\frac{1}{\sqrt{X}}$ هنگامی که X دارای توزیع گوسی وارون است مطالعه کردند. سانهازا^۷ و همکاران (۲۰۰۸) قانون‌های بیضی شکل را که خانواده ای از مدل‌های احتمال متقارن رادر برمی‌گیرد، مورد مطالعه قرار دادند. این خانواده، توزیع‌های با دم‌های سبک و سنگین را در بر دارد. این مدل‌ها ممکن است بر داده‌های حتی با دارای نقاط پرت به خوبی برازش داده شوند. آرنولد^۸ و سشادری (۲۰۰۹) خصوصیات دیگری از این توزیع را بیان کردند. بالاکیروشنان^۹ و همکاران (۲۰۰۹) به معرفی توزیع گوسی وارون آمیخته و تبدیل‌ها و گشتاورهای آن پرداختند و یک روش جدید برای محاسبه گشتاورهای توزیع معرفی کردند و از گشتاورهای توزیع برای انتخاب مدل مناسب استفاده نمودند.

یکی از کاربردهای مهم این توزیع در مسئله تحلیل داده‌های چوله است. در تحلیل داده‌ها، در بسیاری از موارد داده‌ها متقارن نبوده و دارای چولگی هستند. ولی با این وجود برای تحلیل آن‌ها از توزیع نرمال استفاده شود. اگرچه توزیع‌های چوله‌ای چون گاما، لگ‌نرمال و وایبل دامنه کاربردی وسیع خود را دارند، ولی وسعت کاربردی هیچ‌کدام از آن‌ها به اندازه توزیع نرمال نیست. به وسیله توزیع نرمال است که می‌توان برای داده‌ها تحلیل واریانس انجام داد، فاصله اطمینان ساخت، معادله رگرسیون برازاند.

¹ Folks & Chhikara

² Jorgensen,

³ Seshadri

⁴ Mudholkar & Natarajan

⁵ Minami

⁶ Mudholkar & Wang

⁷ Sanhueza

⁸ Arnold

⁹ Balakrishnan

هنگام مواجه شدن با داده‌های نامتقارن معمولاً سعی بر این است که با نوعی تبدیل، داده‌ها را به شکل متقارن در آورند. برای مثال از تبدیل کاکس-باکس برای رفع چولگی داده‌ها استفاده می‌شود. اگرچه این کار ممکن است درست باشد، مثلاً در طرح آزمایش‌ها و آزمون متغیر پاسخ بهتر از متغیر پاسخ عمل کند. اما این مشکل باقی می‌ماند که تحلیل انجام شده بر اساس داده‌های تبدیل یافته است و نتایج بر حسب متغیر جدید ناشی از تبدیل به دست می‌آید نه متغیر اصلی پاسخ، که مطلوب نیست. برای حل این مشکل بهتر است در تحلیل داده‌های چوله از توزیع‌های چوله استفاده نماییم.

۲-۱. فرایند وینر^۱

یکی از مهم‌ترین فرایندهای تصادفی در احتمال کاربردی، فرایند وینر است که به صورت توصیفی از حرکت براونی در فیزیک سرچشمه گرفته است. این پدیده که در سال ۱۸۲۸ توسط رابرت براون^۲ گیاه شناس انگلیسی کشف شد، عبارتست از حرکت ذرات کوچکی که در مایع یا گاز غوطه‌ور هستند. اولین تعریف این فرایند تصادفی که حرکت براونی را نیز دربرمی‌گیرد توسط وینر^۳ در سال ۱۹۱۸ بیان شده است. تعریف فرایند وینر یا به طور ساده فرایند حرکت براونی به صورت زیر است:

تعریف ۱-۱ فرایند تصادفی $\{X(t); t \geq 0\}$ با خواص زیر را یک فرایند وینر با رانش^۴ V و واریانس σ^2 گویند.

۱. فرایند $X(t)$ دارای نمو‌های مستقل باشد یعنی برای هر $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ متغیرهای $X(t_2) - X(t_1)$ و $X(t_4) - X(t_3)$ مستقل باشند.

۲. $X(t_2) - X(t_1)$ دارای توزیع نرمال با میانگین $V(t_2 - t_1)$ و واریانس $\sigma^2(t_2 - t_1)$ باشد.

