دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

براي دریافت درجه‌ی کارشناسی‌ارشد

رشته‌ی رياضي کاربردی

عنوان:

وجود و تقریب L^p وراه حل های پیوسته از معادلات انتگرال غیر خطی از نوع هامرشتاین و ولترا

استاد راهنما:

دکتر علی خانی

استاد مشاور:

پروفسور شهرام رضاپور

پژوهشگر:

سید بهزاد حسینی

آذر/۱۳۹۳

تبریز/ ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

چشمه های جوشان محبت

جلوه های مهر و عطوفت الهی

لبخندهای پر مهر زندگیم

پدر و مادر عزیزم

که در تمام مراحل زندگی، به من راه و رسم درست زیستن را آموختند.

// سپاس گزاری

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم، تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست و آموخت که در لحظه‌های اندوهم صبور باشم که همه‌ی غم‌ها رفتنی است و سربلند کسی است که مطیع تقدیر و حکمت الهی باشد.

اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه‌ی حاضر، آماده شده است برخود واجب می‌دانم از حمایت‌های بی‌دریغ، بذل توجه و مساعدت‌های استاد راهنمایم جناب آقای دکتر **علی خانی** سپاس‌گزاری نمایم.

از جناب آقای پروفسور شهرام رضاپور، که مشاوره و مطالعه این پایان نامه را به عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم..

هم‌چنین از جناب آقای دکتر رنجبر که داوری این پایانامه را برعهده گرفته‌اند کمال تشکر را دارم.

و بوسه می‌زنم بر دستان مادر و پدر عزیزم که توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری‌هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم. هم‌چنین تشکر می‌کنم از برادران و خواهران عزیزم، به پاس کمک‌های بی‌دریغ و دلگرمی‌های بی‌پایان‌شان، که بهترین پشتیبان من بودند. همچنین از همه دوستانم به پاس محبت‌شان که مایه دلگرمی من بود سپاسگزارم. از هم‌اتاقی‌های عزیزم آقای راشد صلواتی و مهران قادری که با محبت و عشق پاک خود تحمل غربت را بر من سهل نمودند سپاسگزارم. در پایان از دو دوست عزیز و مهربانم واحد محمدی و عرفان کریمی تشکر می‌کنم اما نمی‌دانم کدامین جمله را برای توصیف محبت‌هایتان بنویسم، نمی‌دانم چگونه شما را توصیف کنم، دوستانی از جنس بلور، آسمانی و مهربان، چقدر زیبا واژه‌ها را آسمانی می‌کنید.

سید بهزاد حسینی

آذر ۱۳۹۳

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه، بازه‌ی فشرده‌ی $[a, b]$ را در نظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم عدد حقیقی مثبت $p \geq ۱$ باشد و نتایج وجودی متفاوت برای $L^p([a, b])$ و جواب‌های $C([a, b])$ برای برخی معادلات انتگرالی ولترا و هامرشتاین ارائه داده‌ایم. برای وجودی جواب ما به قضیه نقطه ثابت شفر و شولدر و هم‌چنین حالت کلی نامساوی گرنوال نیاز داریم. به‌علاوه، یک روش عددی برای تقریب جواب‌های معادلات انتگرالی ولترا و هامرشتاین ارائه داده‌ایم. در پایان، چند مثال عددی آورده‌ایم.

واژه های کلیدی: نتایج وجودی برای معادلات انتگرال، معادله انتگرال هامرشتاین، معادله انتگرال ولترا، قضیه‌ی نقطه ثابت شولدر، جواب‌های عددی برای معادلات انتگرالی غیرخطی ولترا

پیشگفتار

بسیاری از پدیده‌ها در جهان ما اساساً غیرخطی هستند، و توسط معادلات غیرخطی بیان شده‌اند. از آنجا که ظهور کامپیوترهای رقمی با عملکرد بالا، حل مسایل خطی را آسان‌تر می‌کند. با این حال، به‌طور کلی به‌دست آوردن جوابهای دقیق از مسایل غیرخطی دشوار است. روش عددی، به‌طور کلی محاسبه پیچیده مسایل غیرخطی را اداره می‌کند. با این حال، دادن نقاط به یک منحنی و به‌دست آوردن منحنی کامل که اغلب پرهزینه و وقت گیر است. علاوه بر این درک کامل و ضروری از مسایل غیرخطی مشکل است. روش‌های عددی و تحلیلی، دارای مزایا و محدودیت‌هایی است. به طور کلی روش‌های تحلیلی برای مسایل غیرخطی، مانند اختلال وجود دارد و با استفاده از روش‌های اختلال، بسیاری از خواص و پدیده‌های جالب و مهم از مسایل غیرخطی حل می‌شوند. روش‌های اختلال نقش مهمی در توسعه علوم و مهندسی دارد. این روش به دلیل سادگی در اجرا و دقت بالا، مورد توجه محققان ریاضی، فیزیک و علوم مهندسی در سرتاسر جهان قرار گرفته است. روش L^p و کاربرد آن درحل مسایل غیرخطی است.

