بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

رسالە

برای دریافت درجه دکتری در رشتەی

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

گروه‌های آبلی و مدول‌های بی‌تاب از رتبه متناهی

استاد راهنما

دکتر احد مهدیزاده اقدم

استاد مشاور

دکتر محمد شهریاری

پژوهشگر

علیرضا نجفی‌زاده

تیر ۱۳۸۸

تقدیم به:

خانواده ام

بنام خدا

و مَنْ لَمْ يَشْكُرِ الْمَخلوق لَمْ يَشْكُرِ الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر احد مهدیزاده اقدم صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان این مجموعه به اتمام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر محمد شهریاری که زحمات مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.

از جناب آقایان دکتر محمدرضا رجب‌زاده مقدم، دکتر علی‌اکبر مهرورز و دکتر رضا نقی پور که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

از خانم پروفسور سیلوانا باتزونی از دانشگاه پادوا ایتالیا که با دعوت بنده به آن دانشگاه زمینه آشنایی مرا از لحاظ علمی و فرهنگی با یک محیط معتبر علمی در اروپا ایجاد کرده و همچنین مسئولیت بنده را در طول حضورم در آن دانشگاه تقبل فرمودند که بدون شک راهنمایی‌های مفید ایشان در طول بحث‌های متعددی که بنده با ایشان داشتم و موثر در بخشی از این رساله بود، صمیمانه قدردانی می‌نمایم. همچنین از اعضای آن دانشگاه که در طول اقامت شش ماهه بنده، این حضور را برای من تسهیل نمودند سپاسگزاری می‌نمایم.

ازکلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی، دوستان عزیزم به ویژه دکترمرتضی فغفوری و نیز کارکنان محترم دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تبریز که در این مدت زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

علیرضا نجفی زاده
۱۳۸۸

نام خانوادگی دانشجو: نجفی‌زاده	نام: علیرضا

عنوان: گروه‌های آبلی و مدول‌های بی‌تاب از رتبه متناهی

استاد راهنما: دکتر احد مهدیزاده اقدم

استاد مشاور: دکتر محمد شهریاری

مقطع تحصیلی: دکتری	رشته: ریاضی محض	گرایش: جبر	دانشگاه تبریز
دانشکده‌ی علوم ریاضی	تاریخ فارغ‌التحصیلی: تیر ۱۳۸۸		تعداد صفحه: ۱۰۴

کلید واژه‌ها: رتبه، تایپ، هم تایپ، پوچ به مدول یک زیرگروه، زیرگروه مربعی،حوزه و زیرمدول مربعی.

چکیده

هدف این رساله تحقیق روی بخشی از گروه‌های آبلی با رتبه متناهی و مدول‌ها روی حوزه‌های جابجایی می باشد. مطالعه گروه‌های آبلی دارای سابقه زیاد بوده و بررسی خواص و ساختار آنها با وابسته کردن پایاهای متفاوتی انجام می‌گیرد. مفهوم مدول که بعداً معرفی شده است را می‌توان بعنوان توسیعی برای گروه‌های آبلی در نظر گرفت. لذا می‌توان انتظار داشت برخی از مفاهیم گروه‌های آبلی در مدول‌ها نیز قابل بیان بوده و نیز برخی از خواص آنها به مدول‌ها نیز تسری یابد. بنابراین با مطالعه این خواص و مفاهیم، امکان توسیع این مفاهیم به مدول‌ها را نیز بررسی خواهیم کرد.
در این رساله با استفاده از مجموعه تایپ و هم‌تایپ یک گروه آبلی، ثابت می‌شود که هر حلقه روی یک گروه آبلی بی‌تاب تجزیه‌ناپذیر از رتبه ۲ یک حلقه جابجایی و شرکت پذیر می‌باشد و در صورتی که گروه مورد بحث همگن نیز باشد آنگاه حلقه دارای عضو نیم همانی خواهد بود. در ادامه مفهوم زیرگروه مربعی یک گروه آبلی را که بخش اعظمی از این رساله را به خود اختصاص می‌دهد بررسی کرده و به بررسی خالص بودن این زیرگروه و پوچ بودن گروه خارج قسمتی گروه آن می‌پردازیم. در فصل آخر به توسیعهایی از مفاهیم گروه‌های آبلی در مدولها با معرفی زیرمدول مربعی یک مدول و بررسی خواص آن می‌پردازیم.

