بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده فنی و مهندسی

گروه مهندسی مکانیک

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی

ارتعاشات غیرخطی ورق‌های قطاعی

استاد راهنما :

دکتر علیرضا سعیدی

استاد مشاور :

دکتر محمدعلی حاج‌عباسی

مؤلف :

فاطمه هجری‌پور رفسنجانی

دیماه ۱۳۸۸

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد به

گروه مکانیک

دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچ گونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو : فاطمه هجری پور

استاد راهنما : آقای دکتر علیرضا سعیدی

استاد مشاور : آقای دکتر محمد علی حاج عباسی

داور ۱ : آقای دکتر محمد رضا ماهری

داور ۲ : آقای دکتر غلامحسین برادران

نماینده ی تحصیلات تکمیلی دانشکده در جلسه دفاع :آقای دکتر حسن هاشمی پور

معاونت پژوهشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده: آقای دکترغلامرضا پور ابراهیم

تقدیم به :

آموزگار عشق

مادر

و

سنگ صبورم

پدر

و تقدیم به

برادرم دکتر سید ضیا هجری‌پور و سایر برادرانم که با حمایت و دلسوزی‌های بی‌دریغ خود مرا در تمامی عرصه‌های زندگی‌همراهی کرده‌اند.

تشکر و قدردانی :

با یاری خداوند متعال، اتمام این پایان‌نامه را مدیون مساعدت و راهنمایی‌های بی‌شائبه استاد عالیقدر جناب آقای دکتر سعیدی می‌دانم که همواره با نظرات عالمانه خود مرا در انجام این تحقیق یاری رسانده‌اند.

و با تشکر از زحمات جناب آقای دکتر حاج‌عباسی و جناب آقای دکتر برادران که پاسخگوی اشکالات اینجانب در طول مراحل تحصیل بوده‌اند.

چکیده :

در این پایان‌نامه، ارتعاشات غیرخطی ورق‌های قطاعی و قطاعی حلقوی مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حاکمه بر اساس تئوری سه‌بعدی الاستیسیته و تئوری برشی مرتبه اول ورق بطور جداگانه بدست می‌آیند. با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی جهت حل این معادلات، با مقایسه نتایج حاصل از تئوری برشی مرتبه اول با تئوری سه‌بعدی الاستیسیته و طی یک روند سعی و خطا، ضرایب تصحیح برش برای ورق‌های قطاعی و قطاعی حلقوی تحت چند شرط مرزی خاص حاصل می‌شوند. معادلات حاکمه غیرخطی و شرایط مرزی نظیر بر اساس تئوری برشی مرتبه اول ورق و با اعمال کرنش‌های فون کارمن بدست آمده‌اند. سپس با توجه به ضریب تصحیح برش حاصل شده و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی و روش متعادل سازی هارمونیک، دستگاه مقادیر ویژه بدست می‌آید. با کمک یک روش تکرار، دستگاه مقادیر ویژه غیرخطی حل می‌گردد. نسبت فرکانس غیرخطی به خطی و همچنین سرعت همگرایی آن در مقدار دامنه‌های مختلف برای ورق قطاعی حلقوی تحت انواع شرایط مرزی در جداول آورده شده است. تاثیر مشخصات هندسی ورق و همچنین شرایط مرزی بر روی نسبت فرکانس غیرخطی به خطی برای مود اول و دوم در نمودارهایی ترسیم و بررسی شده است. همچنین نسبت فرکانس غیرخطی به خطی برای ورق قطاعی تحت شرایط مرزی مختلف در جدولی آورده شده است.

کلید واژه : ارتعاشات غیرخطی، ورق‌های قطاعی، تئوری برشی مرتبه اول ورق، روش مربعات دیفرانسیلی.

