به یاد پدر بزرگوارم و تقدیم به مادر عزیزم

که هر چه دارم از اوست

و تقدیم به برادرانم

که همواره مشوق و پشتیبانم هستند

تقدیر و سپاسگزاری

حمد و سپاس بیکران خداوند یکتا را که سرچشمه و الهام بخش علم و معرفت است. پژوهش حاضر در پرتو عنایت پروردگار و به لطف و همکاری و راهنمایی های اساتید بزرگوارم انجام گرفته است. از این رو لازم می دانم که مراتب امتنان و قدرشناسی خود را از عزیزان و سرورانی که یاورو مددکار این جانب در انجام این پژوهش بوده اند را به جای آورده و به دیده ی احترام از آنان یاد کنم.

از زحمات استاد ارجمندم جناب آقای دکتر عباس نجاتی به عنوان استاد راهنمای پایان نامه که هم در طول تحصیل دوره کارشناسی ارشد و هم در طی انجام پژوهش حاضر همواره مرا مورد لطف و محبت خویش قرارداده اند، نهایت تشکر و سپاسگزاری را دارم. همچنین از تلاشها و راهنمایی های ارزنده اساتید مشاورم جناب آقای دکتر محمد باقر مقیقی و جناب آقای دکتر محمد رضا مطلبی تشکر و قدردانی می نمایم. از خانواده عزیزم بخصوص برادرانم که در طول زندگی همواره یارو یاور و مشوق من بوده اند ، کمال سپاس و قدردانی را دارم. درنهایت از اعضای محترم هیئت داوری جناب آقای دکتر اصغر رنجبری و جناب آقای دکتر قاسم نریمانی نیز بخاطر داوری این پایان نامه و حضور در جلسه دفاعیه، تقدیر و تشکر می نمایم.

امید است پایان نامه حاضر مورد توجه علاقمندان و پژو هشگران واقع گردد.

سمیه هاشمی صنعتی

خرداد ۱۳۹۰

نام و نام خانوادگی: هاشمی صنعتی نام: سمیه
عنوان پایان نامه: برخی از ویژگیهای قاب های زیر فضاها حاصل از روشهای نظریه عملگرو دوگان آنها
استاد راهنما: دکتر عباس نجاتی اساتید مشاور: دکتر محمد باقر مقیمی و دکتر محمد رضا مطلبی
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته : ریاضی گرایش: آنالیز دانشگاه: محقق اردبیلی دانشکده : علوم تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۰ تعداد صفحه: ۶۳
کلید واژه: تصویر مورب، دوگان قاب ، عملگرهای فضای هیلبرت ، فضای هیلبرت ، قاب ها ، قاب های ترکیب ، قاب های زیر فضاها
چکیده: در این پایان نامه نتایج جدید دوگان قاب های ترکیب را در فضاهای هیلبرت ارایه می دهیم. همچنین رابطه ی بین عملگرها، پایه ی متعامد یکه زیر فضاها و قاب های ترکیب (که قاب های زیر فضاها نامیده می شود) برای یک فضای هیلبرت جدایی پذیر مطالعه می شود. فرض کنیم $\varepsilon=\{E_i\}_{i\in I}$ یک پایه ی متعامد یکه از زیرفضاهای فضای هیلبرت k بوده و $T\in L(K,H)$ پوشا باشد. با یافتن شرایط کافی، $\{T(E_i)\}_{i\in I}$ یک قاب ترکیب نسبت به دنباله ای از وزن ها خواهد بود و از این نتیجه برای توصیف ویژگی های قاب های ترکیب معادل و مطالعه ی فزونی این گونه قاب ها استفاده خواهیم کرد. مجموعه ی وزن های قابل قبول نظیر یک دنباله ی مولد از زیر فضاها مطالعه می شود و در خاتمه مثال هایی ارایه شده است.

فهرست مندرجات

مقدمه

مقدمه

مفهوم قاب در فضای هیلبرت به وسیله ی دافین [1] و شیفر [2] در سال ۱۹۵۲ برای مطالعه ی سری های فوریه ی غیرهارمونیک در[۲۱] معرفی شده است. در واقع دافین و شیفرکارهای گابور [3] در پردازش سیگنال را به صورت مجرد بیان کردند. چون به نظر نمی رسید ایده های دافین و شیفر خارج از زمینه ی سری های فوریه غیر هارمونیک کاربرد داشته باشد ، این نظریه بیش از ۳۰ سال راکد ماند، تا این که در سال ۱۹۸۰ یانگ [4][۴۰] در کتاب خود ، برخی از ویژگیهای اساسی را در باره ی قاب ها بیان کرد. دوباره قاب ها در مطالعه سری های فوریه غیرهارمونیک مورد استفاده قرار گرفتند. در سال ۱۹۸۶ با انتشار مقاله ی[۱۸] توسط دابیشیز [5] ، گراسمان [6]، می یر [7] ، نظریه ی قاب ها مورد توجه قرار گرفتند و محققین زیادی در شاخه های مختلف علوم و مهندسی شروع به مطالعه آنها نمودند.

علاقمندان برای آشنایی بیشتر با نظریه ی قاب ها، ویژگی ها و کاربردهای آن می توانند به مراجع[۱۶] و [۲۸] رجوع کنند.