فهرست مطالب

مقدمه

مطالعه گروه‌های آبلی نامتناهی در سه شاخه مهم گروه‌های آبلی تابدار، بی‌تاب و آمیخته انجام می‌گیرد. با توجه به اینکه در بخش گروه‌های آبلی تابدار پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای انجام شده، لذا بیشتر این مطالعات به ویژه در موضوع تعیین ساختار آنها در دو شاخه دیگر مطرح می‌گردند. مهمترین موضوع در بحث گروه‌های آبلی بی‌تاب، مساله ساختار آنها می‌باشد. برخلاف گروه‌های تابدار که رده بسیاری از آنها توسط پایاهای مختلفی مشخص شده‌اند، در گروه‌های بی‌تاب فقط رده‌های محدودی شناسایی شده‌اند که شامل گروه‌های از رتبه ۱ و گروه‌های کاملاً تجزیه پذیر می‌باشند. با توجه به اینکه گروه‌های آبلی بی‌تاب از رتبه n در واقع زیرگروه‌های جمعی فضای برداری n−بعدی $\mathbb{Q}^n$ می‌باشند، لذا مجموعه گروه‌های آبلی بی‌تاب از رتبه r، $(1 \leq r \leq n)$ را می‌توان با $S(\mathbb{Q}^n)$، مجموعه تمام زیرگروه‌های غیرصفر جمعی $\mathbb{Q}^n$، یکی درنظر گرفت. در سال ۱۹۳۷ کوروش [۳۰] و مالسف [۳۲] با ارایه یک پایای کامل برای گروه‌های آبلی که در واقع کلاس هم‌ارزی از دنباله‌های نامتناهی $(M_p)_{p\in\mathbb{P}}$ از ماتریس‌های $M_p \in GL(\mathbb{Q}_p)$ بود، این گروه‌ها را توصیف کردند ولی همان‌طور که فوکس [۲۴، بخش ۹۳] بیان می‌کند کلاس‌های هم‌ارزی وابسته بقدری پیچیده می‌باشند که تعیین هم‌ارز بودن آنها مشکل‌تر از تعیین یکریخت بودن گروه‌های وابسته آنها می‌باشد. به جرات می‌توان گفت که اولین مطالعات مفید و قابل استفاده روی گروه‌های آبلی بی‌تاب

در سال ۱۹۳۷ توسط بئر [۸] آغاز شد که در واقع ساختار گروه‌های آبلی بی تاب از رتبه ۱ را تعیین کرد. از همان تاریخ مقالات زیادی در زمینه گروه‌های آبلی بی‌تاب از رتبه متناهی با نسبت دادن پایاهایی نظیر رتبه، مجموعه تایپ، گروه $Mult(A)$ یعنی تمام ضربهای روی گروه A و... خواص مختلف این گروه‌ها مطالعه شده است ولی لازم به ذکر است که با توجه به پیچیدگی ساختار آنها بیشتر مسایل مربوط به آنها بدون حل مانده است. در واقع گرچه هر گروه آبلی بی‌تاب از رتبه متناهی به صورت جمع مستقیم گروه‌های آبلی بی‌تاب تجزیه‌ناپذیر (نه لزوماً رتبه ۱) نوشته می‌شود ولی با توجه به مثال‌ها و قضایایی که فوکس [۲۴]، بخش‌های ۹۰ و ۹۱ بیان کرده است، چنین تجزیه‌ای نه تنها منحصربفرد نیست بلکه تعداد جمعوندهای ظاهر شده در این تجزیه‌ها برابر نمی‌باشند. به عبارت دیگر مثال‌های موجود در این بخش‌ها نشان می‌دهند که برای یک گروه بی‌تاب از رتبه متناهی می‌توان تجزیه‌های مختلف غیر یکریخت را نوشت که در نتیجه تعیین ساختار آنها را مشکل‌تر می‌نماید. البته جانسون [۲۷] در سال ۱۹۵۹ با تعریف شبه یکریختی برای گروههای آبلی بی‌تاب از رتبه متناهی یک نوع تجزیه منحصربفرد برای این گروه‌ها تحت شبه‌یکریختی ایجاد می‌نماید. بعد در سال ۱۹۶۱ بیومونت و پیرس [۱۳] با استفاده از برخی پایاها، گروه‌های آبلی بی‌تاب از رتبه ۲ را تحت شبه‌یکریختی رده بندی می‌کنند. اخیراً نیز فومین [۲۱] با ایجاد برخی پایاهای دیگر گروه‌های آبلی بی‌تاب از رتبه ۳ را تحت شبه‌یکریختی رده‌بندی می‌کند. از طرفی چون هر گروه آبلی را می‌توان به عنوان یک $\mathbb{Z}$—مدول نیز در نظرگرفت بنابراین سوالات مشابهی در مورد مدولها روی رده‌های مختلفی از حوزه‌های جابجایی مطرح بوده است و پاسخ به آنها به بررسی خواص مدولها و همچنین در بعضی مواقع به رده‌بندی حوزه‌هایی که مدولها روی آنها بررسی می‌شوند منجر شده است. البته لازم به ذکر است که مهمترین این مطالعات برای اولین بار در سال ۱۹۵۴ توسط کاپلانسکی [۲۸] انتشار یافت و نیز اخیراً فوکس و سالچه [۲۵] آخرین تحقیقات انجام شده در این زمینه را جمع آوری کرده‌اند.