فهرست مطالب :

فصل اول

مقدمه و مروری بر کارهای انجام شده

ورق‌ها نمونه ای از سازه های مکانیکی هستند که در انواع مسائل پیشرفته مهندسی با آنها برخورد می‌شود. مقاومت آنها در برابر ممان‌های خمشی، پیچشی و نیروهای برشی سبب بیشتر شدن قابلیت تحمل بار آنها شده است. از میان انواع ورق‌ها، ورق‌های قطاعی و قطاعی حلقوی علی‌رغم کاربرد بسیار در صنایع از قبیل صنعت هوا فضا، نظامی و هسته‌ای نسبت به سایر ورق‌ها مورد توجه کمتری قرار گرفته‌اند. از این رو تحلیل اینگونه ورق‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است. در این فصل ابتدا به تاریخچه ضریب تصحیح برش برای انواع ورق‌ها پرداخته شده و سپس تاریخچه تحلیل ارتعاشات غیرخطی ورق‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.

۱-۱. ضریب تصحیح برش در ورق‌های همسانگرد

از میان تئوری‌های موجود برای تحلیل ورق‌ها، تئوری سه‌بعدی الاستیسیته[۱] دقیق‌ترین پاسخ ممکن را می‌دهد. اما حل مسئله سه‌بعدی از پیچیدگی‌های خاصی برخوردار است. برای ساده شدن کار، ورق‌های دارای ضخامت کم را با تئوری‌های ساده‌تری تحلیل می‌کنند. تئوری‌های مختلفی برای حل ورق‌ها وجود دارد که یکی از مهمترین آنها، تئوری کلاسیک ورق[۲] است. در این تئوری از اثر جابجایی حاصل از برش صرفنظر می‌شود و پاسخ فرکانس طبیعی اول آن در ضخامت‌های خیلی کم ($\frac{1}{100} < \frac{h}{a-b} < \frac{1}{20}$ که h ضخامت، a شعاع خارجی و b شعاع داخلی ورق قطاعی حلقوی هستند)، از دقت بسیار بالایی برخوردار است. ولی با افزایش ضخامت ورق، پاسخ‌های حاصل از این تئوری از پاسخ‌های حاصل از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته فاصله می‌گیرند. بنابراین در ضخامت‌های بیشتر ورق، از تئوری دیگری بنام تئوری برشی مرتبه اول یا تئوری میندلین[۳] استفاده می‌شود که در آن تاثیر برش در راستای ضخامت در نظر گرفته می‌شود. با اعمال ضریب تصحیح برش[۴] برای کاهش

[۱] Three-dimensional elasticity theory
[۲] Classical plate theory
[۳] Mindlin
[۴] Shear correction factor

خطای ناشی از صفر بودن تنش‌های برشی در سطوح ورق، پاسخ‌های حاصل از این تئوری به پاسخ‌های حاصل از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته نزدیکتر می‌شود.

برای نخستین بار میندلین در سال ۱۹۵۱ با مساوی قرار دادن کوچکترین فرکانس مربوط به مود نامتقارن با فرکانس حاصل از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته نظیر، رابطه‌ای میان ضریب تصحیح برش(κ) و نسبت پواسون[۱] (ν) بدست آورد. بر طبق این رابطه، برای نسبت پواسون ν =۰/۳ ضریب تصحیح برش κ =۰/۸۶ و برای نسبت پواسون ν =۰/۱۷۶ ضریب تصحیح برش $\kappa=\pi^2/12$ بدست می‌آید. رایزنر[۲] در سال ۱۹۴۵ ضریب تصحیح برش κ =۵/۶ را از تحلیل خمش ورق بدست آورد. در سال ۱۹۸۷ ویتریک[۳] رابطه‌ای را میان ضریب تصحیح برش و نسبت پواسون برای ورق با چهار طرف تکیه-گاه ساده نشان داد که بر اساس آن، به ازاء نسبت پواسون ν =۰/۳ ، ضریب تصحیح برش κ =۰/۸۷۷ بدست می‌آید. این عدد بهترین ضریب تصحیح برش برای ورق با چهار طرف تکیه‌گاه ساده می‌باشد که تاکنون بدست آمده است[۱].

