بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض
گرایش هندسه

عنوان:

سیستم‌های دینامیکی آشوبناک و خاصیت سایه زنی

مولف:

معصومه عبدلی نسب گروه

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا مولایی

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به بهترین های زندگانیم:

همسر فداکارم،

امیرحسین و امیرحافظ.

تشکر و قدردانی

خدایا تو را سپاس که مرا در دایره امکان نهادی و نقش علم را بر دفتر اندیشه ام کشیدی و چشمه سار زلال دانش و معرفت را ارزانی ام داشتی تا در برهوت نادانی سیراب کرم وجودم باشد.

در ابتدا از اولین و بزرگترین معلمان زندگیم، **پدر و مادر بزرگوارم** که مرا به جان پروردند و امید رسیدن به افق های روشن را در دلم شکوفا ساختند، از صمیم قلب تشکر می کنم.

از **همسر فداکار و مهربانم** که در دوران تحصیل مشوق و یاور من بودند و از فرزندان دلبندم **امیر حسین** و **امیر حافظ** که چهره های مهربانشان امید بخش زندگی ام است نهایت تشکر و سپاس را دارم.

بر خود لازم می دانم به پاس زحمات استاد راهنمای گرامی ام، **جناب آقای دکتر محمد رضا مولایی** که با سعه ی صدر و دقت نظرشان باعث هرچه پربار شدن این پایان نامه شدند، نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم.

از **جناب آقای دکتر محمد ابراهیمی** و **جناب آقای دکتر اکبر نظری** که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند، تشکر می کنم.

معصومه عبدلی نسب

بهمن ماه ۱۳۹۰

چکیده

در چهل سال اخیر کتاب‌ها و مقالات زیادی در مورد سیستم‌های دینامیکی گسسته نوشته شده است. در این راستا محققان با رفتارهای غیر قابل پیش بینی و حساس به شرایط اولیه، زیادی مواجه شده‌اند. ریاضیدانان بسیاری سعی کردند تا این رفتارهای آشوبناک و مسایل مرتبط با آن را تعریف و مدل بندی ریاضی کنند.

هدف از این پایان‌نامه مطالعه سیستم‌های آشوبناک بر اساس تعریف "دیونی " و سپس بررسی رابطه بین خاصیت سایه زنی و رفتارهای آشوبناک در سیستم‌های دینامیکی گسسته است. در ادامه به این نتیجه می رسیم که تحت شرایط خاصی آشوبناک بودن یک سیستم دینامیکی با داشتن خاصیت سایه زنی آن معادل است.

مقدمه

مرجع اصلی این پایان نامه مقاله ای است تحت عنوان، آشوب و خاصیت سایه زنی [۲۲] که توسط ماژور و کاسیلنیک در سال ۲۰۰۷ نوشته شده است.

همان گونه که از عنوان این مقاله برمی آید هدف اصلی، بررسی سیستمهای دینامیکی آشوبناک و مقایسه آنها با سیستمهای دینامیکی است که دارای خاصیت سایه زنی هستند. در فصل اول ابتدا مفهوم سیستمهای دینامیکی را از دیدگاههای مختلف تبیین میکنیم. سپس به رده بندی سیستمهای دینامیکی میپردازیم. در این پایان نامه ما با یک نوع سیستم دینامیکی که سیستم دینامیکی گسسته نامیده می شود سر وکار داریم. در ادامه این فصل برخی تعاریف و قضایای مورد نیاز را یادآوری می کنیم. در فصل دوم معنی آشوبناک بودن یک سیستم دینامیکی گسسته را به صورت گسترده شرح داده ایم. در ابتدای این فصل فضای نمادین را تعریف می کنیم، سپس بر روی این فضا یک متر غیر بدیهی تعریف می کنیم که فضای متریک حاصل فشرده باشد. بعد از این که ویژگیهای فضای متریک نمادین مورد بررسی قرار می گیرد. نشان داده می شود که این آشوبناک است و هر سیستم دینامیکی که با این فضا مزدوج توپولوژیکی باشد نیز آشوبناک است. در ادامه مثالهایی از سیستمهای دینامیکی آشوبناک آورده می شود که از مثالهای معروف و مهم در سیستمهای دینامیکی است.