۳-۱. توزیع گوسی وارون

اگر متغیر تصادفی پیوسته و مثبت X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x; \mu, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda(x - \mu)^2}{2\mu^2 x} \right), \quad x > 0, \lambda > 0, \mu > 0 \quad (1-1)$$

¹ Wiener Process

² Robert Brown

³ Wiener

⁴ Drift

آنگاه X دارای توزیع گوسی وارون است که منسوب به تویدی^۱ می باشد. پارامتر μ میانگین توزیع و λ پارامتر مقیاس است.

تویدی با تعریف η و α به صورت $\eta = \frac{\lambda}{\mu}$ و $\alpha = \frac{1}{2\mu^2}$ ، سه شکل دیگر برای چگالی $f(x; \mu, \lambda)$ به صورت

زیر عنوان نمود

$$f_1(x; \alpha, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\alpha\lambda x + \lambda(2\alpha)^{\frac{1}{2}} - \frac{\lambda}{2x}\right\}, \quad x > 0, \lambda > 0, \alpha > 0 \quad (۲-۱)$$

$$f_2(x; \mu, \eta) = \left(\frac{\mu\eta}{2\pi x^3}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\eta x}{2x} + \eta - \frac{\mu\eta}{2x}\right), \quad x > 0, \mu > 0, \eta > 0 \quad (۳-۱)$$

$$f_3(x; \eta, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\eta^2 x}{2\lambda} + \eta - \frac{\lambda}{2x}\right), \quad x > 0, \lambda > 0, \eta > 0 \quad (۴-۱)$$

با قرار دادن $\mu = 1$ در چگالی (۱-۱) شکل استاندارد توزیع حاصل می شود که در واقع شکل حدی توزیع حجم نمونه در یک آزمون دنباله ای نسبت احتمال می باشد که توسط والد^۲ به دست آمده است. از این رو گاهی اوقات این توزیع به عنوان توزیع والد استاندارد خوانده می شود. رابطه بین صورت مختلف تابع چگالی به صورت زیر است:

$$f(x; \mu, \lambda) = \mu^{-1} f_2\left(\frac{x}{\mu}; 1, \eta\right) = \lambda^{-1} f_3\left(\frac{x}{\lambda}, \eta, 1\right) \quad (۵-۱)$$

ضرایب چولگی و کشیدگی به ترتیب برابر $\frac{15}{\eta}$ و $\frac{3}{\sqrt{\eta}}$ هستند که فقط به پارامتر η بستگی دارند. بدین لحاظ به