قاب ها در فضاهای هیلبرت نقش اساسی در پردازش سیگنال دارد [۹]. قاب ها در پردازش تصویر، نظریه ی نمونه گیری، نظریه ی فیلتر بانک ها، ردیابی سیگنال، انتقال قوی اینترنت و بی سیم، برنامه نویسی، مخابرات و بینایی سنجی استفاده می شود (مراجع[۷]،[۸]،[۹]،[۱۱]،[۲۲]،[۲۷]و[۲٤] را ببینید).

Duffin[1]

Schaeffer[2]

Gabor[3]

Young[4]

Daubechies[5]

Grossmann[6]

Meyer[7]

قاب های ترکیب به عنوان تعمیمی از قاب ها در فضاهای هیلبرت در سال ۲۰۰۳ توسط کاسازا[۸] و کتیونیک[۹] در [۱۲] و فورناسر[۱۰][۲۳] معرفی شد (همچنین[۲٤] را ببینید).

قاب های ترکیبی در پردازش سیگنال، پردازش تصویر، پردازش مفروضات و نظریه ی نمونه گیری کاربرد دارند، در این پایان نامه به مطالعه ی قاب های ترکیبی می پردازیم و برخی نتایج شناخته شده در باره ی پایه ها و قاب ها را به قاب های ترکیب توسیع می دهیم.

این پایان نامه بر اساس مقاله های [۲۶] و [۳۸] در چند فصل تدوین شده است.

فصل اول شامل تعاریف و نتایج مقدماتی در باره ی زاویه ی بین زیر فضاهای بسته و مدول مینیمم تحول یافته از عملگرها و قاب های برداری است.

در فصل دوم نتایج اولیه قاب های ترکیب مرتبط با عملگرهای فضای هیلبرت را به دست می آوریم.

فصل سوم شامل دوگان قاب ها ترکیب است.

فصل چهارم مجموعه ی وزن های قابل قبول قاب های ترکیب را معرفی می کنیم.

فصل پنجم شامل نتایجی است که قاب های ترکیبی و تصویرهای مورب را شرح می دهد.

فصل ششم شامل تظریف دنباله زیر فضاها و برخی نتایج در باره ی فزونی قاب های ترکیب است.

در فصل هفتم مجموعه ای از مثال ها ارایه شده است.

Casazza[8]

Kutyniok[9]

For nasier[10]

فصل ۱

تعاریف و نمادها

در این فصل تعاریف و برخی خواص قاب‌ها را در فضای هیلبرت یادآوری می‌کنیم. همچنین نتایج مقدماتی در باره‌ی زاویه‌ی بین زیر فضاهای بسته و مدول مینیموم تحویل یافته از عملگرها و قاب‌های برداری را ارایه می‌دهیم.

در سراسر این پایان نامه $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ را فضاهای هیلبرت جدایی پذیر در نظر می‌گیریم.

فرض کنیم $L(\mathcal{H},\mathcal{K})$ فضای تبدیلات خطی کران دار از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{K}$ باشد(هرگاه $\mathcal{H}=\mathcal{K}$ باشد، $L(\mathcal{H},\mathcal{K})$ را با نماد $L(\mathcal{H})$ نشان می‌دهیم). $L(\mathcal{H})$ جبر تمام عملگرهای خطی کران دار روی $\mathcal{H}$ و $L(\mathcal{H})^+$ را فضای تبدیلات خطی کران دار مثبت روی $\mathcal{H}$ می‌نامیم. I یک مجموعه‌ی شمارش پذیر یا متناهی و $I_{\mathcal{H}}$ بیانگر عملگر همانی روی $\mathcal{H}$ خواهد بود. گروه عملگرهای وارون پذیر در $L(\mathcal{H})$ را با $Gl(\mathcal{H})$ نشان می‌دهیم و $Gl(\mathcal{H})^+$ بیانگر مجموعه‌ی عملگرهای مثبت وارون پذیر روی $\mathcal{H}$ است. برای یک عملگر A از $L(\mathcal{H},\mathcal{K})$، برد A را با $R(A)$، فضای پوچ A را با $N(A)$، الحاقی A را با A^* و نرم A را با $\|A\|$ نشان می‌دهیم. $M\sqsubseteq\mathcal{H}$ به این معنی است که M زیر فضای بسته‌ی $\mathcal{H}$ است. همچنین اگر $M,N\sqsubseteq\mathcal{H}$ باشد، تعریف می‌کنیم $M\ominus N:=M\cap(M\cap N)^\perp$. $\ell^\infty_+(I)$ فضای دنباله‌های کران دار $\{a_i\}_{i\in I}$ از اعداد مثبت است. فضاهای $\ell^۲(I)$ ، $\ell^\infty(I)$ و $G(I)^+$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\ell^۲(I)=\Big\{\{x_i\}_{i\in I}\subseteq\mathbb{C}\,;\sum_{i\in I}|x_i|^۲<\infty\Big\},\qquad \ell^\infty(I)=\Big\{\{x_i\}_{i\in I}\subseteq\mathbb{C}\,;\sup_{i\in I}|x_i|<\infty\Big\},$$

$$G(I)^+=\Big\{\{w_i\}_{i\in I}\in\ell^\infty_+(I):\inf_{i\in I}w_i>\circ\Big\}=\ell^\infty_+(I)\cap Gl(\ell^\infty(I)). \tag{۱.۱}$$

با در نظر گرفتن ضرب معمولی نقطه دار روی $\ell^\infty(I)$، فضای $\ell^\infty(I)$ یک جبر فون نیومن خواهد بود (به مثال ۲.۵.۱ از [۳۶] رجوع کنید).