از این رساله مقالات زیر استخراج شده‌اند:

1. A.M. Aghdam and A. Najafizadeh, A note on a paper of R.A. Beaumont and R.J. Wisner on torsion-free groups: "Rings with additive group which is a torsion-free group of rank two". *Arab. J. Sci. Eng.* Sect. A Sci., 32(2):203–204, 2007.

2. A.M. Aghdam and A. Najafizadeh, On torsion-free rings with indecomposable additive group of rank two. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 32(2):199-208, 2008.

3. A.M. Aghdam and A. Najafizadeh, Square subgroup of rank two abelian groups. *Colloquim Mathematicum* (to appear).

4. A.M. Aghdam and A. Najafizadeh, Square submodule of a module. *Mediterrenian Journal of Mathematics* (to appear).

فصل ۱

پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

فصل نخست این رساله مروری بر منابع ذکر شده در بخش مراجع و بیان مفاهیم پایه و قضایای مورد نیاز در فصلهای آتی می‌باشد.

۲.۱ گروه اعداد p–ادیک

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم $(P, \leq)$ مجموعه‌ای جزأً مرتب باشد. دراین‌صورت P را یک مشبکه نامند هرگاه هر دو عضو $a, b \in P$ دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین باشند که آنها را به ترتیب با نمادهای $a \vee b$ و $a \wedge b$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱ مجموعه تمام زیرگروههای یک گروه آبلی A یعنی $P(A)$، مجموعه‌ای جزأً مرتب با رابطه شمول تشکیل می دهد. بعلاوه $P(A)$ یک مشبکه می‌باشد زیرا هر دو زیرگروه دلخواه X و Y از A دارای کوچکترین کران بالای $X + Y$ و بزرگترین کران پایین $X \cap Y$ می‌باشند.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنیم $L(A)$ مشبکه تمام زیرگروههای A باشد. منظور از یک فیلتر مانند D در آن زیرمجموعه‌ای از زیرگروههای A است که در شرایط زیر صدق می کنند

۱) $\phi \notin D$،

۲) اگر $X \in D$ و $X \subset Y \subseteq A$ آنگاه $Y \in D$،

۳) اگر X و Y متعلق به D باشند آنگاه $X \cap Y \in D$.

دراین‌صورت اعضای D را همسایگی‌های باز حول 0 و به‌ازای هر $a \in A$ و $U \in D$ هم مجموعه‌های $a+U$ همسایگی‌های باز حول a نامیده می‌شوند. مجموعه تمام این همسایگی‌های باز اعضای پایه‌ای برای یک توپولوژی ارایه می‌دهند، که آن را D–**توپولوژی** نامند. این توپولوژی هاسدورف است اگر و تنها اگر $\bigcap_{U\in D} U = 0$.

حال اگر گروه‌های موجود در D را با مجموعه اندیس گذاری مانند I به صورت U_i اندیس‌گذاری کنیم و قرار دهیم $U_i \geq U_j$ هرگاه $i \leq j$، دراین‌صورت مفاهیم زیر قابل بیان می‌باشند.