در تمامی تحقیقات ذکر شده، ورق مورد بررسی از نوع مستطیلی بوده است. تحقیقات گسترده دیگری در این زمینه انجام شده است که از آن جمله می‌توان به تحقیق دواگ و یوسیباش[۴] اشاره کرد[۲]. آنها نشان دادند که هیچ ضریب تصحیح برش بهینه‌ای برای همه بازه‌های ضخامت ورق وجود ندارد و ضریب تصحیح برش به شکل صفحه میانی ورق بستگی دارد.

در فصل سوم این پایان‌نامه، ابتدا معادلات حرکت سه‌بعدی و شرایط مرزی مربوط به آنها بدست آورده شده‌اند. سپس با استفاده از روابط تنش- کرنش و کرنش- جابجایی، معادلات حاکم بر حرکت سه‌بعدی حاصل می‌شوند. بر اساس قوانین حاکم بر روش مربعات دیفرانسیلی[۵]، معادلات حاکم و شرایط مرزی گسسته‌سازی شده و به فرم ماتریسی نوشته می‌شوند. با اعمال ماتریس شرایط مرزی بر ماتریس معادلات حرکت و محاسبه مقادیر ویژه ماتریس نهایی بدست آمده، فرکانس‌های خطی

---

[۱] Poisson ratio
[۲] Reissner
[۳] Wittrick
[۴] Dauge and Yosibash
[۵] Differential quadrature method

حاصل می‌شوند. در بخش دوم این فصل، با در نظر گرفتن میدان جابجایی تئوری برشی مرتبه اول، معادلات حرکت دوبعدی و شرایط مرزی مربوط بدست آمده است. پس از جایگذاری روابط کرنش- جابجایی و بدست آوردن ممان‌های خمشی و نیروهای داخل صفحه‌ای و برشی منتجه، معادلات حاکم بر حرکت حاصل می‌شوند. با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی و تغییر دادن ضریب تصحیح برش می‌توان کوچکترین فرکانس مربوط به مود نامتقارن را با فرکانس حاصل از تئوری سه-بعدی الاستیسیته نظیر منطبق نمود. نتایج عددی در فصل پنجم ارائه شده است.

۱-۲. ارتعاشات غیرخطی

تاکنون تحلیل‌های زیادی در رابطه با ارتعاشات خطی ورق‌ها انجام شده است. اما ورق‌ها ممکن است در معرض تغییر شکل‌های بزرگ قرار گرفته و رفتار غیرخطی از خود نشان دهند. چرخش‌ها و جابجایی‌های بزرگ در یک سازه نازک، بصورت غیرخطی هندسی در معادلات حاکم ظاهر می-شوند. غیرخطی بودن هندسی نقش مهمی در پایداری، ارتعاشات غیرخطی و پس کمانش[۱] بازی می-کند. با این حال، مدل کردن اینگونه از مسائل بخصوص برای سازه‌های انعطاف‌پذیر بسیار دشوار است. به منظور تحلیل غیرخطی هندسی یک ورق نازک، کرنش‌های فون کارمن[۲] معرفی شدند. در تحلیل بیشتر تئوری‌های غیرخطی ورق از کرنش‌های فن کارمن در ارتباط با تئوری کلاسیک، تئوری برشی مرتبه یک و یا تئوری‌های برشی مرتبه بالاتر استفاده شده است. در همه این تئوری‌ها از انحناء‌های[۳] خطی استفاده می‌شود و از تغییر در روابط جابجایی- انحناء صرفنظر شده است. در کرنش‌های فون کارمن، تمامی مولفه‌های غیرخطی هندسی محاسبه نمی‌شوند و تنها غیرخطی بودن در راستای جابجایی جانبی آورده شده است. ویتنی و لیزا[٤] در سال **۱۹٦۹** معادلات حرکت را برای جابجایی بزرگ ورق-های ناهمگن لایه‌ای به صورت غیرخطی هندسی فن کارمن استنتاج کردند. نایفه و واکاکیس[٥] در سال سال **۱۹۹٤** ارتعاشات غیر خطی در ورق‌های دایره‌ای را بررسی کردند. در سال **۲۰۰۰** سینگ[٦]

