بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
گروه ریاضی کاربردی

کاربرد روش ماتریسی ژاکوبی برای حل معادلات تفاضلی مرتبه بالا

نگارنده
مهدیه پاکباز انجدانی

استاد راهنما
دکتر محمّدرضا اصلاحچی

مرداد ۱۳۹۱

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم مهدیه پاکبازانجدانی** رشته **ریاضی‌کاربردی** به شماره دانشجویی **۸۸۵۲۶۴۱۱۰۴** تحت عنوان: «**کاربرد روش ماتریسی ژاکوبی برای حل معادلات تفاضلی مرتبه بالا**» را در تاریخ **۱۳۹۱/۵/۴** از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر محمدرضا اصلاحچی	استادیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمحمد حسینی	استاد	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر خسرو تاجبخش	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر محمد مسجدجامعی	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر خسرو تاجبخش	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته است که در سال در دانشکده دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب مهدیه پاکباز اخدانی دانشجوی رشته ریاضی کاربردی مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: مهدیه پاکباز اخدانی

تاریخ و امضا: ۱۳۹۱/۱۲/۹

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب ......مهدیه بابا زاده خرازی...... دانشجوی رشته ......ریاضی کاربردی...... ورودی سال تحصیلی ......۱۳۹۸......
مقطع ...کارشناسی ارشد... دانشکده ......علوم پایه...... متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا: ....

تاریخ: ۱۳۹۹/۱۲/۹

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

اگر شایسته باشد

تقدیم به پدر و مادرم

و همه آن‌هایی که می‌خواهند بیشتر بدانند.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمدرضا اصلاحچی صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادر و خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

مهدیه پاکباز انجدانی
مرداد ۱۳۹۱

چکیده

حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل و معادلات تفاضلی و به دست آوردن جواب دقیق برای این معادلات معمولا دشوار است. با توجه به اینکه اغلب پدیده‌های فیزیکی توسط این معادلات مدل سازی می‌شوند نیازمند روش‌های عددی هستیم که بتوانند جواب معادلات دیفرانسیل و تفاضلی را تقریب بزنند. تفاضلات متناهی، عناصر متناهی و روش‌های طیفی روش‌های عددی هستند که برای حل تقریبی این معادلات مورد استفاده قرار می‌گیرند. به دلیل دقت بالا و سرعت همگرایی روش‌های طیفی به دیگر روش‌ها ترجیح داده می‌شوند. در روش‌های طیفی برای حل یک مسئله، جواب را به صورت یک سری قطع شده از توابع هموار تقریب می‌زنند و سعی دارند خطای تقریب را کنترل نمایند. روش‌های طیفی به سه گروه روش گالرکین، روش تاو و روش هم‌مکانی تقسیم می‌شوند که در آنها سعی می‌شود با استفاده از چند جمله‌ای‌ها متعامد باقیمانده حاصل از جایگذاری سری قطع شده در معادله مفروض حداقل شود. در روش هم‌مکانی برای پیدا کردن مجهولات مسئله، نقاط مجزایی به نام نقاط هم‌مکانی انتخاب می‌نماییم و سپس جواب عددی را طوری می‌یابیم که باقیمانده در نقاط هم‌مکانی صفر شود. در این پایان‌نامه حل ماتریسی معادلات تفاضلی خطی مرتبه m ام با ضرایب متغیر در نقاط هم‌مکانی ژاکوبی روی بازه $[a, b]$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین نتایج عددی، نمودارها، جداول ارائه شده است و به مقایسه این نتایج با نتایج عددی حاصل از برخی مراجع می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: معادلات تفاضلی خطی، چند جمله‌ای‌های ژاکوبی، روش‌های طیفی، روش هم‌مکانی

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱
معادلات تفاضلی

۱.۱ مقدمه

معادلات تفاضلی و اپراتورهای وابسته به این معادلات در مدل سازی ریاضی پدیده‌های فیزیکی نقش مهمی دارند. به وسیله تقریب معادلات دیفرانسیل یا معادلات تفاضلی و در نتیجه بدست آوردن جواب‌های عددی، می‌توان جواب‌های تقریبی این معادلات را مطالعه کرد. در برخی موارد معادلات تفاضلی با معادلات دیفرانسیل یا معادلات انتگرال ترکیب می‌شوند. معادلات تفاضلی ترکیب شده با معادلات دیفرانسیل در فرایندهای تصادفی ظاهر می‌شوند.