به بررسی خاصیت سایه زنی می پردازیم. ابتدا مفاهیم شبه مدار و خاصیت سایه زنی تبیین میشوند و ویژگیهای آنها مورد بررسی قرار می گیرد. سپس زنجیره های بازگشتی تعریف می شوند و به ارتباط وجود زنجیره بازگشتی و خاصیت سایه زنی می پردازیم. هم چنین در این فصل خانوادهایی از توابع مورد مطالعه قرار می گیرند و نشان داده میشود که تعداد نامتناهی عضو از این خانواده دارای خاصیت سایه زنی هستند و در عین حال تعداد اعضایی از این خانواده که دارای خاصیت سایه زنی نیستند نامتناهی است. در بخش آخر این فصل قضیه ای اثبات می شود که نشان می دهد اگر یک سیستم دینامیکی دارای خاصیت سایه زنی باشد آنگاه وجود زنجیره های بازگشتی ناپایدار با آشوبناک بودن سیستم معادل می شود.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

۱.۱ سیستم‌های دینامیکی

در این فصل به تعریف مفهوم سیستم‌های دینامیکی و برخی ویژگی‌های یک سیستم دینامیکی که در این پایان نامه به آن نیاز داریم می‌پردازیم.

نظریه کلاسیک و پیشرفته سیستم‌های دینامیکی به دنبال مباحثی که در مورد پایداری سیستم‌های فضایی به وجود آمد، شکل گرفت. در آن زمان تلاش‌های زیادی صورت گرفت تا به این سوال که، تحت چه شرایطی یک سیستم فضایی با حداقل سه جسم پایدار است، یا نقاط پایدار کجا هستند؟ پاسخ دهند. هر چند که جواب کامل و درستی برای حل این مساله به دست نیامد ولی نتایج تلاش‌های صورت گرفته منجر به ایجاد شاخه سیستم‌های دینامیکی در علوم شد که دارای کاربردهای وسیعی در سایر علوم از جمله فیزیک و کیهان شناسی است.

در مطالعه سیستم‌های دینامیکی، سوال‌ها و ویژگی‌هایی، بارها مشاهده و تکرار می‌شوند از جمله: چه موقع رفتار یک سیستم قابل پیش بینی است؟ چه موقع رفتار یک سیستم آشوبناک است؟ مدارهای متناوب دارای چه نقشی در رفتار سیستم هستند؟ در چه شرایطی یک سیستم نسبت به تغییرات پیرامونی پایدار است؟

برای جواب به این سوال‌ها لازم است که سیستم دینامیکی مورد نظر را در یک قالب کلاسیک ریاضی، مدل بندی کنیم و بر اساس اصول پذیرفته یا قضایای اثبات شده در ریاضیات به مطالعه سیستم بپردازیم.

تعریف عام سیستم دینامیکی: هر پدیده‌ای که با گذشت زمان تغییر یا تکامل داشته باشد

یک سیستم دینامیکی نامیده می‌شود.

تعریف علمی سیستم دینامیکی: سیستم دینامیکی نظریه‌ای است که پدیده‌های در جریان را توصیف می‌کند و تلاش می‌کند تا آینده این پدیده یا سیستم را پیش بینی کند و این پیش بینی به گونه‌ای باشد که محدودیت‌های آن قابل فهم باشد.

تعریف ریاضی یک سیستم دینامیکی: یک سیستم دینامیکی عبارت است از سه تایی (X, ρ, T) که در آن X یک مجموعه ناتهی است و فضای حالت نام دارد، T یک نیم گروه همراه با عضو خنثی و $\rho : X \times T \longrightarrow X$ یک تابع با ویژگی‌های زیر است.

۱) $\rho(x, ۰) = \rho(x)$

۲) $\rho(x, t + s) = \rho(\rho(x, t), s)$

برای سادگی سیستم دینامیکی (X, ρ, T) را با $\rho^t : X \longrightarrow X$ که $t \in T$ نیز نمایش می‌دهند.

سیستم‌های دینامیکی با توجه به نوع نیم گروه T که عنصر زمان نیز نامیده می‌شود به دو شاخه اصلی گسسته و پیوسته تقسیم می‌شود.

اگر $T = \mathbb{Z}$ یا $\mathbb{N} \cup \{۰\}$ همراه با عمل جمع باشد آنگاه سیستم دینامیکی گسسته است. در واقع هرتابع $f : X \longrightarrow X$ یک سیستم دینامیکی گسسته است. رده بندی سیستم‌های دینامیکی براساس T

در جدول (۱ − ۱) رده بندی سیستم‌های دینامیکی براساس T نمایش داده شده است که در آن F_n گروه‌های آزاد و $\mathbb{Z}^n$ گروه‌های لاتیس هستند.