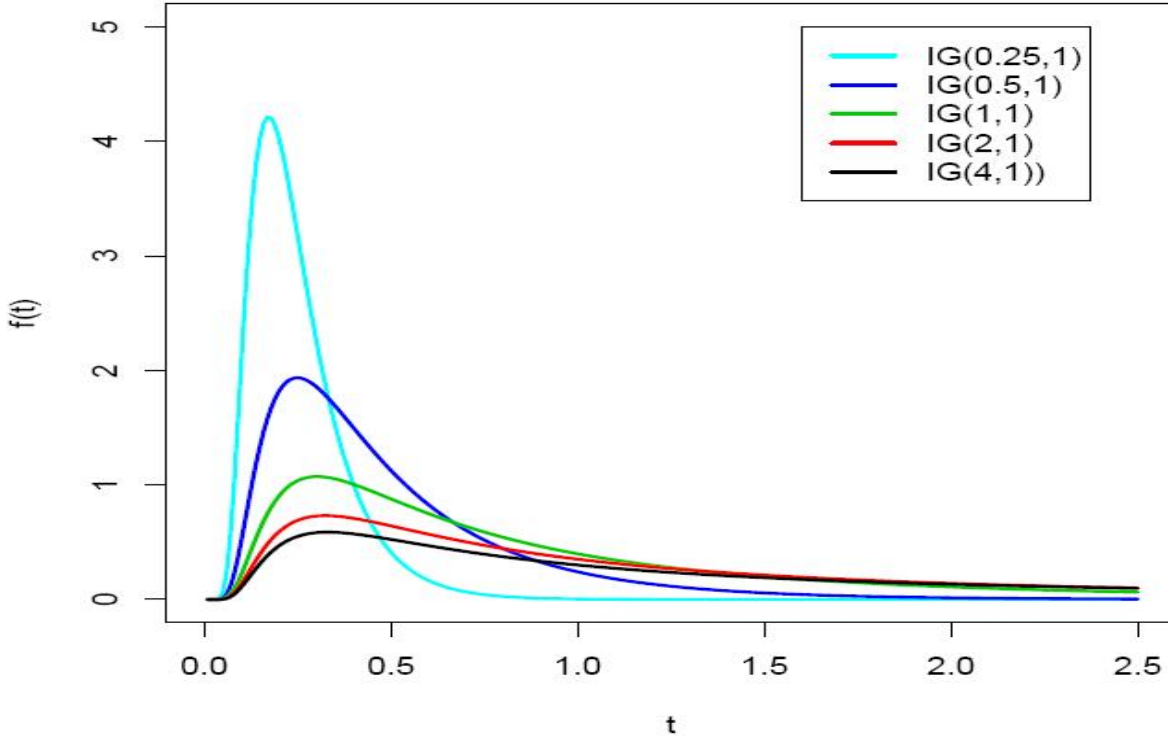
η پارامتر شکل توزیع نیز می گویند. برای مقادیر کوچک η چولگی تابع زیاد است و با افزایش η توزیع گوسی وارون به سمت نرمال میل می کند. تابع چگالی احتمال گوسی وارون تک مدی و چولگی آن مثبت است و بنابراین منحنی چگالی آن کشیده به راست می باشد. اشکال ۱-۱ و ۱-۲ منحنی های نمایش تابع چگالی احتمال توزیع گوسی وارون برای $\mu = 1$ و مقادیر مختلف λ و برای $\lambda = 1$ و مقادیر مختلف μ را نشان می دهد. می توان نشان داد که مد یا نمای توزیع گوسی وارون به صورت زیر است:

$$x_{\text{mod}} = \mu \left[1 + \left(1 + \frac{9}{4\eta^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2\eta} \right] \quad (۶-۱)$$