روش L^p برای حل معادله غیرخطی پاره ای انتشار گاز در محیط متخلخل استفاده شده است که روابط جریان گاز حقیقی که در آنها خواص گاز به صورت تابعی ضمنی از دما، فشار و ترکیب بیان می‌شوند، همواره مورد بحث بوده‌اند. چرا که معادله انتشار جریان گاز غیرخطی می‌باشد. روش‌های مختلفی برای حل تقریبی معادله انتشار گاز حقیقی وجود دارد اما همه آنها دارای محدودیت‌هایی هستند، مثلاً برخی تنها در دامنه خاصی از فشار، جواب می‌دهند و برخی در فضای غیرحقیقی (لاپلاس) می‌باشند. روش L^p جواب‌هایی با دقت بالا در فضای حقیقی ارائه داده و نسبت به روش‌های موجود ساده‌تر می‌باشد. همچنین می‌توان از این روش در تحلیل داده‌های تولید و چاه آزمایی استفاده نمود و خواص مهم مخزن را نظیرتر سازند، ضریب پیوسته و...تخمین زد.

اولین بار در سال۱۸۲۰ آبل در یکی از کارهایش با معادله انتگرال مواجه شد. البته نام تعداد زیادی از ریاضیدانان همچون کوشی-فردهلم-ولترا و دیگران به موضوع وابسته است. معادلات انتگرال شاخه ای از ریاضیات است که کاربردهای زیادی در فیزیک و علوم مهندسی دارد.

شبیه سازی ریاضی از پدیده‌های فیزیک و مهندسی به یک معادله انتگرال یا یک معادله انتگرال - دیفرانسیل منجر می‌شود. ریاضیدان مشهور ایتالیایی به‌نام ولترا [۱] درحدود سال‌های ۱۹۰۳ – ۱۹۰۰ روی معادلات انتگرال کار کرد و هم زمان ریاضیدان مشهور سوئدی دیریکله [۲] ارائه کرد که منجر به معادله انتگرال گردید. از آن زمان به بعد تا عصر حاضر، با توجه به تنوع مسایل موجود و پیچیده تر شدن سیستمها و توانایی معادلات انتگرال برای بیان آنها، معادلات انتگرال موضوع تحقیقات ریاضیدانان زیادی بوده است، زیرا آنها به‌طور پیوسته به مسائل جدید و جالبی برخورد می‌کنند. از طرف دیگر با گسترش و پیشرفت سریع کامپیوتر و نیاز روز افزون به حل معادلات انتگرال، روش‌های عددی برای حل مسایل ریاضی کاربردی از جمله معادلات انتگرال مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفت.

مطالعه مستقیم انتگرال، جزء در موارد خاص، مشکل و یا عملاً غیرممکن است، بنابراین حل عددی این مسائل اهمیت خاصی دارد. در یک دوره ۲۰ ساله از ۱۹۸۰ – ۱۹۶۰ کارهای زیادی روی جواب‌های عددی معادلات انتگرال ولترا انجام شده است. قبل از ۱۹۶۰ تنها، فعالیت‌هایی پراکنده برای توسعه الگوریتم‌های عددی انجام شده بود. یک ایده سیستماتیک روی همه مسائل با کاری از پوزت [۳] در حدود سال ۱۹۶۰ شروع و تا سال ۱۹۸۰ بیشتر اهداف اصلی بدیهی شدند، البته هنوز موارد جالب در این زمینه فراوان است.

البته معادلات انتگرال به عنوان جواب معادلات دیفرانسیل هم به‌کار می‌روند به‌طوری که اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر به‌صورت یک مساله مقدار مرزی باشد، آنگاه معادله انتگرالی که ظاهر شود از نوع فردهلم خواهد شد و اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مساله مقدار اولیه باشد، آنگاه، معادله حاصل یک معادله انتگرال ولترا خواهد بود.