چون در مطالعه یک سیستم، با تغیرات و تکامل ذرات سیستم سر و کار داریم لذا مفهوم مدار در این حوزه یک مفهوم اساسی است.

T=(N,+)	توابع
T=(Z,+)	توابع وارون‌پذیر
T=(R,+)	شارها(معادلات دیفرانسیل و هندسه منیفلد)
T=(Z^n ,+)	
T=(F_n ,o)	

شکل ۱.۱: (۱ − ۱)

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم $x \in X$ و (X, ρ, T) یک سیستم دینامیکی باشد، به مجموعه $O(x) = \{\rho^t(x) | t \in T\}$، مدار x گفته می‌شود.

فرض کنیم $T \subseteq \mathbb{R}$، اگر $k > 0$ در T وجود داشته باشد که $\rho^k(x) = x$ آنگاه گوییم x یک نقطه متناوب است. به کوچکترین عدد مثبت K که $\rho^K(x) = x$ دوره تناوب اصلی K گوییم.

مجموعه همه نقاط متناوب در (X, ρ, T) را با $per(X)$ نمایش می‌دهیم.

برای یک زیر مجموعه A از X و $t \in T$، مجموعه $\rho^t(A)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho^t(A) = \{\rho^t(a) | a \in A\}$$

به طور مشابه

$$\rho^{-t}(A) = \{x | \rho^t(x) \in A\}$$

تعریف ۲.۱.۱. زیر مجموعه $A \subseteq X$ را $\rho-$ پایا گوییم هرگاه به ازای هر $t \in T$ داشته باشیم

$\rho^t(A) \subset A$.

سیستم‌های دینامیکی را می‌توان بر اساس مجموعه X نیز رده بندی کرد. به عنوان مثال اگر X یک مجموعه اندازه پذیر باشد آنگاه ما وارد حوزه‌ای از سیستم‌های دینامیکی می‌شویم که نظریه ارگودیک نامیده می‌شود. اگر X یک فضای توپولوژیک یا متریک باشد آنگاه سیستم دینامیکی توپولوژیکی را داریم.

در سرتاسر این پایان‌نامه X یک فضای متریک و $f : X \longrightarrow X$ یک تابع است. به طور خلاصه سیستم دینامیکی $(X, \rho, \mathbb{N} \cup \{0\})$ که $\rho(x, n) = f^n(x)$ را با (X, f) نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم (X, f) یک سیستم دینامیکی گسسته باشد. اگر زیردنباله $\{n_i\} \subseteq N$ وجود داشته باشد که $lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = y$ آنگاه گوییم نقطه $y \in X$ یک ω-حد نقطه $x \in X$ برای f است.

مجموعه همه نقاط ω-حد نقطه x را با $\omega(x)$ و مجموعه همه ω-حدها را با $\Omega(f) = \cup_{x\in X}\omega(x)$ نمایش میدهیم.

۲.۱ مزدوج توپولوژیکی

برای رده بندی انواع سیستم‌های دینامیکی با توجه به ویژگی‌های توپولوژیکی و هندسی آنها نیاز به تعریف معادل بودن در این حوزه داریم.

در این بخش سیستم‌های هم‌ارز یا مزدوج توپولوژیکی را بررسی می‌کنیم و می‌بینیم که دو سیستم مزدوج توپولوژیکی دارای رفتارهای مشابه هم هستند از جمله آشوبناک بودن یکی

آشوبناک بودن دیگری را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید E و D دو فضای متریک و $f : D \longrightarrow D$ ، $g : E \longrightarrow E$ دو تابع باشند. گوییم f و g هم‌ارز توپولوژیکی هستند، هرگاه همسان ریختی $\mathcal{T} : D \longrightarrow E$ وجود داشته باشد که $\mathcal{T} \circ f = g \circ \mathcal{T}$.

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathcal{T}"'] & D \arrow[d, "\mathcal{T}"] \\
E \arrow[r, "g"'] & E
\end{tikzcd}
\qquad (۱ - ۱)
$$

نمودار (۱) ایجاب می‌کند که اگر $x \in D$ آنگاه $\mathcal{T}(f(x)) = g(\mathcal{T}(x))$. چون $\mathcal{T}$ همسان ریختی است بنابراین $f(x) = \mathcal{T}^{-1}(g(\mathcal{T}(x)))$.

اگر یک همسان ریختی $\rho : D \longrightarrow E$ وجود داشته باشد آنگاه گوییم D و E همسان ریخت هستند. در قضیه بعد می‌بینیم که اگر E و D همسان ریخت باشند آنگاه دارای ویژگی‌های توپولوژیک مشابه هستند.