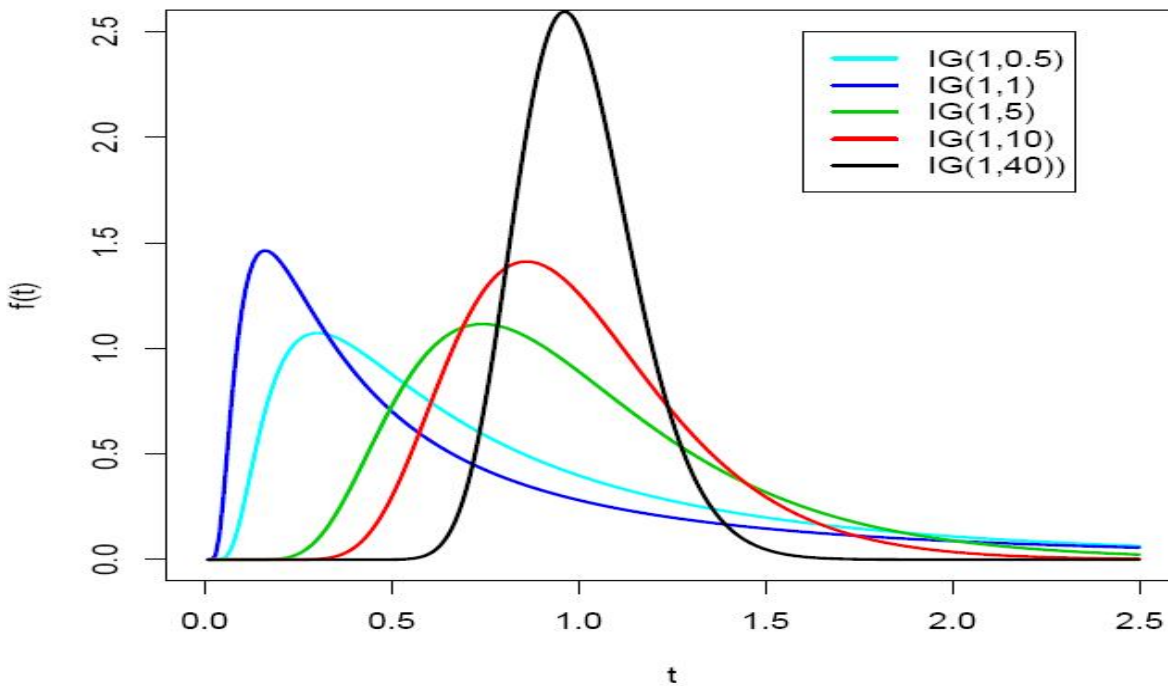
^۱ Tweedie

^۲ Wald

در این پایان نامه، از این به بعد چگالی ۱-۱ به عنوان شکل متداول توزیع گوسی وارون با پارامترهای μ و λ و با نماد $IG(\mu, \lambda)$ مورد استفاده قرار می گیرد.



شکل (۱-۱) منحنی چگالی احتمال توزیع گوسی وارون برای $\lambda = 1$ و μ مقدار ۵



شکل (۲-۱) منحنی چگالی احتمال توزیع گوسی وارون برای $\mu = 1$ و λ مقدار ۵

۴-۱. تابع مولد گشتاور و تابع مشخصه توزیع گوسی وارون

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع گوسی وارون با پارامترهای μ و λ باشد، در این صورت

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x; \mu, \lambda) dx = e^{\frac{\lambda}{\mu}t} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\lambda}{2\pi x^3} \right\}^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{\lambda(x^2 + \mu^2) - 2\mu^2 x^2 t}{2\mu^2 x} \right\} dx$$

حال می‌توان نوشت

$$-\frac{\lambda(x^2 + \mu^2) - 2\mu^2 x^2 t}{2\mu^2 x} = \frac{-\lambda \left(\sqrt{1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda}} x - \mu \right)^2}{2\mu^2 x} - \frac{\lambda}{\mu} \sqrt{1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda}} = \frac{-\lambda(x - \mu')^2}{2\mu'^2 x} - \frac{\lambda}{\mu} \sqrt{1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda}}$$

که در آن $\mu' = \frac{\mu}{\left(1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}}$ است. با جایگذاری رابطه اخیر در انتگرال نمایش $M_X(t)$ داریم:

$$M_X(t) = \exp\left\{ \frac{\lambda}{\mu}t \right\} \exp\left\{ \frac{-\lambda}{\mu} \sqrt{1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda}} \right\} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left\{ \frac{-\lambda(x - \mu')^2}{2\mu'^2 x} \right\} dx$$

تابع زیر انتگرال بالا تابع چگالی احتمال یک توزیع گوسی وارون با پارامترهای μ' و λ است. بنابراین مقدار

انتگرال برابر یک و در نتیجه تابع مولد گشتاور توزیع گوسی وارون به صورت زیر می‌باشد

$$M_X(t) = \exp\left\{ \frac{\lambda}{\mu} \left[1 - \left(1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}, \quad t < \frac{\lambda}{2\mu^2} \tag{۷-۱}$$

به طریق مشابه می‌توان نشان داد که تابع مشخصه یک توزیع گوسی وارون با پارامترهای μ و λ به صورت

زیر می‌باشد.

$$C_X(t) = \exp\left\{ \frac{\lambda}{\mu} \left[1 - \left(1 - \frac{2i\mu^2 t}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}, \quad t \in R \tag{۸-۱}$$

با قرار دادن $t = 0$ در مشتق مرتبه r -ام تابع مولد گشتاور $M_X(t)$ گشتاور حول مبدأ مرتبه r -ام طبق

رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$E(X^r) = \mu^r \sum_{s=0}^{r-1} \frac{(r-1+s)!}{s!(r-1-s)!} \left(\frac{2\lambda}{\mu} \right)^{-s} \tag{۹-۱}$$

پس به ازای $r = 1$ و $r = 2$ داریم:

$$E(X) = \mu \quad E(X^2) = \frac{\mu^3}{\lambda} + \mu^2 \Rightarrow \text{Var}(X) = \frac{\mu^3}{\lambda}$$