تعریف ۱.۱. دنباله‌ی $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i\in I}$ از $\mathcal{H}$ را یک قاب برای $\mathcal{H}$ می‌نامیم اگر اعداد ثابت و مثبت A,B موجود باشند به طوری که برای هر $f\in\mathcal{H}$ داشته باشیم

$$A\|f\|^۲\leq\sum_{i\in I}|\langle f,f_i\rangle|^۲\leq B\|f\|^۲. \tag{۲.۱}$$

ثابت‌های A و B را کران‌های قاب گویند که این ثابت‌ها منحصر به فرد نیستند. کران بالای بهینه‌ی قاب، اینفیموم همه‌ی کران‌های بالای قاب و کران پایین بهینه‌ی قاب، سوپریموم همه‌ی کران‌های

پایین قاب است که به ترتیب با $B_{\mathcal{F}}$ و $A_{\mathcal{F}}$ نشان خواهیم داد. اگر $A = B$، قاب را قاب تنگ و اگر $A = B = ۱$، قاب را قاب پارسوال گوییم. قاب $\mathcal{F}$ دقیق است هرگاه با حذف هر عنصر دلخواه از $\mathcal{F}$، دنباله‌ی حاصل، قاب (برای $\mathcal{H}$) نباشد.

اگر سمت راست نابرابری (۲.۱) بر قرار باشد، $\mathcal{F}$ یک دنباله‌ی بسل با کران B نامیده می‌شود.
اگر $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد، عملگرهای ترکیب، تجزیه و عملگر قاب به صورت زیر تعریف می‌شود

(عملگر ترکیب) $\quad T_{\mathcal{F}} : \ell^۲(I) \longrightarrow \mathcal{H}, \quad T_{\mathcal{F}}(c_i) = \sum_{i\in I} c_i f_i$

(عملگرتجزیه) $\quad T^*_{\mathcal{F}} : \mathcal{H} \longrightarrow \ell^۲(I), \quad T^*_{\mathcal{F}} f = \{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I}$

(عملگر قاب) $\quad S_{\mathcal{F}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad S_{\mathcal{F}} f = T_{\mathcal{F}} T^*_{\mathcal{F}} f = \sum_{i\in I} \langle f, f_i\rangle f_i.$

عملگر $T^*_{\mathcal{F}}$ را مبدل قاب نیز می‌نامند.

لازم به ذکر است که می‌توان عملگرهای فوق را در حالتی که $\mathcal{F}$ دنباله‌ی بسل برای $\mathcal{H}$ باشد، تعریف کرد.

قضیه ۲.۱ ([?]، قضیه ۵.۴.۴) اگر $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه $A_{\mathcal{F}}.I_{\mathcal{H}} \leq S_{\mathcal{F}} \leq B_{\mathcal{F}}.I_{\mathcal{H}}$ و

$$A_{\mathcal{F}} = \|S^{-۱}\|^{-۱}, \quad B_{\mathcal{F}} = \|S\| = \|T\|^۲.$$

تعریف ۳.۱. دنباله‌ی $\{f_i\}_{i\in I}$ از $\mathcal{H}$ یک پایه‌ی ریس برای $\mathcal{H}$ است، اگر $\overline{\mathrm{span}}\{f_i\}_{i\in I} = \mathcal{H}$ و ثابت‌های $۰ < A \leq B < \infty$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر دنباله‌ی متناهی از اسکالرهای $c_۱, \ldots, c_n$ داشته باشیم

$$A \sum_{i=۱}^{n} |c_i|^۲ \leq \Big\| \sum_{i=۱}^{n} c_i f_i \Big\|^۲ \leq B \sum_{i=۱}^{n} |c_i|^۲.$$

قضیه‌ی زیر ارتباط بین قاب‌ها و پایه‌ها را بیان می‌کند.

قضیه ۴.۱ ([?]، قضیه ۶.۱.۱) فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

(i) $\mathcal{F}$ یک پایه‌ی ریس [1] برای $\mathcal{H}$ است؛

(ii) $\mathcal{F}$ یک قاب دقیق است؛

(iii) $\mathcal{F}$ مینیمال است؛ بدین معنی که برای هر $j \in N$ داشته باشیم $f_j \notin \overline{\text{span}}\{f_k\}_{k\neq j}$.

(iv) $\mathcal{F}$ یک دنباله‌ی متعامد است؛ بدین معنی که برای هر $i \neq j$ داریم $\langle f_i, f_j\rangle = 0$.

(v) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ متعامد هستند؛ بدین معنی که $\langle f_i, S^{-1}f_k\rangle = \delta_{ik}$.

(vi) $\mathcal{F}$ یک ω ـ مستقل است؛ بدین معنی که اگر سری $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ برای برخی ضرایب اسکالر $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ همگرا و برابر صفر باشد، در این صورت برای همه‌ی $k \in \mathbb{N}$ لزوماً $c_k = 0$ است.

(vii) اگر $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ و $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0$، آنگاه برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $c_k = 0$.

$(viii)$ $\mathcal{F}$ یک پایه است؛ بدین معنی که برای هر $f \in \mathcal{H}$ اسکالرهای منحصر به فرد $\{c_k(f)\}_{k=1}^{\infty}$ وجود دارد به طوری که $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) f_k$.

اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه $T_{\mathcal{F}}^*$ یک به یک است. به سادگی دیده می‌شود که $T_{\mathcal{F}}^*$ وارون پذیر است اگر و تنها اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک پایه‌ی ریس باشد.

اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه عملگر $S_{\mathcal{F}}$ وارون پذیر است و برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم

$$f = \sum_{i\in I}\langle f, S_{\mathcal{F}}^{-1} f_i\rangle f_i = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle S_{\mathcal{F}}^{-1} f_i.$$

اگر $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد، دنباله‌ی $\{\tilde{f}_i\}_{i\in I} = \{S_{\mathcal{F}}^{-1} f_i\}_{i\in I}$ نیز یک قاب برای $\mathcal{H}$ است که دوگان متعارف $\{f_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شود.

در حالت کلی دنباله‌ی بسل $\{g_i\}_{i\in I}$، دوگان متناوب قاب $\{f_i\}_{i\in I}$ نامیده می‌شود اگر برای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم $f = \sum_{i\in I}\langle f, g_i\rangle f_i$.

اگر θ_1 عملگر تجزیه‌ی $\{f_i\}_{i\in I}$ و θ_2 عملگر تجزیه‌ی $\{g_i\}_{i\in I}$ باشد، آنگاه $\{g_i\}_{i\in I}$ دوگان متناوب $\{f_i\}_{i\in I}$ است اگر و تنها اگر $\theta_1^*\theta_2 = I_{\mathcal{H}}$. در این صورت $\{g_i\}_{i\in I}$ نیز یک قاب برای $\mathcal{H}$ است چون

$$\|f\| = \|\theta_1^*\theta_2 f\| \leq \|\theta_1^*\|\|\theta_2(f)\|, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

[1] Riesz

واضح است که اگر $\{g_i\}_{i\in I}$ دوگان متناوب $\{f_i\}_{i\in I}$ باشد، آنگاه $\{f_i\}_{i\in I}$ نیز دوگان متناوب $\{g_i\}_{i\in I}$ است.

تعریف ۵.۱. فرض کنیم $\mathcal{H} \sqsubseteq \{W_i\}_{i\in I}$ و $\{w_i\}_{i\in I} \in \ell^\infty(I)$ دنباله‌ای از وزنها باشد $(w_i > 0)$. دنباله‌ی $W = (w_i, W_i)_{i\in I}$ یک قاب ترکیب (قاب زیر فضا) برای $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود اگر ثابت‌های $0 < A_W \leq B_W < \infty$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم

$$A_W\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} w_i^2 \|P_{W_i}f\|^2 \leq B_W\|f\|^2, \tag{۳.۱}$$

که در آن P_W تصویر متعامد نظیر زیر فضای بسته W از $\mathcal{H}$ است. ثابت‌های A_W و B_W کران‌های قاب ترکیب W نامیده می‌شود. در حالت $A_W = B_W$، W قاب تنگ و در حالت $A_W = B_W = 1$، W قاب پارسوال نامیده می‌شود.

اگر سمت راست نابرابری (۳.۱) بر قرار باشد، $(W_i, w_i)_{i\in I}$ یک دنباله‌ی ترکیب بسل با کران B_W نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۱. اگر $\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in I} W_i$، در این صورت $\{W_i\}_{i\in I}$ یک پایه‌ی متعامد یکه از زیر فضاها نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۱. دنباله‌ی $\{W_i\}_{i\in I}$ یک پایه‌ی ریس از زیرفضاها برای $\mathcal{H}$ است، اگر $\overline{\operatorname{span}}\{W_i\}_{i\in I} = \mathcal{H}$ و ثابت‌های $0 < A \leq B < \infty$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر دنباله‌ی متناهی از بردارهای $f_1, \ldots, f_n$ داشته باشیم

$$A\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2 \leq \Big\|\sum_{i=1}^{n} w_i P_{W_i} f\Big\|^2 \leq B\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2.$$

اگر برای هر $i \in I$، $W_i \cap \overline{\operatorname{span}}\{W_j : j \neq i\} = \{0\}$ باشد، W دنباله‌ی مینیمال نامیده می‌شود.

اگر W دنباله مینیمال باشد، W پایه‌ی ریس از زیرفضاها نامیده می‌شود.

اگر برای هر $i \in I$، $w_i = 1$ و برای هر $i \neq j$، $W_i \perp W_j$ باشد، آنگاه W پایه‌ی متعامد یکه از زیر فضاها نامیده می‌شود. در این حالت مشاهده می‌کنیم که دنباله‌ی تصاویر متعامد $\{P_{W_i}\}_{i\in I}$ یک تجزیه‌ی همانی است.

یادآوری می‌کنیم که دنباله‌ی عملگرهای کران دار $\{T_i\}_{i\in I}$ روی $\mathcal{H}$، یک تجزیه‌ی همانی روی $\mathcal{H}$ است اگر برای هر $f\in\mathcal{H}$ داشته باشیم

$$f=\sum_{i\in I}T_i f.$$

$\{T_i\}_{i\in I}$ یک تجزیه‌ی همانی نامشروط نامیده می‌شود هرگاه سری فوق به طور نامشروط همگرا باشد.