---

[۱] Post buckling
[۲] Von Karman
[۳] Curvature
[٤] Whitney and Leissa
[٥] Nayfeh and Vakakis
[٦] Singh

ارتعاشات غیرخطی صفحات ساخته شده از مواد مرکب لایه‌ای نامتقارن ضخیم را با استفاده از روش اجزاء محدود بررسی کردند. توز[۱] در سال ۲۰۰۲ ارتعاشات غیرخطی ورق‌های دایره‌ای حلقوی ناقص شامل لبه آزاد را بررسی نمود و نتایج تجربی برای این مورد توسط توماس[۲] در سال ۲۰۰۳ بدست آمد[۳ و ٤]. در سال ۲۰۰۷ ارتعاشات آزاد و اجباری غیرخطی ورق‌های دایره‌ای ساخته شده از مواد هدفمند[۳] توسط الله وردی‌زاده و همکارانش مورد بررسی قرار گرفت[٥]. اخیرا نیز کمیر[٤] و همکارانش همکارانش ارتعاشات غیرخطی ورق‌ها و پوسته‌های دایروی ناقص شامل لبه آزاد را با استفاده از تئوری کلاسیک تحلیل کرده‌اند[٦].

تحقیقات فوق و بسیاری از تحقیقات دیگر در خصوص ورقهای مستطیلی و دایروی انجام شده‌اند. اما در رابطه با رفتار غیرخطی ورق‌های قطاعی تحقیقات محدودی انجام گرفته است که از آن جمله می-توان به تحلیل غیرخطی ورق‌های قطاعی ضخیم توسط نس[٥] و همکارانش در سال ۲۰۰٤ با استفاده از چندجمله ای چبیشف اشاره کرد[۷]. در سال ۲۰۰۷ شارما[٦] و همکارانش تحلیل گذرای غیرخطی ورق‌های قطاعی ضخیم ساخته شده از مواد کامپوزیت لایه‌ای را مورد بررسی قرار دادند[۸]. تنها تحقیق در زمینه ارتعاشات غیرخطی ورق‌های قطاعی حلقوی توسط هومت[۷] در سال ۲۰۰۸ انجام گرفته است. او با استفاده از روش p-المان[۸] فرکانس‌های غیرخطی را برای ورق‌های قطاعی حلقوی ضخیم ساخته شده از مواد کامپوزیت لایه‌ای و همسانگرد تحت شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه گیردار بدست آورد[۹].

همانگونه که در برخی از تحقیقات مورد ذکر اشاره گردید، در حل مسائل غیرخطی روش‌های عددی مختلف کاربرد فراوانی دارند که از آن جمله می‌توان به روش مربعات دیفرانسیلی اشاره کرد. برای

[۱] Touzé
[۲] Thomas
[۳] Functionally Graded Material
[٤] Camier
[٥] Nath
[٦] Sharma
[۷] Houmat
[۸] p-element