تعریف ۱.۱.۱. مقدار حاصل از تفاضل بزرگترین و کوچکترین اندیس تابع $y\left(x\right)$ مرتبه معادله تفاضلی نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. تابع $f(x)$ را که بر بازه $0 \leq x < \infty$ تعریف شده است، متناوب با دوره‌ی تناوب T گوییم هرگاه رابطه زیر برقرار باشد.

$$f(x+T)=f(x).$$

تعریف ۳.۱.۱. اپراتور L خطی گفته می‌شود، اگر برای هر y_1, y_2 و ثابت‌های α, β داشته باشیم:

$$L(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha L(y_1)+\beta L(y_2).$$

تعریف ۴.۱.۱. جواب عمومی معادله مرتبه‌ی r

$$F(n, y_n, y_{n+1}, \cdots, y_{n+r}) = 0.$$

تابعی است که شامل r ثابت دلخواه بوده و این تابع به ازای هر مجموعه‌ی معینی از ثابت‌ها در معادله فوق صدق می‌کند. بنابراین جواب عمومی معادله فوق به صورت ضمنی به شکل زیر می‌باشد.

$$g(x, y; C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0.$$

تعریف ۵.۱.۱. اگر در جواب عمومی یک معادله به ثابت‌ها مقادیر معین نسبت دهیم جواب‌های خصوصی به دست می‌آید.

تعریف ۶.۱.۱. تابع مولد[۱] دنباله $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

تعریف ۷.۱.۱. به ازای $0 < x < \infty$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

انتگرال فوق به ازای $0 < x < \infty$ همگرا است.

قضیه ۸.۱.۱. *(الف)معادله تابعی* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *برقرار است اگر* $0 < x < \infty$.

(ب) به ازای $n = 1, 2, 3, \cdots$ ، $\Gamma(n+1) = n!$.

برهان. برای اثبات به مرجع [۲۸] رجوع شود. □

تعریف ۹.۱.۱. معادله تفاضلی خطی ناهمگن مرتبه n ام زیر را در نظر بگیرید:

$$y(x+1) + p_1 y(x+n-1) + \ldots + p_n y(x) = R(x).$$

به فرم همگن این معادله، معادله مکمل [۲] می‌گویند.

[۱] Generating Function
[۲] Complementary Equation

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر تابع $f(x)$ در همسایگی λ بی‌نهایت بار مشتق پذیر باشد، آنگاه تابع $f(x)$ را می‌توان به صورت توان‌هایی از $(x-\lambda)$ به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}(x-\lambda)^n.$$

مجموع فوق را سری تیلور[۳] می‌نامیم و در حالتی که $\lambda=0$ سری مکلورن[۴] نامیده می‌شود.

معادلات تفاضلی خطی با متغیر مستقل که ممکن است پیوسته یا گسسته باشد بیان می‌شوند. هرگاه متغیر مستقل معادلات تفاضلی مرتبه r ام متغیر صحیح n باشند معادله تفاضلی به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$y_{n+r}=F(n,y_n,y_{n+1},\cdots,y_{n+r-1}). \qquad (۱.۱)$$

حال اگر متغیر صحیح n را با متغیر پیوسته x تعویض کنیم معادله تفاضلی به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$y(x+r)=F(x,y(x),y(x+1),\cdots,y(x+r-1)). \qquad (۲.۱)$$

توجه شود که تفاوت دو معادله فوق در انتخاب متغیر می‌باشد، در معادله (۱.۱) فقط متغیرهای صحیح قرار می‌گیرند در حالی که در معادله (۲.۱) تمام مقادیر ناحیه داده شده می‌توانند وارد شوند. معادله (۱.۱) معادله تفاضلی نامیده می‌شود و معادله (۲.۱) معادله تابعی یا معادله تفاضلی است. هرگاه فقط اعداد صحیح دامنه وارد معادله شوند شرایط معادله تابعی مشابه معادله تفاضلی می‌شود. در معادله تفاضلی جواب عمومی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$y_n=f(n,A). \qquad (۳.۱)$$

در رابطه (۳.۱) A ثابت دلخواه است. در معادله تابعی جواب عمومی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$y(x)=f(x,A(x)). \qquad (۴.۱)$$

در رابطه (۴.۱) $A(x)$ تابعی تناوبی با دوره تناوب واحد است.

در این پایان نامه بحث را به معادلات تفاضلی خطی با متغیر مستقل که ممکن است پیوسته یا گسسته

[۳] Taylor
[۴] Maclaurin

باشد محدود خواهیم کرد.
ادامه فصل به شرح زیر سازماندهی می‌شود. در بخش ۲.۱ به معرفی برخی نمادها و اپراتورهای معادلات تفاضلی می‌پردازیم. در بخش ۳.۱ معادلات تفاضلی خطی را معرفی می‌نماییم. بررسی این مورد که معادله تفاضلی چیست در بخش ۴.۱ انجام می‌شود و بخش ۵.۱ به چگونگی به وجود آمدن معادلات تفاضلی اختصاص دارد. در بخش ۶.۱ به بررسی برخی کاربردهای معادلات تفاضلی خطی می‌پردازیم.