علاقمندان برای آشنایی بیشتر با نظریه‌ی قاب‌های ترکیب و برخی کاربردهای آن می‌توانند به مراجع [?]، [?] و [?] رجوع کنند.

اگر W یک قاب ترکیب باشد، عملگرهای ترکیب، تجزیه و عملگر قاب نظیر W را می‌توانیم تعریف کنیم و ویژگی‌های قاب W را می‌توانیم با به کارگیری این عملگرها بررسی کنیم.

در زیر تعاریف و ویژگی‌های اساسی زاویه‌ی بین زیر فضاهای بسته‌ی $\mathcal{H}$ را یادآوری می‌کنیم. برای جزئیات و اثبات‌ها به [?]،[?] و[?] مراجعه کنید.

تعریف ۸.۱. فرض کنیم $M,N\sqsubseteq\mathcal{H}$. کسینوس زاویه‌ی بین M و N به صورت

$$c[M,N]=\sup\left\{|\langle x,y\rangle|:\ x\in M\ominus N,\ y\in N\ominus M\ and\ \|x\|=\|y\|=۱\right\}.$$

تعریف می‌شود، اگر $N\subseteq M$ یا $M\subseteq N$، تعریف می‌کنیم $c[M,N]=۰$. سینوس زاویه‌ی بین M و N به صورت $s[M,N]=(۱-c[M,N]^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف می‌شود.

گزاره ۹.۱ فرض کنیم $M,N\sqsubseteq\mathcal{H}$. در این صورت

۱. $c[M,N]=c[N,M]=c[M\ominus N,N]=c[M,N\ominus M]$؛

۲. اگر $\dim M<\infty$، آنگاه $c[M,N]<۱$ است؛

۳. $c[M,N]<۱$ اگر و تنها اگر $M+N$ بسته باشد؛

۴. $c[M,N]=c[M^{\perp},N^{\perp}]$؛

۵. $c[M,N]=\|P_M\ P_{N\ominus M}\|=\|P_{M\ominus N}\ P_N\|=\|P_M\ P_N-P_{M\cap N}\|$؛

٦. $s[M,N]=dist\Big(N,\{x\in M\ominus N:\ \|x\|=۱\}\Big)$.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنیم $T \in L(\mathcal{H},\mathcal{K})$. مدول مینیموم تحویل یافته T به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\gamma(T) = \inf\left\{\|Tx\| : \|x\| = ۱, x \in N(T)^{\perp}\right\}.$$

گزاره ۱۱.۱ [?] فرض کنیم $T \in L(\mathcal{H},\mathcal{K})$، در آن صورت

۱. $\gamma(T) = \gamma(T^*) = \gamma(T^*T)^{۱/۲}$ ؛

۲. $R(T) \sqsubseteq \mathcal{K}$ اگر و تنها اگر $\gamma(T) > ۰$ باشد؛

۳. اگر T وارون پذیر باشد، آنگاه $\gamma(T) = \|T^{-۱}\|^{-۱}$؛

۴. اگر $B \in Gl(\mathcal{K})$، آنگاه

$$\|B^{-۱}\|^{-۱}\gamma(T) \leq \gamma(BT) \leq \|B\|\gamma(T). \qquad (۴.۱)$$

۵. اگر $R(T) \sqsubseteq \mathcal{K}$ و $M \sqsubseteq \mathcal{H}$، آنگاه

$$\gamma(T)s[N(T), M] \leq \gamma(TP_M) \leq \|T\|s[N(T), M]. \qquad (۵.۱)$$

بویژه، $T(M) \sqsubseteq \mathcal{K}$ اگر و تنها اگر $c[N(T), M] < ۱$.

توضیح ۱۲.۱ فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد و فرض کنیم $\mathcal{K}$ یک فضای هیلبرت جدایی پذیر باشد به طوری که $\dim \mathcal{K} = |I|$ و $B = \{\varphi_i\}_{i\in I}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{K}$ باشد. در این صورت عملگر پوشا $T_{\mathcal{F},B} \in L(\mathcal{K},\mathcal{H})$ وجود دارد به طوری که برای هر $i \in I$ داریم، $T_{\mathcal{F},B}(\varphi_i) = f_i$. عملگر $T_{\mathcal{F},B}$ را عملگر پیش قاب برای $\mathcal{H}$ گوییم. در ادامه نشان خواهیم داد که کران‌های قاب $\mathcal{F}$ به صورت زیر است

$$A_{\mathcal{F}} = \gamma(T_{\mathcal{F},B})^{۲}, \qquad B_{\mathcal{F}} = \|T_{\mathcal{F},B}\|^{۲}. \qquad (٦.۱)$$

عملگر $T^*_{\mathcal{F},B} \in L(\mathcal{H},\mathcal{K})$ برای هر $x \in \mathcal{H}$ به صورت $T^*_{\mathcal{F},B}(x) = \sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle\varphi_i$ خواهد بود. به سهولت می‌توان دید که $S_{\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F},B}T^*_{\mathcal{F},B} \in L(\mathcal{H})^+$. در واقع $S_{\mathcal{F}} \in Gl(\mathcal{H})^+$. توجه کنید که $S_{\mathcal{F}}$