اما معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل دو بعدی نیز بیان ریاضی خیلی از پدیده‌های فیزیکی و مهندسی هستند، که از آن جمله به مسایل انتقال گرما، مسائل ارتعاش پیوسته اشاره کرد که در آن چاه یا چشمه حرارتی وابسته به زمان و مکان و نیز مقدار دما در هر نقطه و هر لحظه از زمان است و یا در مسئله ارتعاشات یک غشاء، جرم و نیروی اعمال شده روی آن می‌توان به‌صورت تجمعی بیان شده‌باشد. با این حال این گونه مطالعات کمتر مورد بررسی قرار گرفته اند.

کاربرد اساسی برای معادلات انتگرال:

متداولترین کاربرد معادلات انتگرال، تبدیل معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرال است، البته همیشه نمی‌توان این تبدیل را انجام داد. ولی عملگرهای انتگرالی تبدیل‌ها و معادلات انتگرال، ابزارهای مناسبی برای مطالعه معادلات دیفرانسیل هستند. به‌خصوص در مواردی که با حل عددی

[۱] Voletrra

[۲] p.g.l.Dirichlet

[۳] pouzet

یک مسئله مواجه هستیم، تبدیل معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرال به‌صرفه‌تر است، چون در آنالیز عددی خطای دیفرانسیل‌گیری به‌صورت صعودی افزایش می‌یابد، ولی با صرفه نظرکردن از جزیئات، خطای انتگرال گیری عددی به سمت یک مقدار مشخص میل خواهد کرد.

فصل ۱

قضایا وتعاریف مقدماتی

دراین فصل به بیان تعاریف وقضایایی که در فصل‌های بعدی به آنها نیاز می شود، می پردازیم.

۱.۱ معادلات انتگرال

تعریف ۱.۱. هر معادله‌ای را که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال قرار داشته باشد، معادله انتگرال گویند. یا به عبارتی دیگر هر معادله به شکل

$$h(s)x(s)-\lambda\int_{\alpha(s)}^{\beta(s)}F(s,t,x(t))dt=y(s)$$

را یک معادله انتگرال گویند که در این معادله λ عددی معلوم $y(s),\beta(s),\alpha(s)$ و F توابعی معلوم هستند و $x(s)$ تابع مجهول می‌باشد.

منظور از حل معادله فوق پیدا کردن تابع مجهول $x(s)$ است که در معادله صدق کند. در معادله انتگرال فوق اگر $h(s)=۰$ باشد، در اینصورت، معادله را معادله انتگرال نوع اول و در صورتی که $h(s)\neq ۰$، معادله را معادله انتگرال از نوع دوم گویند.

معادلات انتگرال در مسائلی از مباحث فیزیک، زیست شناسی، شیمی و مهندسی ظاهر می‌شوند. به نظر بوچر نام معادله انتگرال توسط بویس-ریموند در سال ۱۳۸۸ پیشنهاد شده‌است هر چند که اولین پیدایش معادله انتگرال توسط آبل به رسمیت شناخته شده‌است. آبل در رساله اش در سالهای ۱۸۲۳ تا ۱۸۲۶ مشغول بررسی معادلاتی نظیر

$$x(s)=\int_{a}^{\infty}(s-t)^{-\alpha}x(t)dt\qquad ۰<\alpha<۱$$

بود که در آن $x(s)$ یک تابع پیوسته است و در شرط $x(a)=\circ$ صدق می‌کند، همچنین عقیده‌ای وجود دارد که اولین پیدایش معادله انتگرال به کار لاپلاس در سال ۱۷۸۲ بر می‌گردد، که روی تبدیلات لاپلاس و معکوس آنها مطالعه می‌کرد. به عنوان مثال تبدیل لاپلاس تابع $x(s)$ بصورت

$$L[x(s)] = X(s) = \int_a^{\infty} e^{-st}x(t)dt \qquad s > \circ$$

است به شرط آنکه انتگرال فوق به ازای s>۰ همگرا باشد. به نظر می‌رسد که مطالعه معادله انتگرال اولین بار توسط لاپلاس شروع شده باشد.