قضیه ۲.۲.۱. [۱] فرض کنیم D و E فضاهای متریک باشند و $\rho : D \longrightarrow E$ یک همسان ریختی باشد شرایط زیر برقرارند:

الف) مجموعه U در D باز است اگر و تنها اگر $\rho(D)$ در E باز باشد.

ب) دنباله $x_1, x_2, x_3, \ldots$ در D همگرا به x است اگر وتنها اگر دنباله $\rho(x_1), \rho(x_2), \rho(x_3), \ldots$ همگرا به $\rho(x)$ در E باشد.

ج) مجموعه F در E بسته است اگر وتنها اگر مجموعه $\rho(F)$ در E بسته باشد.

د) مجموعه A در D چگال است اگر و تنها اگر مجموعه $\rho(A)$ در E چگال باشد.

اثبات. برهان تمام گزاره‌های فوق با استفاده مستقیم از تعریف مزدوج بودن امکان پذیر است.

□

فرض کنیم $f^t : X \longrightarrow X$، $g^t : Y \longrightarrow Y$ سیستم‌های دینامیکی با عنصر زمان یکسان باشند، یک نیمه مزدوج از (X,f) به (Y,g) تابع پیوسته و پوشای $\mathcal{T} : X \longrightarrow Y$ می باشد که به ازای هر $t \in T$، $\mathcal{T} \circ f^t = g^t \circ \mathcal{T}$، (نمودار زیر)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f^t"] \arrow[d, "\mathcal{T}"'] & X \arrow[d, "\mathcal{T}"] \\ Y \arrow[r, "g^t"'] & Y \end{tikzcd} \qquad (۱-۲)$$

هرگاه تابع $\mathcal{T}$ هومیومرفیسم باشد آنگاه گوییم f و g مزدوج هستند.

مزدوج بودن در واقع یک رابطه هم ارزی در سیستم‌های دینامیکی است و ما برای مطالعه رفتار یک سیستم معمولا رفتار یک سیستم مزدوج یا نیمه مزدوج با آن را که شناخته شده‌تر و ساده‌تر است مطالعه می‌کنیم. در فصل سوم و چهارم خواهیم دید که مزدوج بودن چگونه مطالعه سیستم‌های آشوبناک را ساده می‌کند.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک فشرده باشد، اگر $U \subseteq X$ آنگاه قطر U به صورت زیر تعریف می شود:

$$diam(U) = sup\{d(x,y)|x,y \in U\}$$

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک فشرده و $f : X \longrightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. اگر ثابت مثبت c وجود داشته باشد که به ازای هر دو نقطه متمایز x و y در X، $i \in N$ وجود داشته باشد $i \in N$ که $d(f^i(x), f^i(y)) > c.$ آنگاه گوییم f گسترنده است.

فصل ۲

فضای نمادین و آشفتگی

این فصل را با مطالعه دینامیک‌های نمادین آغاز می‌کنیم. در طول این مطالعه نگاشت انتقال را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این نگاشت و ویژگی‌های آن نقش مهمی در تعریف سیستم‌های آشوبناک دارد.

۱.۲ فضای نمادین

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید $\Sigma_۲$ مجموعه همه دنباله‌های نامتناهی با درایه‌های ۱ ,۰ باشد. این مجموعه فضای دنباله‌ای یا فضای نمادین از ۱ ,۰ نامیده می‌شود. در واقع

$$\Sigma_۲ = \{(s_۰ \, s_۱ \, s_۲ \ldots) | s_i = ۰ \text{یا} ۱\}$$

از این به بعد هر عضو $\Sigma_۲$ را یک نقطه از $\Sigma_۲$ می‌نامیم.

حال روی این مجموعه یک متر تعریف می‌کنیم که $\Sigma_۲$ همراه با این متریک فضای فشرده است.

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنید $s_۰ s_۱ s_۲ \ldots$ و $t_۰ t_۱ t_۲ \ldots$ نقاطی در $\Sigma_۲$ باشند، فاصله بین s, t را با $\rho(s,t)$ نمایش می‌دهیم و به شکل زیر تعریف می کنیم.

$$\rho(s,t) = \sum_{i=۰}^{\infty} \frac{|s_i - ti|}{۲^i}. \qquad (۱-۲)$$

از آنجا که به ازای هر $۰ \leqslant i < \infty$، $|s_i - t_i|$ برابر با ۰ یا ۱ است، لذا

$$۰ \leqslant \rho(s,t) \leqslant \sum_{i=۰}^{\infty} \frac{۱}{۲^i} = ۲.$$

بنابراین به ازای هر s, t، $\rho(s,t)$ یک عدد بین ۰ و ۲ است.