با قرار دادن $\sigma = \frac{\mu^3}{\lambda}$ ، چگالی (۱-۱) را می توان بر حسب پارامترهای میانگین μ و σ انحراف معیار توزیع به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$f(x; \mu, \lambda) = \frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{\mu}{2\pi x^3} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\mu(x-\mu)^2}{2\sigma^2 x} \right), \quad x > 0, \sigma > 0, \mu > 0 \quad (10-1)$$

۵-۱. متغیرهای تصادفی وارون و علت نام گذاری توزیع

اگر $M_X(t)$ نشان دهنده تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X باشد. تابع مولد انباشتگی^۱ متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می شود:

$$\psi(t) = \log M_X(t) = \log E[e^{tX}] \quad (11-1)$$

حال اگر $L_X(t)$ نشان دهنده لگاریتم تبدیل لاپلاس متغیر تصادفی نامنفی X باشد. بنابراین می توان نوشت:

$$L_X(t) = \log E[e^{-tx}] = \psi(-t) \quad t > 0 \quad (12-1)$$

در سال ۱۹۴۵ توییدی ارتباطی وارون بین تابع مولد انباشتگی جفت‌هایی از متغیرهای تصادفی دو جمله ای و دو جمله ای منفی، پواسن و گاما، و نرمال و گوسی وارون ارائه نمود.

در این جا ابتدا در حالت کلی متغیرهای تصادفی وارون را معرفی می شوند. سپس این ارتباط وارون در مورد جفت متغیرهای تصادفی که دارای این خاصیت هستند مورد بررسی قرار گیرند.

تعریف ۱-۲ متغیرهای تصادفی X و Y وارون یکدیگرند اگر و تنها اگر $L_X(t)$ و $L_Y(t)$ به ازای جمیع مقادیر t در دامنه مشترک در شرایط زیر صدق کنند.

$$i) L_X(t) = \alpha L(t) \quad ii) L_Y(t) = \beta L^{-1}(t) \quad (13-1)$$

که در آن α و β مقادیری ثابت اند و $L^{-1}(t)$ وارون تابع $L(t)$ می باشد یعنی:

$$L(L^{-1}(t)) = t$$

توزیع های متناظر با متغیرهای تصادفی وارون را توزیع های وارون می گویند.

¹ Cumulant Generating Function

مثال ۱-۱: اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in R, \mu > 0, \sigma > 0$$

آن گاه:

$$E[e^{tx}] = \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\} \Rightarrow L_X(t) = \mu \left(\frac{\sigma^2 t^2}{2\mu} - t\right), \quad t > 0$$

با فرض $\alpha = \mu$ و $L(t) = \frac{\sigma^2 t^2}{2\mu} - t$ به راحتی می توان ملاحظه نمود که:

$$L^{-1}(t) = \frac{\mu}{\sigma^2} \left[1 - \left(1 + \frac{2\sigma^2}{\mu} t \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad t < \frac{\mu}{2\sigma^2}$$

با قرار دادن $\lambda = \frac{\mu^3}{\sigma^2}$ داریم:

$$L^{-1}(t) = \frac{\lambda}{\mu^2} \left[1 - \left(1 + \frac{2\mu^2}{\lambda} t \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad t < \frac{\lambda}{2\mu^2}$$

حال اگر متغیر تصادفی Y دارای تابع چگالی احتمال ۱-۱ یعنی دارای توزیع گوسی وارون باشد. آن گاه:

$$L_Y(t) = \frac{\lambda}{\mu} \left[1 - \left(1 + \frac{2\mu^2}{\lambda} t \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \mu L^{-1}(t), \quad t < \frac{\lambda}{2\mu^2}$$

با فرض $\beta = \mu$ به ازای جمع مقادیر $t < \frac{\lambda}{2\mu^2}$ روابط (۹-۱) در مورد متغیرهای تصادفی X و Y حفظ می شود یعنی متغیر تصادفی Y وارون متغیر تصادفی نرمال (گوسی) است.

با وجود چنین ارتباطی بین توابع $L_X(t)$ و $L_Y(t)$ ، تویدی نام گوسی وارون را برای متغیر تصادفی Y پیشنهاد نمود.