اولین بار برت[۱] و همکارانش تحلیل خمش غیرخطی ورق‌های ایزوتروپ و اورتوتروپ مستطیلی را با این روش انجام دادند. لیو و لی یو[۲] در سال ۲۰۰۰ ارتعاشات خطی ورق‌های قطاعی و قطاعی حلقوی را مورد بررسی قرار دادند[۱۰ و ۱۱]. لی و چنگ[۳] ارتعاشات غیرخطی ورق‌های ایزوتروپ و اورتوتروپ مستطیلی را با فرض تئوری ردی[٤] و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی مورد مطالعه قرار دادند و تاثیر مرتبه تئوری را بررسی کردند[۱۲]. ملک‌زاده ارتعاشات غیرخطی ورق‌های مستطیلی اریب ضخیم ساخته شده از مواد مرکب لایه‌ای با توجه به تئوری برشی مرتبه یک را بررسی کرد[۱۳]. ملک‌زاده و کرمی ارتعاشات غیرخطی ورق‌های مستطیلی اریب نازک ساخته شده از مواد مرکب لایه‌ای را با استفاده ازتئوری کلاسیک ورق مورد تحلیل قرار دادند[١٤]. در تمامی تحقیقات ارتعاشی ذکر شده، بدلیل غیر قابل اغماض بودن شتاب‌های داخل صفحه در ورق‌های ضخیم در صورت وجود شرایط مرزی غیرمقید، شرایط مرزی از نوع مقید است.

در فصل چهارم از این پایان‌نامه، معادلات غیرخطی حرکت و شرایط مرزی متناظر با توجه به تئوری برشی مرتبه اول و با استفاده از کرنش‌های فن کارمن[٥] بدست آمده‌اند. پس از حل به روش مربعات دیفرانسیلی، جابجایی‌های داخل صفحه در نسبت‌های مختلف ضخامت به اختلاف شعاع داخلی و خارجی در ورقهای قطاعی حلقوی حاصل شده‌اند. با توجه به ناچیز بودن این جابجایی‌ها درمقایسه با جابجایی در راستای جانبی در ضخامت‌های کوچک نسبت به ورق‌های ضخیم‌تر، نشان داده شده است که شتاب‌های داخل صفحه قابل صرفنظر کردن می‌باشد.

در فصل پنجم، فرکانس‌های غیرخطی ورق‌های قطاعی و قطاعی حلقوی تحت شرایط مرزی ترکیبی تکیه‌گاه گیردار و ساده برای ورق ضخیم و شرایط مرزی ترکیبی تکیه‌گاه گیردار، ساده و آزاد برای ورق نازک بدست آمده است. همچنین تاثیر تغییر نسبت ضخامت به شعاع خارجی، زاویه قطاع و نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی در ورق‌های قطاعی حلقوی بر سختی ورق بررسی شده است.

---

۱ Bert
۲ Liew and Liu
۳ Li and Cheng
٤ Reddy
٥ Von Karman

سپس با نشان دادن نمودارهای نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی بر حسب ماکزیمم دامنه به ضخامت[1] ، مقایسه‌ای میان تغییرات فرکانس اول ودوم غیرخطی بر اثر تغییر مشخصات هندسی ورق قطاعی حلقوی انجام شده است.

[1] Backbone curve

فصل دوم

مروری بر روش مربعات دیفرانسیلی

۲-۱. مقدمه

روش‌های عددی بخش بسیار مهمی در حل مسائل، در علوم مهندسی و زمینه‌های مختلف را به خود اختصاص داده‌اند. امروزه روش‌های عددی بسیار زیادی برای حل مسائل مقادیر اولیه و مقادیر مرزی در علم فیزیک و مهندسی وجود دارند. به وضوح دیده می‌شود که تجزیه و تحلیل سیستم‌های مهندسی از دو قسمت، ساخت یک مدل ریاضی برای یک پدیده مشخص فیزیکی و حل آن مدل ریاضی تشکیل شده است. سیستم‌های واقعی فیزیکی یا مسائل مهندسی معمولا به کمک معادلات پاره‌ای توصیف می‌شوند که خود می‌توانند خطی یا غیر خطی باشند و در اکثر حالات، یافتن پاسخ تحلیلی برای آنها امکان‌پذیر نمی‌باشد. بدین سبب، روش‌های تقریبی عددی به صورت گسترده‌ای برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، که در اکثر مسائل وجود دارند، مورد استفاده قرار می‌گیرند. از جمله روش‌های عددی که برای حل اینگونه مسائل به کار گرفته می‌شوند می‌توان از روش‌های المان محدود، تفاضل محدود، ریتز و المان مرزی نام برد. اکثر مسائل مهندسی نیز به کمک این روش‌ها حل می‌شوند به شرطی که دقت لازم به کمک انتخاب تعداد نقاط گره‌ای کافی و مناسب به دست آید. در اکثر مسائل مهندسی، هنگامی که به دقت کافی در چند مختصات مستقل نیاز است، روش‌های عددی مانند المان محدود و یا تفاضل محدود احتیاج به نقاط گره‌ای زیاد دارند که این خود کامپیوتری با ظرفیت محاسباتی بالایی را می‌طلبد. در میان تنوع بسیار زیاد روش‌های عددی، روش المان محدود روشی قدیمی، بسیار موثر و با کاربرد بسیار زیاد است. علاوه بر این، روش المان محدود همچنان روش بسیار موثری برای اکثر مسائل مهندسی با شکل‌های و بارهای اعمالی بسیار پیچیده و یا طبیعت غیر خطی می‌باشد و در این زمینه‌ها بسیار موفق بوده است.