وابسته به عملگر پیش قاب انتخابی نیست. اگر پایه‌ی متعارف $\mathcal{E}$ را برای $\ell^{2}(I)$ انتخاب کنیم، در این صورت $T_{\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$. حال برای اثبات تساوی‌های (۶.۱) به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\|T^{*}_{\mathcal{F},B}(x)\|^{2} = \sum_{i\in I}|\langle x, f_i\rangle|^{2} \;\; \leq \;\; B_{\mathcal{F}}\|x\|^{2} \quad (x \in \mathcal{H}).$$

پس

$$\|T_{\mathcal{F},B}\|^{2} = \|T^{*}_{\mathcal{F},B}\|^{2} \;\; \leq \;\; B_{\mathcal{F}}. \tag{۷.۱}$$

از طرفی برای هر $x \in \mathcal{H}$ داریم

$$\|T^{*}_{\mathcal{F},B}\|^{2}\|x\|^{2} \geq \|T^{*}_{\mathcal{F},B}(x)\|^{2} = \sum_{i\in I}|\langle x, f_i\rangle|^{2} \leq B_{\mathcal{F}}\|x\|^{2}.$$

چون $B_{\mathcal{F}}$ کوچکترین کران بسل است، پس

$$\|T^{*}_{\mathcal{F},B}\|^{2} = \|T_{\mathcal{F},B}\|^{2} \geq B_{\mathcal{F}}. \tag{۸.۱}$$

لذا از روابط (۷.۱) و (۸.۱) نتیجه می‌شود $\|T_{\mathcal{F},B}\|^{2} = B_{\mathcal{F}}$.

اما برای کران پایین قاب از قضیه‌ی ۲.۱، داریم $A_{\mathcal{F}} = \|S_{\mathcal{F}}^{-1}\|^{-1}$، از طرفی برای هر $x \in \mathcal{H}$ داریم

$$T_{\mathcal{F},B}T^{*}_{\mathcal{F},B}(x) = T_{\mathcal{F},B}(\sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle\varphi_i) = \sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle f_i = S_{\mathcal{F}}(x).$$

در نتیجه

$$A_{\mathcal{F}} = \|S_{\mathcal{F}}^{-1}\|^{-1} = \gamma(S_{\mathcal{F}}) = \gamma(T_{\mathcal{F},B}T^{*}_{\mathcal{F},B}) = \gamma(T_{\mathcal{F},B})^{2}.$$

توضیح ۱۳.۱ فرض کنیم $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد. $e(\mathcal{F}) = \dim N(T_{\mathcal{F}})$ فزونی قاب نامیده می‌شود. در[?] و [?] ثابت شده است که

$$e(\mathcal{F}) = \sup\{|J| : J \subseteq I \;\; and \;\; \{f_i\}_{i\notin J} \;\; is\ a\ frame\ for\ \mathcal{H}\}.$$

برای هر عملگر پیش قاب $T_{\mathcal{F},B} \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ از $\mathcal{F}$، داریم $e(\mathcal{F}) = \dim N(T_{\mathcal{F},B})$. اگر $e(\mathcal{F}) = 0$، قاب $\mathcal{F}$ یک پایه‌ی ریس است، در نتیجه عملگر پیش قاب یا عملگر ترکیب قاب $\mathcal{F}$ وارون پذیر است.

فصل ۲

قاب‌های ترکیب

در این فصل نتایج اولیه‌ی قاب‌های ترکیب مرتبط با عملگرهای فضای هیلبرت را به دست می‌آوریم. با وجود این که عملگر ترکیب قاب‌های ترکیب برای مطالعه‌ی ویژگی‌های قاب‌های ترکیب مفید است، ولی یافتن عملگر ترکیب برای هر آشفتگی از قاب‌های ترکیب مشکل است. یکی از اهداف ما این است که انعطاف پذیری بیشتری در استفاده از روش‌های نظریه‌ی عملگرها برای مطالعه‌ی قاب‌های ترکیب به دست بیاوریم. برای این منظور قضیه‌ی ۵.۲ را که از نتایج اصلی این فصل است، ارایه می‌دهیم. بنابراین با استفاده از این نتایج، مفهوم فزونی قاب‌های ترکیب را که مشابه نظریه‌ی قاب‌ها است بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $W=(w_i,W_i)_{i\in I}$ یک دنباله‌ی بسل از زیرفضاها برای $\mathcal{H}$ باشد. فضای $\mathcal{K}_W$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{K}_W=\sum_{i\in I}\bigoplus W_i:=\Big\{g=(g_i)_{i\in I}:\ g_i\in W_i\ ,\quad \|g\|^{۲}:=\sum_{i\in I}\|g_i\|^{۲}<+\infty\Big\}.$$

$\mathcal{K}_W$ با اعمال جمع و ضرب اسکالر نقطه‌دار و ضرب داخلی $\langle (g_i)_{i\in I},(h_i)_{i\in I}\rangle=\sum_{i\in I}\langle g_i,h_i\rangle$ یک فضای هیلبرت است.