۲.۱ نمادها و اپراتورها برای معادلات تفاضلی

فرض کنید مقادیر تابع $f(x)$ در نقاط $x_۰, x_۱, x_۲, \cdots$ به صورت توابع $f(x_۰), f(x_۱), f(x_۲), \cdots$ و $h = x_i - x_{i-۱}, i = ۱, ۲, ۳, \ldots$ داده شده باشند. تعاریف اپراتورهای مختلف نسبت به گام h همراه با مدل‌های گسسته به شرح زیر می‌باشد.در این بخش چگونگی به وجود آمدن معادلات تفاضلی را نشان می‌دهیم و در بخش‌های بعدی به بررسی اصولی در مورد چگونگی حل معادلات تفاضلی خواهیم پرداخت.

اپراتور انتقال:

$$Ef(x) = f(x+h), \qquad Ey_n = y_{n+۱}$$

اپراتور تفاضلی پیشرو:

$$\triangle f(x) = f(x+h) - f(x), \qquad \triangle y_n = y_{n+۱} - y_n.$$

رابطه اپراتور انتقال با اپراتور تفاضلی پیشرو به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\triangle \equiv E - ۱, \qquad \triangle y_n = (E-۱)y_n.$$

توجه شود توان‌های اپراتورهای گوناگون با یک روش طبیعی تعریف شده‌اند. برای مثال اپراتور انتقال زیر را در نظر بگیرید.

$$E^{۲}f(x) = E(E(f)) = E(f(x+h)) = f(x+۲h)$$

اپراتور تفاضلی پسرو:

$$\triangle f(x) = f(x) - f(x+h), \qquad \triangle y_n = y_n - y_{n-۱}.$$

رابطه اپراتور انتقال با اپراتور تفاضلی پسرو به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\nabla = ۱ - \frac{۱}{E} = \frac{E-۱}{E}.$$

در اینجا به شرح مثالی برای بدست آوردن اپراتور پسرو با استفاده از اپراتور انتقال می‌پردازیم.

$$\left[\frac{E-۱}{E}\right] f(x) = \frac{۱}{E}\left[f(x+h) - f(x)\right] = f(x) - f(x-h) = \nabla f(x).$$

اپراتور تفاضلی مرکزی:

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{z}\right) - f\left(x - \frac{h}{z}\right), \qquad \delta y_n = y_{n+\frac{۱}{۲}} - y_n - \frac{۱}{۲}.$$

رابطه اپراتور انتقال با اپراتور تفاضلی مرکزی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\delta = E^{\frac{۱}{۲}} - E^{\frac{-۱}{۲}}.$$

اپراتور تفاضلی میانگین:

$$\mu f(x) = \frac{۱}{۲}\Big[f(x+\frac{h}{۲}) + f(x-\frac{h}{۲})\Big], \qquad \mu y_n = \frac{۱}{۲}\Big[y_{(n+\frac{h}{۲})} + y_{(n-\frac{h}{۲})}\Big].$$

اپراتور دیفرانسیل:

$$Df(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(E^{\alpha}-1)f(x)}{\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} = f'(x).$$

۳.۱ معادلات تفاضلی خطی

موفقیت در حل معادلات تفاضلی مانند معادلات دیفرانسیل معمولا به استفاده از برخی ویژگی‌هایی مشخص در ساختار معادله یا اطلاعاتی که در مورد خصوصیات جواب معادله داریم وابسته است. بنابراین به بررسی کلاس‌های خاصی از معادلات تفاضلی با توجه به خصوصیات جواب می‌پردازیم.
در این بخش ابتدا معادلات تفاضلی خطی مرتبه اول و دوم را معرفی کرده و به بررسی ویژگی‌های این معادلات می‌پردازیم، سپس فرم کلی معادله تفاضلی خطی مرتبه m ام را معرفی می‌نماییم. معادلات تفاضلی مانند معادلات دیفرانسیل می‌توانند ضرایب ثابت یا ضرایب متغیر داشته باشند. حل معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت، مشابه حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت انجام می‌شود. هرگاه معادله تفاضلی شامل جملات $y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{n+r}$ از درجه اول همراه با ضرایب ثابت یا ضرایب متغیر یعنی توابعی از متغیر مستقل n باشد، چنین معادله‌ای یک معادله تفاضلی خطی از مرتبه r ام است. معادله تفاضلی خطی مرتبه r ام با ضرایب متغیر به صورت زیر بیان می‌شود.

$$P_n y_n + P_{n-1} y_{n-1} + \cdots + P_0 y = q_n$$

مثال ۱.۳.۱. معادله زیر یک معادله تفاضلی خطی مرتبه دوم است.

$$P_2 y_{n+2} - 5y_n = q.$$

مثال ۲.۳.۱. معادله زیر یک معادله تفاضلی غیر خطی است.

$$y_n y_{n+2} - 5y_n = r.$$