معادلات دیفرانسیل با درجات بالا در اکثر مسائل مهندسی به وجود می‌آیند. برای مثال، معادله حاکم بر ارتعاش آزاد یک ورق بر اساس تئوری کلاسیک از درجه چهار و یا معادلات وابسته به خمش ورق بر اساس تئوری برشی مرتبه اول از درجه شش می‌باشد. چنین مسائل معمولا دارای چندین شرایط مرزی خواهند بود. اگر به تعداد درجه معادلات شرایط مرزی وجود داشت، آن مسئله معین می‌باشد.

برای مثال، برای بررسی ارتعاش یک ورق بر اساس تئوری کلاسیک، معادله حاکمه از درجه چهار و مسئله دارای چهار شرط مرزی می‌باشد.

در جستجوی یک روش عددی بسیار کار آمد که احتیاج به تعداد نقاط گره‌ای کمتر با حفظ دقت در محاسبات را داشت، روش مربعات دیفرانسیلی (DQ) معرفی شد. در سال‌های اخیر، این روش به علت سرعت و دقت بالای آن در حل مسائل مهندسی بسیار مورد توجه قرار گرفته است. روش DQ برای اولین بار توسط بلمن[۱] و همکارانش [۱۵] معرفی گردید. یکی از اصول مهم در این روش، چگونگی تعین ضرایب وزنی به صورت کار آمد و دقیق می‌باشد. در این روش، حل معادلات جبری که شامل ماتریس ضرائب واندرمونت است، هنگامی که تعداد نقاط زیاد می‌باشند، دقیق نمی‌باشد . بر اساس درونیابی لاگرانژ ، کوان و چنگ[۲] روش صریحی را برای محاسبه ضرایب وزنی مشتقات مرتبه اول و دوم روشDQ ارائه دادند. شو و ریچاردز[۳] روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته[٤] (GDQ) را ارائه دادند که در این روش ضرایب وزنی مشتقات بالاتر به صورت کلی تحت یک تابع چند جمله‌ای، تعیین می‌گردند. آنها رابطه‌ای بسیار ساده برای محاسبه ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول با توزیع مش تصادفی و همچنین برای محاسبه ضرایب وزنی مشتقات دوم و بالاتر بوسیله یک رابطه بازگشتی ارائه دادند. مبانی ریاضی، پیشرفت‌های اخیر و همچنین کاربرد آن در مسائل مهندسی به صورت کامل در کتاب شو[٥] [١٦] آورده شده است. با توجه به این کتاب، روشDQ یک روش بسیار کلی است که اساس آن با اساس روش تفاضل محدود با مراتب بالا مشابهت دارد. در مقایسه با روش تفاضل محدود با مراتب پایین و همچنین روش المان محدود، روش DQ می‌تواند با تعداد کمی از نقاط، جوابهای بسیار دقیقی را به دست آورد. بنابراین به تلاش محاسباتی کمتری و حجم کمتری از محاسبات نیاز است. در حالت کلی، روشDQ از یک مش غیر یکنواخت برای گسسته‌سازی معادلات پیوسته