تعریف ۳.۲.۱ منظور از یک **دنباله** $\{a_i\}_{i\in I}$ در یک گروه A، یک تابع از مجموعه اندیس گذار I به A می‌باشد. همچنین گوییم دنباله $\{a_i\}_{i\in I}$ دارای حد a می‌باشد هرگاه

$$\forall i \in I,\ \ \exists j \in I,\ \ \forall k(k \geq j \Rightarrow a_k - a \in U_i).$$

تعریف ۴.۲.۱ یک دنباله $\{a_i\}_{i\in I}$ را **کوشی** گویند هرگاه

$$\forall i \in I,\ \ \exists j \in I,\ \ \forall k, k'(k, k' \geq j \Rightarrow a_k - a_{k'} \in U_i).$$

تعریف ۵.۲.۱ گروه A همراه با یک توپولوژی دلخواه روی آن تام نامیده می‌شود هرگاه هاسدورف بوده و هر دنباله کوشی در آن دارای حد باشد.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنیم A گروهی توپولوژیکی و $\{U_i\}_{i\in I}$ تمام همسایگی‌های حول صفر باشند. دراین‌صورت هر دنباله $\{a_i\}_{i\in I}$ را می‌توان به عنوان عضوی از A^I، ضرب مستقیم I نسخه از A، درنظر گرفت. فرض کنیم C زیرگروهی از A باشد که شامل دنباله‌های کوشی است و همچنین فرض کنیم E زیرگروهی از C باشد که شامل تمام دنباله‌های کوشی همگرا به صفر است. دراین‌صورت $\widehat{A} = C/E$ یک گروه توپولوژیکی هاسدورف می‌باشد که آن را تتمیم گروه A می‌نامند.

قضیه ۷.۲.۱ فرض کنیم A یک گروه آبلی باشد. دراینصورت گروه $\widehat{A}$ یک گروه تام و شامل A است.

اثبات. به [۲۳، قضیه ۶.۱۳] رجوع شود. ■

برای ساختن گروه اعداد p-ادیک، فرض کنیم $\mathbb{Q}_p$ زیرگروهی از اعداد گویا باشد که مخرج آنها نسبت به p اول باشد که همراه با عمل ضرب معمولی تشکیل یک حلقه بدون مقسوم علیه صفر می‌دهد و تنها ایده‌آلهای آن ایده‌آلهای اصلی $\mathbb{Q}_p(p^k)$ می باشند $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. حال با در نظر گرفتن این ایده‌آلها به عنوان همسایگی‌های حول صفر (فیلتر D برای گروه $\mathbb{Q}_p$)، تتمیم گروه $\mathbb{Q}_p$ را با نماد $\mathbb{Q}_p^*$ نشان می‌دهیم که حلقه‌ای است با ایده‌آلهای $\mathbb{Q}_p^*(p^k)$ برای $k = 0, 1, 2 \ldots$. بعلاوه گروه جمعی $\mathbb{Q}_p^*$ را با نماد J_p نشان می‌دهیم.

برای نمایش اعضای $\mathbb{Q}_p^*$ فرض کنیم $\{t_0, t_1, \cdots, t_{p-1}\}$ مجموعه‌ای از نمایندگان برای حلقه $\mathbb{Q}_p/p\mathbb{Q}_p$ باشد(به عنوان مثال می‌توان مجموعه $\{0, 1, \cdots, p-1\}$ را انتخاب کرد). دراین‌صورت $\{p^k t_0, p^k t_1, \cdots, p^k t_{p-1}\}$ مجموعه‌ای از نمایندگان برای $p^k\mathbb{Q}_p/p^{k+1}\mathbb{Q}_p$ خواهد بود. حال فرض کنید π عضو دلخواهی از $\mathbb{Q}_p^*$ باشد دراین‌صورت بنابه تام بودن $\mathbb{Q}_p^*$ دنباله‌ای مانند $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از اعضای $\mathbb{Q}_p^*$ وجود دارد به طوری‌که $\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$. در نتیجه بنا به تعریف دنباله کوشی، از مرحله‌ای به بعد تمام a_n ها در یک هم‌مجموعه به مدول $p\mathbb{Q}_p$ قرار می‌گیرند. فرض کنیم در هم مجموعه‌ای قرار گیرند که نماینده آن s_0 باشد و در نتیجه تمام $a_n - s_0$ ها (به غیر از تعداد متناهی) از $p\mathbb{Q}_p$ متعلق به یک هم‌مجموعه به مدول $p^2\mathbb{Q}_p$ قرار می‌گیرند. اگر به این ترتیب ادامه دهیم دراین‌صورت دنباله یکتای $\{s_i p^i\}_{i=0}^{i=\infty}$ به π وابسته می‌شود لذا

$$\pi = s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + \ldots + s_n p^n + \ldots \quad (s_n = 0, 1, \ldots, p-1).$$