عملگر$T_W\in L(\mathcal{K}_W,\mathcal{H})$ را که عملگر ترکیب W نامیده می‌شود، برای هر $g=(g_i)_{i\in I}\in\mathcal{K}_W$ به صورت $T_W(g)=\sum_{i\in I}w_ig_i$ تعریف می‌کنیم. عمل T_W روی هر جمع وند متعامد $\mathcal{K}_W$ با استفاده از این تعریف کاملاً تعیین شده است. عملگر $T_W^*\in L(\mathcal{H},\mathcal{K}_W)$ (الحاقی T_W) عملگرتجزیه‌ی W نامیده می‌شود. به وضوح برای هر$f\in\mathcal{H}$ داریم $T_W^*(f)=\{w_iP_{W_i}f\}_{i\in I}$. با ترکیب عملگرهای T_W و T_W^* عملگر $S_W=T_WT_W^*\in L(\mathcal{H})^+$ ساخته می‌شود و برای هر $f\in\mathcal{H}$ داریم

$$S_Wf=\sum_{i\in I}w_i^{۲}\ P_{W_i}f. \qquad (۱.۲)$$

فرض کنیم $W=(W_i,w_i)_{i\in I}$ یک قاب ترکیب باشد، در این صورت عملگر قاب S_W تعریف شده به صورت (۱.۲) مثبت، خودالحاق، وارون پذیر روی $\mathcal{H}$ است و برای هر $f\in\mathcal{H}$ داریم $f=\sum_{i\in I}w_i^{۲}S_W^{-۱}P_{W_i}(f)$ (به مرجع [?] مراجعه کنید).

رابطه‌ی $f=\sum_{i\in I}w_i^{۲}S_W^{-۱}P_{W_i}(f)$ بیان می‌کند که دنباله‌ی $\{w_i^{۲}S_W^{-۱}P_{W_i}(f)\}_{i\in I}$ یک تجزیه‌ی همانی است.

توضیح ۲.۲ [?] فرض کنیم $W = \{W_i\}_{i\in I} \sqsubseteq \mathcal{H}$ و $w \in \ell_+^\infty(I)$ باشد. $W = (w_i, W_i)_{i\in I}$ یک دنباله‌ی بسل از زیر فضاها برای $\mathcal{H}$ است اگر و تنها اگر عملگر ترکیب T_W خوش تعریف و کران‌دار باشد. در این حالت W یک قاب ترکیب برای $\mathcal{H}$ است اگر و تنها اگر T_W پوشا باشد. اگر W یک قاب ترکیب برای $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه نتایج زیر به سادگی حاصل می‌شود.

۱. $A_W = \gamma(T_W)^۲$ و $B_W = \|T_W\|^۲$ به طوری که $A_W.I_{\mathcal{H}} \leq S_W \leq B_W.I_{\mathcal{H}}$.

۲. W پایه‌ی ریس از زیرفضاها است اگر و تنها اگر T_W وارون پذیر باشد و W یک پایه‌ی متعامد یکه از زیر فضاها است اگر و تنها اگر $T_W T_W^* = I_{\mathcal{K}_W}$ و برای هر $i \in I$، $w_i = ۱$ باشد.

۳. W تنگ است اگر و تنها اگر $S_W = A_W.I_{\mathcal{H}}$ باشد. W پارسوال است اگر و تنها اگر T_W^* ایزومتری باشد ($S_W = I_{\mathcal{H}}$). اگر W پارسوال باشد، دنباله‌ی $\{w_i^۲ P_{W_i}\}_{i\in I}$ یک تجزیه‌ی همانی است.

قضیه ۳.۲ فرض کنیم $W = \{W_i\}_{i\in I} \sqsubseteq \mathcal{H}$ و $w \in \ell_+^\infty(I)$. فرض کنیم برای هر $i \in I$، $g_i = \{f_{ij}\}_{j\in J_i}$ یک قاب برای W_i با کران‌های A_{g_i} و B_{g_i} باشد که $A = \inf_{i\in I} A_{g_i} > ۰$ و $B = \sup_{i\in I} B_{g_i} < \infty$. فرض کنیم برای هر $i \in I$، $\mathcal{E}_i = \{e_{ik}\}_{k\in K_i}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای W_i باشد. در آن صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

۱. $\mathcal{F} = \{w_i\ f_{ij}\ \}_{i\in I, j\in J_i} = \{w_i\ g_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است.

۲. $\mathcal{E} = \{w_i\ e_{ik}\ \}_{i\in I, k\in K_i} = \{w_i \mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است.

۳. $W = (w_i, W_i)_{i\in I}$ یک قاب ترکیب برای $\mathcal{H}$ است.

در این حالت، $T_{\mathcal{E},B} = T_W$ و کران‌های W در نابرابری‌های زیر صدق می‌کنند

$$\frac{A_{\mathcal{F}}}{B} \leq A_W = A_{\mathcal{E}}, \quad B_{\mathcal{E}} = B_W \leq \frac{B_{\mathcal{F}}}{A}. \tag{۲.۲}$$

اثبات. ۳ $\Leftarrow$ ۱. فرض کنیم $\{w_i\ f_{ij}\ \}_{i\in I, j\in J_i}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ با کران‌های $A_{\mathcal{F}}$ و $B_{\mathcal{F}}$ باشد، در این صورت نشان می‌دهیم $W = (w_i, W_i)_{i\in I}$ یک قاب ترکیب برای $\mathcal{H}$ است. چون برای هر $i \in I$، $\{f_{ij}\}_{j\in J_i}$ یک قاب برای W_i با کران‌های A_{g_i} و B_{g_i} است، خواهیم داشت

$$A \sum_{i\in I} w_i^۲ \|P_{W_i} f\|^۲ \quad \leq \quad \sum_{i\in I} A_{g_i} w_i^۲ \|P_{W_i}(f)\|^۲$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} |\langle P_{W_i}(f), w_i f_{ij}\rangle|^{۲}\\
&= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} |\langle f, w_i f_{ij}\rangle|^{۲}\\
&\leq \sum_{i\in I} B_{g_i} w_i^{۲} \|P_{W_i}(f)\|^{۲}\\
&\leq B\sum_{i\in I} w_i^{۲} \|P_{W_i}(f)\|^{۲}.
\end{aligned}$$