---

[١] Bellman
[٢] Quan-Chang
[٣] Shu and Richards
[٤] Generalized differential quadrature
[٥] Shu

استفاده می‌کند. شو و دو[1] در بررسی کاربرد روش DQ در تحلیل ارتعاشات آزاد صفحه با شرایط گوشه آزاد، به این نتیجه رسیدند که نقاط مشی که از ریشه‌های چند جمله‌ای‌های عمود بر هم به دست آمده‌اند، نمی‌توانند جواب‌های دقیق و قابل اعتمادی را ارائه دهند[۱۷]. نزدیک کردن نقاط گره‌ای به مرزها از جمله روش‌های لازم برای اطمینان بخشیدن در دقت و همگرایی جواب‌ها در این موارد می-باشد. به طور صریح مشاهده می‌شود که توزیع نقاط گره‌ای نقش بسیار مهمی را در تعیین دقت، همگرایی، سرعت و پایداری روش DQ بازی می‌کند. کوان و چنگ به صورت عددی به بررسی نتایج حاصل از مش‌های غیر یکنواختی که کمتر استفاده شده‌اند، پرداختند و به این نتیجه رسیدند که در همه حالت‌ها، توزیع نقاط گره‌ای که از نوع اول چند جمله‌ای چیبیشف[2] بدست آمده‌اند، بهینه‌ترین جواب را می‌دهد[۱۸].برت و ملیک[3] نشان دادند که توزیع نقاط گره‌ای با توجه به مسئله فرق می‌کند و پیشنهاد کردند که برای مسائل مکانیک سازه‌ای از روش چبیشف-گوس- لوباتو[4] برای توزیع نقاط گره‌ای استفاده شود. تمام کارهای قبلی توضیح قابل قبولی را که چرا توزیع خاصی برای هر مسئله به جواب‌های قابل قبولی منتهی می‌گردد، را ارائه ندادند. تنها نتیجه صریح از کارهای انجام شده این است که توزیع غیر یکنواخت نقاط گره‌ای که از ریشه چند جمله‌ایهای متعامد به دست آمده، می‌تواند به طور کاملاً محسوسی دقت و سرعت در جواب‌ها را در مقایسه با توزیع نقاط گره‌ای یکنواخت، بهبود بخشد. البته چن[5] محدودیت‌های توزیع معمول نقاط گره‌ای را برای آنالیز سیستم‌های دیفرانسیلی دیفرانسیلی مرتبه دو و چهار بیان کرد[۱۹]. اما به هر حال، همانطور که برت و ملیک اشاره کردند، مسئله انتخاب مناسب تعداد و چگونگی توزیع نقاط گره‌ای در مسائل گوناگون هنوز در پرده‌ای از ابهام قرار دارد.

[1] Shu and Du
[2] Chebyshev
[3] Bert and Malik
[4] Chebyshev-Guass-Lobatto
[5] Chen

۲-۲. روش مربعات دیفرانسیلی

۲-۲-۱. ماتریس ضرائب

روش DQ از اساس روش گوس[۱] در استخراج مشتقات یک تابع استفاده می‌کند. اساس این روش، تقریب مشتقات جزئی تابع نسبت به متغیر مکانی بر حسب جمع خطی مقادیر وزنی در توابع، در تمام نقاط گره‌ای حاکم بر مسئله می‌باشد. بنابراین مشتق m -ام تابع در i-امین نقطه در راستای محور مکانی r می‌تواند به صورت زیر بیان شود [۱٦]:

$$\frac{\partial^m f(r_i,\theta_j)}{\partial r^m}=\sum_{n=1}^{N_R}A_{in}^{(m)}f(r_n,\theta_j)\qquad for\quad \begin{array}{l} i=1,2,\ldots,N_R\\ j=1,2,\ldots,N_\Theta\end{array} \tag{۱-۲}$$