لم ۳.۱.۲. تابع $\rho : \Sigma_۲ \times \Sigma_۲ \longrightarrow [۰, ۲]$ با تعریف (۲ − ۱) یک متر است.

اثبات. ۱− واضح است که $\rho(s,t) = ۰$ اگر وتنها اگر به ازای هر $i \geqslant ۰$، $s_i = t_i$.

۲− چون به ازای هر $i \geqslant ۰$ داریم $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$ لذا $\rho(s,t) = \rho(t,s)$.

۳− به ازای هر $i \geqslant ۰$ داریم $|s_i - t_i| \leqslant |s_i - r_i| + |r_i - t_i|$ لذا $\rho(s,t) \leqslant \rho(s,r) +$ $\rho(r,t)$. □

قبل از بررسی فشردگی فضای$(\Sigma_۲, \rho)$، به لم زیر نیاز داریم.

لم ۴.۱.۲. فرض کنید t, s عضوهایی از $\Sigma_۲$ باشند. اگر $n + ۱$ درایه اول در s, t با هم برابر باشند، آنگاه $\rho(s,t) \leqslant \frac{۱}{۲^n}$. از طرف دیگر اگر $\rho(s,t) \leqslant \frac{۱}{۲^n}$ آنگاه $n + ۱$ درایه اول t, s با هم مساوی‌اند.

اثبات. فرض کنید $s = s_۰ s_۱ s_۲ \ldots$ و $t = t_۰ t_۱ t_۲ \ldots$ دنباله‌هایی در $\Sigma_۲$ باشند. می‌دانیم که $s_۰, s_۱, \ldots s_n$ عضو اول s هستند. بنابراین t, s در $n + ۱$ درایه اول مساوی هستند اگر و تنها اگر برای هر $۰ \leqslant i \leqslant n$، $s_i = t_i$ داشته باشیم $s_i = t_i$. حال فرض کنید برای هر $۰ \leqslant i \leqslant n$، $s_i = t_i$ بنابراین

$$
\begin{aligned}
\rho(s,t) &= \sum_{i=۰}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{۲^i} \\
&= \sum_{i=۰}^{n} \frac{۰}{۲^i} + \sum_{i=n+۱}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{۲^i} \\
&= \frac{۱}{۲^{n+۱}} \sum_{i=۰}^{\infty} \frac{|s_{i+n+۱} - t_{i+n+۱}|}{۲^i} \\
&\leqslant \frac{۱}{۲^{n+۱}} \sum_{i=۰}^{\infty} \frac{۱}{۲^i} \\
&= \frac{۱}{۲^n}.
\end{aligned}
$$

از طرف دیگر اگر $j < n$ وجود داشته باشد که $s_j \neq t_j$ آنگاه

$$\rho(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \geqslant \frac{1}{2^j} > \frac{1}{2^n}$$

.

$\square$

در مثال بعد برخی ویژگی‌های Σ_2 را بررسی می‌کنیم.

مثال ۵.۱.۲. الف) فرض کنید $s = 000000\cdots$ و $t = 010100\cdots$. فاصله بین s,t برابر است با

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \frac{0}{2^0}+\frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots = \frac{1}{2}\sum_{i}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{2}{3}$$

ب) اگر S مجموعه همه عناصر Σ_2 باشد که با $0\,1\,1$ شروع می‌شود. نشان می‌دهیم که S یک مجموعه بسته است.

اگر x یک نقطه انباشتگی S باشد آنگاه هر همسایگی از x شامل حداقل یک نقطه از S و متمایز با x است. بنابراین وجود دارد $y \in B_{\frac{1}{2^3}}(x) \cap S$. چون $\rho(x,y) < \frac{1}{2^3}$، بنابراین طبق لم ۴.۱.۲ سه درایه اول y برابر $0\,1\,1$ است. لذا سه درایه اول x,y نیز $0\,1\,1$ است. در نتیجه $x \in S$ و S بسته است.

ج) مجموعه همه عناصر در Σ_2 که با یک رشته نامتناهی از 0 تمام می‌شوند در فضای متریک (Σ_2, ρ) چگال است. فرض کنیم

$$A = \{s_0\, s_1\, s_2 \ldots \in \Sigma_2 | s_i = 0,\ i \geqslant k \text{ وجود داشته باشد } k \in \mathbb{N} \text{ که ازای به هر}\}$$