بنابر این برای هر $f\in\mathcal{H}$ داریم

$$\begin{aligned}
A\sum_{i\in I} w_i^{۲}\|P_{W_i}f\|^{۲} &\leq \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} |\langle P_{W_i}f, w_i f_{ij}\rangle|^{۲}\\
&\leq B_{\mathcal{F}}\|f\|^{۲}.
\end{aligned}$$

لذا $\sum_{i\in I} w_i^{۲}\|P_{W_i}f\|^{۲} \leq \frac{B_{\mathcal{F}}}{A}\|f\|^{۲}$.

از طرفی داریم

$$\begin{aligned}
A_{\mathcal{F}}\|f\|^{۲} &\leq \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} |\langle P_{W_i}f, w_i f_{ij}\rangle|^{۲}\\
&\leq B\sum_{i\in I} w_i^{۲}\|P_{W_i}f\|^{۲}.
\end{aligned}$$

پس $\frac{A_{\mathcal{F}}}{B}\|f\|^{۲} \leq \sum_{i\in I} w_i^{۲}\|P_{W_i}f\|^{۲}$.

در نتیجه $\{W_i\}_{i\in I}$ یک قاب ترکیب برای $\mathcal{H}$ با کران‌های $\frac{A_{\mathcal{F}}}{B}$ و $\frac{B_{\mathcal{F}}}{A}$ است.

$۱ \Rightarrow ۳$. فرض کنیم $W=(w_i, W_i)_{i\in I}$ یک قاب ترکیب برای $\mathcal{H}$ با کران‌های A_W و B_W باشد، یعنی برای هر $f\in\mathcal{H}$ داشته باشیم

$$A_W\|f\|^{۲} \leq \sum_{i\in I} w_i^{۲}\|P_{W_i}f\|^{۲} \leq B_W\|f\|^{۲}.$$

نشان می‌دهیم که $\{w_i\ f_{ij}\ \}_{i\in I, j\in J_i}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است. برای هر $f\in\mathcal{H}$ داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} |\langle f, w_i f_{ij}\rangle|^{۲} &= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} |\langle P_{W_i}f, w_i f_{ij}\rangle|^{۲}\\
&\geq A\sum_{i\in I} w_i^{۲}\|P_{W_i}f\|^{۲}\\
&\geq AA_W\|f\|^{۲}.
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle f, w_i f_{ij}\rangle|^{۲} &= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}|\langle P_{W_i}f, w_i f_{ij}\rangle|^{۲}\\ &\leq B\sum_{i\in I} w_i^{۲}\|P_{W_i}f\|^{۲}\\ &\leq BB_W\|f\|^{۲}.\end{aligned}$$

لذا با استفاده از دو رابطه‌ی بالا حکم ثابت می‌شود.

۳ $\Leftrightarrow$ ۲. برای اثبات هم ارزی ۲ و ۳ طبق فرض برای هر $i\in I$، $\{e_{ik}\}_{k\in K_i}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای W_i است در نتیجه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}w_i^{۲}\|P_{W_i}f\|^{۲} &= w_i^{۲}\|\sum_{k\in K_i}\langle f, e_{ik}\rangle e_{ik}\|^{۲}\\ &= w_i^{۲}\sum_{k\in K_i}|\langle f, e_{ik}\rangle|^{۲}\|e_{ik}\|^{۲}\\ &= w_i^{۲}\sum_{k\in K_i}|\langle f, e_{ik}\rangle|^{۲}\\ &= \sum_{k\in K_i}|\langle f, w_i e_{ik}\rangle|^{۲}.\end{aligned}$$

حال برای اثبات $T_{\mathcal{E},B}=T_W$، با توجه به این که $B=\{e_{ik}\}_{i\in I,k\in K_i}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{K}_W$ است داریم

$$T_{\mathcal{E},B}(e_{ik})_{i\in I,k\in K_i}=\sum_{i\in I,k\in K_i} w_i e_{ik}=T_W(e_{ik})_{i\in I,k\in K_i}.$$

■

تعریف ۴.۲. فرض کنیم $W=(w_i,W_i)_{i\in I}$ یک دنباله‌ی بسل از زیر فضاها برای $\mathcal{H}$ با عملگر ترکیب T_W باشد. فزونی W به صورت $e(W)=\dim N(T_W)$ تعریف می‌شود.

قضیه ۵.۲ فرض کنیم $\{E_i\}_{i\in I}$ یک پایه‌ی متعامد یکه از زیر فضاها برای $\mathcal{K}$ و $T\in L(\mathcal{K},\mathcal{H})$ عملگر پوشا باشد. فرض کنیم که $\inf_{i\in I}\frac{\gamma(TP_{E_i})}{\|TP_{E_i}\|}>۰$ و $۰<A,B<\infty$ باشد به طوری که برای هر $i\in I$ داریم

$$\frac{\|TP_{E_i}\|^{۲}}{B}\leq\frac{\gamma(TP_{E_i})^{۲}}{A}. \qquad (۳.۲)$$