در سال ۱۸۲۰ فوریه تبدیلات فوریه را مطرح کرد که پیدا کردن تبدیل معکوس فوریه به حل معادله انتگرال منجر شد. همچنین در سال ۱۸۲۶ پواسن در بررسی علم مغناطیس معادله

$$x(s) - \lambda \int_{\circ}^{s} k(s,t)x(t)dt = y(s)$$

را مورد بررسی قرار داد که در آن $x(s)$ تابع مجهول است.

در سال ۱۹۰۰ فردهلم معادله

$$x(s) = y(s) + \int_a^b k(s,t)x(t)dt$$

را مورد مطالعه قرار داد [۲۶].

۲.۱ دسته بندی معادلات انتگرال

معادلات انتگرال را می توان به دو صورت تقسیم بندی کرد، یکی از لحاظ نام‌گذاری و دیگری از روی تعریف معادلات انتگرال صورت می گیرد.

۱.۲.۱ معادلات انتگرال فردهلم

معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم به شکل

$$x(s) - \lambda \int_a^b k(s,t)x(t)dt = y(s), \qquad s \in [a,b] \tag{۱.۱}$$

می باشد که در آن، a, b, λ اعداد معلوم، تابع $k(s,t)$ هسته معادله انتگرال و تابع $y(s)$ توابعی معلوم و $x(s)$ تابع مجهول می‌باشد. اگر

$$y(s) = \lambda \int_a^b k(s,t)x(t)dt \qquad s \in [a,b] \tag{۲.۱}$$

آنگاه معادله (۲.۱) را معادله انتگرال خطی نوع اول گویند.

معمولا جواب در این نوع معادلات به تابع $y(s)$ خیلی حساس است بدین معنی که تغییرات جزئی

در تابع $y(s)$ تغییرات زیاد در جواب می‌شود.
به عبارت دیگر این نوع مسائل بد وضع هستند که روش‌های خاصی را برای حل می‌طلبند[۳] .
هرگاه $y(s)=0$ آنگاه معادله انتگرال را معادله انتگرال همگن در غیر اینصورت آنرا معادله غیر همگن گویند.
معادله همگن را مساله مقدار مشخصه و $x(s)$ را تابع مشخصه عملگر انتگرال نیز می‌گویند[۳].
بایستی توجه کنیم که می‌توانیم مسائل مقدار مرزی را به معادله انتگرال فردهلم تبدیل کنیم.
به عنوان مثال مساله مقدار مرزی

$$\begin{cases} x''(s)+x(s)=s & 0<s<1 \\ x(0)=1\,,\ x(1)=0 \end{cases}$$

به معادله انتگرال فردهلم خطی ناهمگن نوع دوم به صورت

$$x(s)-\int_0^1 k(s,t)x(t)dt=2s-1$$

تبدیل می‌شود که در آن هسته $k(s,t)$ به شکل

$$k(s,t)=\begin{cases} t(1-s) & 0\le t\le s \\ s(1-t) & s\le t\le 1 \end{cases}$$

و همچنین مساله همگن با مقدار مرزی

$$\begin{cases} x''(s)-\lambda x(s)=0 & a<s<b \\ x(a)=1,\ x(b)=0 \end{cases}$$

به معادله انتگرال فردهلم خطی همگن نوع دوم

$$x(s)-\lambda\int_a^b k(s,t)x(t)dt=0$$

تبدیل می‌شود که هسته آن به صورت

$$k(s,t)=\begin{cases}\dfrac{(t-a)(s-b)}{b-a} & a\leq t\leq s\\ \\ \dfrac{(s-a)(t-b)}{b-a} & s\leq t\leq b\end{cases}$$

می‌باشد.[۲۶]

قضیه ۲.۱. (*متناوب فردهلم*) *هر گاه* $k(s,t)$ *در معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم در فضای تابعی* R *باشد و* $y(s)$ *در بازه* $[a,b]$ *پیوسته باشد و* $|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$ *که* M *کران بالای تابع* $K(s,t)$ *است. آنگاه معادله انتگرال فردهلم خطی جواب یکتا دارد که در* $[a,b]$ *پیوسته است.*

برهان. برای اثبات به [۳] رجوع شود.