مشتق m-ام تابع در i-امین نقطه در راستای محور مکانی θ می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\frac{\partial^m f(r_i,\theta_j)}{\partial \theta^m}=\sum_{n=1}^{N_\Theta}A_{jn}^{(m)}f(r_i,\theta_n)\qquad for\quad \begin{array}{l} i=1,2,\ldots,N_R\\ j=1,2,\ldots,N_\Theta\end{array} \tag{۲-۲}$$

جاییکه $A_{ij}^{(m)}$ و $B_{ij}^{(m)}$ ماتریس ضرایب وزنی می‌باشند. همچنین N_R و N_Θ تعداد نقاط در راستای مکانی r و θ است.

برای محاسبه مشتق اول با استفاده از چند جمله‌ای لاگرانژ خواهیم داشت:

$$A_{ij}^{(1)}=\frac{M(x_i)}{(x_i-x_j).M^{(1)}(x_j)}\qquad for\quad i,j=1,2,\ldots,N_x\ ,i\neq j \tag{۳-۲}$$

جاییکه x می‌تواند یکی از دو متغیر r و θ باشد. همچنین،

$$M(x_i)=\prod_{j=1}^{N_x}(x_i-x_j)\qquad M^{(1)}(x_j)=\prod_{k=1,k\neq j}^{N_x}(x_j-x_k) \tag{٤-۲}$$

عناصر قطری ماتریس ضرایب از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$A_{ii}^{(1)}=-\sum_{j=1,j\neq i}^{N_x}A_{ij}^{(1)} \tag{٥-۲}$$

[۱] Gauss

برای محاسبه ماتریس ضرایب مشتقات دوم و بالاتر از روابط زیر استفاده می‌شود

$$A_{ij}^{(m)} = m.\left(A_{ii}^{(m-1)}.A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(m-1)}}{x_i - x_j} \right) \qquad for \quad i, j = 1,2,\ldots, N_x \;, i \neq j \tag{۲-۶-الف}$$

$$A_{ii}^{(m)} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N_x} A_{ij}^{(m)} \tag{۲-۶-ب}$$

به طور واضح مشاهده می‌شود که برای محاسبه ماتریس ضرایب وزنی مشتق دوم و بالاتر از ضرایب وزنی مشتق اول به طور کامل استفاده می‌شود.

۲-۲-۲. انتخاب فواصل نقاط گره‌ای

دقت اکثر روش‌های عددی بسیار حساس به نحوه توزیع نقاط گره‌ای می‌باشد. شو و همکارانش به بررسی اثر نحوه توزیع نقاط گره‌ای بر روی دقت جواب‌ها در مسائل تیر و صفحه پرداختند [۲۰]. آنها به این نتیجه رسیدند که کشیدن نقاط نزدیک مرزها به طرف مرزها، باعث بهبود قابل توجهی در جواب‌ها می‌گردد. توزیع بهینه نقاط گره‌ای (که بر اساس بهینه‌ترین پارامتر کشش می‌باشد)، بستگی به مرتبه مشتقات و تعداد نقاط استفاده شده دارد. حالت بهینه توزیع از ریشه‌های چند جمله‌ایهای متعامد به دست نمی‌آید. آنها همچنین به ارائه رابطه‌ای ساده و موثر برای کشیدن نقاط به طرف مرزها، که در ادامه مطرح می‌شود، پرداختند.

فرض می‌شود که مختصات استاندارد نقاط در محدوده‌ی $x \in [0,1]$ باشد.

یکی از انواع انتخاب فواصل نقاط گره‌ای، استفاده از ریشه‌های چند جمله‌ای چبیشف نوع اول، بصورت زیر است:

$$x_i = \frac{r_i - r_1}{r_N - r_1}, \qquad r_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2N_x}\pi\right) \qquad for \;\; i = 1,2,\ldots N_x \tag{۲-۷}$$