□

هر معادله به شکل

$$x(s)-\lambda\int_a^b F(s,t,x(t))dt=y(s)\qquad s\in[a,b]$$

را معادله انتگرال فردهلم غیرخطی گویند که در آن $F(s,t,x(t)),y(s)$ توابعی معلوم و پیوسته هستند. با فرض

$$y(s)+\lambda\int_a^b F(s,t,x(t))dt=T(x(s))$$

می‌توان معادله فوق را به شکل $x(s)=T(x(s))$ نوشت که آن را شکل عملگری معادله انتگرال فردهلم غیرخطی گویند.

تعریف ۳.۱. تابع $F(s,t,x(t))$ نسبت به متغیر $x(t)$ در شرط لیپشیتس صدق می‌کند هرگاه عددی مثبت مانند L بنام ثابت لیپشیتس موجود باشد بطوریکه برای هر

$$(s,t_1,x(t_1)),(s,t_2,x(t_2))\in D_F$$

داشته باشیم

$$|F(s,t_1,x(t_1))-F(s,t_2,x(t_2))|\leq L|x(t_1)-x(t_2)|$$

که در آن

$$D_F = \{(s,t,x(t)) : s,t \in [a,b], x \in [c,d]\}$$

.

فرض کنید معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم بصورت زیر باشد

$$x(s) = y(s) + \lambda \int_a^b k(s,t)x(t)dt \qquad a \le s,t \le b \tag{۳.۱}$$

بطوریکه $k(s,t)$ و $y(s)$ توابع معلوم و پیوسته هستند که بترتیب روی $[a,b] \times [a,b]$ و $[a,b]$ تعریف شده اند.

به جای $x(s)$ در معادله (۳.۱) تابع $y(s)$ را در انتگرال قرار می‌دهیم. در این صورت مقدار تقریبی $x_1(s)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$x_1(s) = y(s) + \lambda \int_a^b k(s,t)y(t)dt \tag{۴.۱}$$

$$x_2(s) = y(s) + \lambda \int_a^b k(s,t)y(t)dt + \lambda^2 \int_a^b k(s,z) \int_a^b k(z,t)y(t)dzdt \tag{۵.۱}$$

اگر این روند را به صورت تکراری ادامه دهیم در مرحله nام داریم:

$$x_n(s) = y(s) + \lambda \int_a^b k(s,t)x_{n-1}(t)dt \tag{۶.۱}$$

با ساده کردن معادله فوق، همچنین تعریف هسته انتگرالی جدید در هر مرحله به رابطه

$$x_n(s) = y(s) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int_a^b k_m(s,t)y(t)dt \tag{۷.۱}$$

دست می‌یابیم که در آن $k_1(s,t) = k(s,t)$ $m \ge 2$ $k_m(s,t) = \int_a^b k(s,z)k_{m-1}(z,t)dz$.

(۷.۱) n به سمت بی‌نهایت میل کند، داریم:

$$x(s) = y(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b k_m(s,t)y(t)dt \tag{۸.۱}$$

که به رابطه فوق سری نیومن [1] گوییم.

در این‌صورت سری(۸.۱) برای $|\lambda|$ به اندازه کافی کوچک همگراست.

فرض کنید $y_i(s) \in L^2[a,b]$ یک تابع مربعی انتگرالی و حقیقی باشد، ضرب داخلی $y_i(s)$و $y_j(s)$ را

[1] Neumann series

به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(y_i(s), y_j(s)) = \int_a^b y_i(s) y_j(s) ds \tag{۹.۱}$$

بطوریکه نرم معادله فوق چنین می‌باشد.

$$||y_i(s)|| = \sqrt{(y_i(s), y_i(s))} = \int_a^b {y_i}^{۲}(s) ds$$

.

۲.۲.۱ معادله انتگرال ولترا

معادله انتگرال ولترا خطی به شکل

$$x(s) - \lambda \int_a^s k(s,t) x(t) dt = y(s) \qquad s \in [a,b] \tag{۱۰.۱}$$

می‌باشد. که در آن a, λ اعدادی معلوم هستند، تابع $k(s,t)$ بنام هسته معادله انتگرال و تابع $y(s)$ توابعی معلوم هستند. اگر

$$y(s) = \lambda \int_a^s k(s,t) x(t) dt \qquad s \in [a,b]$$

آنگاه معادله فوق را معادله انتگرال ولترای خطی نوع اول گویند.
هرگاه $y(s) = ۰$ معادله (۱۰.۱) را همگن، در غیر اینصورت آنرا غیرهمگن می‌گویند.

مسئله مقدار اولیه، به یک معادله انتگرال ولترا قابل تبدیل است.
به عنوان مثال مساله مقدار اولیه ناهمگن

$$\begin{cases} x''(s) + x(s) = cos(s) \\ \\ x(۰) = ۰,\ x'(۰) = ۱ \end{cases}$$

به معادله انتگرال ولترای خطی ناهمگن نوع دوم به شکل

$$x(s) + \int_۰^s (s-t) x(t) dt = cos(s) - s$$

تبدیل می‌شود.

به عنوان مثال دوم، مساله مقدار اولیه خطی

$$\begin{cases} x''(s) - sin(s)x'(s) + e^s x(s) = s \\ \\ x(۰) = ۱,\ x'(۰) = -۱ \end{cases}$$

به معادله انتگرال ولترای خطی ناهمگن نوع دوم به شکل

$$x(s) - \int_۰^s (sin(s) + (t-s)(e^t + cos(t)))x(t)dt = \frac{s^۳}{۶} - s$$

تبدیل می‌شود. با فرض اینکه همواره $k(s,t) \neq ۰$ و همچنین نسبت به s مشتقپذیر باشد معادله انتگرال ولترای خطی نوع اول

$$y(s) = \lambda \int_۰^s k(s,t)x(t)dt \qquad s \in [۰, b]$$

را می‌توان به معادله انتگرال ولترای خطی نوع دوم

$$x(s) - \int_۰^s h(s,t)x(t)dt = g(s) \qquad s \in [۰, b]$$

تبدیل نمود که در آن

$$h(s,t) = \frac{-۱}{k(s,s)} \frac{\partial k(s,t)}{\partial s} \quad , \qquad g(s) = \frac{۱}{\lambda k(s,s)} \frac{dy}{ds}$$

(ر.ك [۳]).

هر معادله انتگرال ولترا را می‌توان یک معادله انتگرال فردهلم در نظر گرفت که هسته آن بصورت

$$k(s,t) = \begin{cases} k(s,t) & a \leq t \leq s \\ \\ ۰ & s \leq t \leq b \end{cases}$$

است که در آن $k(s,t)$ موجود در ضابطه اول همان هسته معادله انتگرال ولترا می‌باشد.

معادله انتگرال ولترا غیر خطی بصورت

$$x(s) - \lambda \int_a^s F(s,t,x(t))dt = y(s) \qquad s \in [a, b] \tag{۱۱.۱}$$

است. در معادله (۱۱.۱) برای وجود و یکتای جواب آن کافی است تابع $y(s)$ در $[a,b]$ پیوسته و تابع $F(s,t,x(t))$ نسبت به هر سه متغیر $(s,t,x(t))$ در ناحیه

$$D=\{(s,t,x): a\leq s\leq b,\quad a\leq t\leq b,\quad c\leq x\leq d\}$$

پیوسته باشد. علاوه بر آن $F(s,t,x(t))$ نسبت به $x(s)$ در شرط لیبشیتس صدق کند[۲۶] .
معادلات انتگرال غیر خطی در حالت کلی جواب یکتا ندارند و حل تحلیلی آنها بسیار مشکل است.

۳.۱ معادلات انتگرال منفرد

تعریف ۴.۱. یک معادله انتگرال را منفرد نامند هر گاه حداقل یکی از دو کران انتگرال بینهایت باشد یا اینکه هسته آن کراندار نباشد.

انتگرال فوریه تابع $x(s)$ بصورت

$$F(x(s))=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda s}x(s)ds$$

تعریف می‌شود که یک انتگرال منفرد با دامنه انتگرال‌گیری نامتناهی است. حالتی از معادلات انتگرال منفرد با هسته بی‌کران بصورت

$$x(s)-\int_{a}^{s}\frac{g(s,t)}{(s-t)^{a}}x(t)dt=y(s)\qquad 0<a\leq 1 \tag{۱۲.۱}$$

هستند که در آن $g(s,t)$ تابعی کراندار است. برای معادلات انتگرال منفرد با هسته بی‌کران دو حالت را در نظر می‌گیریم که روش حل آنها کاملا متفاوت است. معادله (۱۲.۱) را معادله انتگرال منفرد از نوع ضعیف یا معادله انتگرال با هسته منفرد ضعیف گویند هرگاه $0<a<1$.
دسته دیگر معادله انتگرالات منفرد قوی است، هرگاه $a=1$. معادله (۱۲.۱) را معادله انتگرال منفرد با هسته کوشی هم می‌نامند[۲۶] .

معادله زیر

$$x(s)-\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{0}cos(s-t)x^{2}(t)dt=s$$

و همچنین معادله

$$x(s)-\frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty}(s-t)x(t)dt=1+s^{2}$$

مثالهای از معادلات انتگرال منفرد با هسته پیچشی $(k(s,t)=K(s-t))$ با حدود انتگرال گیری نامتناهی هستند.
معادله انتگرال ولترای نوع اول زیر

$$s^{۲}=\int_{\circ}^{s}\frac{۱}{\sqrt{s-t}}x(t)dt$$

و معادله

$$s=\int_{\circ}^{s}\frac{۱}{(s-t)^{a}}x(t)dt \qquad \circ<a<۱$$

و همچنین معادله انتگرال ولترای نوع دوم زیر

$$x(s)=۱+۲\sqrt{s}-\int_{\circ}^{s}\frac{۱}{\sqrt{s-t}}x(t)dt$$

از جمله مثالهایی از معادلات انتگرال منفرد هستند که علت منفرد بودن آنها نامتناهی بودن هسته در کران بالای انتگرال‌گیری است. معادلات انتگرال آبل در حالت کلی به شکل

$$y(s)=\int_{\circ}^{s}\frac{g(s,t)}{(s-t)^{a}}x(s)dt \qquad \circ<a<۱\ ,\ \ s\in[a,b]$$

هستند. این معادلات اولین بار توسط ریاضیدان نروژی بنام نیلز آبل در سال ۱۸۲۳ معرفی و مورد بررسی قرار گرفت.
آخرین معادله انتگرال در مثال فوق، معادله انتگرال آبل از نوع دوم و منفرد ضعیف است که این نوع معادلات در مسائلی نظیر انتقال گرما، رشد کریستالها و مکانیک سیالات ظاهر می‌شوند.

۴.۱ معادلات انتگرال -دیفرانسیل

تعریف ۵.۱. اگر در یک معادله انتگرال مشتقاتی از تابع مجهول نیز ظاهر شود، به این نوع معادله، معادله انتگرال-دیفرانسیل می‌گویند. به بیان دیگر: فرض کنید که $y(s)$ تابع مجهول باشد در این‌صورت

$$Dy(s) = f(s) + \int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} k(s,t)F(y(t))dt \qquad (۱۳.۱)$$

را معادله انتگرال -دیفرانسیل می‌نامند که α, β, f, k توابع معلوم هستند و D عملگر دیفرانسیل می‌باشد.

هرگاه عملگر D عملگر همانی باشد آنگاه معادله (۱۳.۱) به‌صورت

$$y(s) = f(s) + \int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} k(s,t)F(y(t))dt \qquad (۱۴.۱)$$

نوشته می‌شود که یک معادله انتگرال معمولی است.

ممکن است که مشتقات تابع مجهول نیز در زیر علامت انتگرال حضور داشته باشد یعنی به صورت:

$$y''(s) - \int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} k(s,t)F(y'(t))dt = f(s) \qquad (۱۵.۱)$$

باشد. معادله

$$y'''(s) + \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} sty'(t)dt = \sin s - s$$

یک معادله انتگرال-دیفرانسیل یک بعدی فردهلم است و

$$\frac{\partial^۲\phi(x,t)}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲\phi(x,t)}{\partial t^۲} - \phi(x,t) - \int_{-۱}^{۱}\int_{۰}^{۱}(xy+tz)\phi(y,z)dydz = g(x,t)$$

که در آن

$$g(x,t) = ۲e^x - \frac{۷}{۳}x - \frac{۵}{۳}t \qquad , \ x \in [۰,۱], t \in [-۱,۱]$$

یک معادله انتگرال-دیفرانسیل دو بعدی فردهلم است. معادله

$$y''(s) + \int_{۰}^{s} ty(t)dt = \frac{۱}{۲}s^۲ - s\cos hs$$

یک معادله انتگرال-دیفرانسیل یک بعدی ولترا و

$$\frac{\partial^۲\phi(x,t)}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲\phi(x,t)}{\partial t^۲} - \int_{۰}^{t}\int_{۰}^{x}(e^y+z)\phi(y,z)dydz = g(x,t)$$