بنابراین می‌توان عضو π از $\mathbb{Q}_p^*$ را با سری $\sum_{i=0}^{i=\infty} s_i p^i$ متناظر کرد که در آن ضرایب از $\{t_0, t_1, \ldots, t_{p-1}\}$ یابرای سهولت از $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ انتخاب می‌شوند.

در $\mathbb{Q}_p^*$ اعمال جمع و ضرب به صورت زیر انجام می‌گیرد. فرض کنیم

$$\begin{aligned}\pi &= s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + \ldots + s_n p^n + \ldots, \quad (s_n = 0, 1, \ldots, p-1),\\ \rho &= r_0 + r_1 p + r_2 p^2 + \ldots + r_n p^n + \ldots, \quad (r_n = 0, 1, \ldots, p-1)\end{aligned}$$

دو عدد p–ادیک باشند در این‌صورت

$$\begin{aligned}\pi + \rho &= q_0 + q_1 p + q_2 p^2 + \ldots + q_n p^n + \ldots\\ \pi . \rho &= q'_0 + q'_1 p + q'_2 p^2 + \ldots + q'_n p^n + \ldots\end{aligned}$$

که در آنها داریم:

$$\begin{aligned}q_0 &= s_0 + r_0 - k_0 p\\ &\vdots\\ q_n &= s_n + r_n + k_{n-1} - k_n p\\ q'_0 &= s_0 r_0 - m_0 p\\ &\vdots\\ q'_n &= s_0 r_n + s_1 r_{n-1} + \cdots + s_n r_0 + m_{n-1} - m_n p\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\mathbb{Q}_p^*$ یک حوزه صحیح است میدان کسرهای آن که میدان اعداد p–ادیک نامیده می‌شود شامل اعضایی به صورت

$$\pi = s_{-m} p^{-m} + s_{-m+1} p^{-m+1} + \cdots + s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + \cdots + s_n p^n + \cdots,$$

می باشد که در آن $s_i = 0, 1, \cdots, p-1$. گروه اعداد p–ادیک نقش مهمی در گروه‌های آبلی ایفا می‌کند به ویژه در ارایه مثالهای نقض برای برخی حالات استفاده فراوان دارد. این گروه دارای خواص زیادی می‌باشد که در فصل بعد درباره آنها بحث خواهیم کرد.

۳.۱ استقلال خطی و رتبه

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم A یک گروه آبلی باشد. مجموعه $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ از اعضای ناصفر A را مستقل خطی می نامند هرگاه از رابطه

$$n_1a_1 + n_2a_2 + \cdots + n_ka_k = 0$$

نتیجه شود $n_1a_1 = n_2a_2 = \cdots = n_ka_k = 0$ که در آن $n_1, n_2, ..., n_k$ اعداد صحیح دلخواهی می‌باشند. این بدان معنی است که $n_i = 0$ هرگاه $o(a_i) = \infty$ و $o(a_i)|n_i$ هرگاه $o(a_i)$ متناهی باشد. یک مجموعه نامتناهی از اعضای A را مستقل نامند هرگاه هر زیرمجموعه متناهی از آن مستقل باشد. همچنین یک مجموعه از اعضای A را وابسته می‌نامند هرگاه مستقل نباشد.

تعریف ۲.۳.۱ مجموعه مستقل X از گروه‌آبلی A را **مستقل ماکسیمال** گویند هرگاه هیچ مجموعه مستقلی از A اکیداً شامل X نباشد. به عبارت دیگر اگر $0 \neq g \in A$ آنگاه $X \cup \{g\}$ مجموعه مستقل نباشد.

تعریف ۳.۳.۱ اگر A یک گروه آبلی دلخواه باشد آنگاه کاردینال مجموعه مستقل ماکسیمال آن را رتبه A نامیده و با نماد $r(A)$ نشان می‌دهیم. همچنین کاردینال زیرمجموعه‌ای از مجموعه مستقل ماکسیمال، شامل عناصر از مرتبه‌های بینهایت را با $r_0(A)$ و زیرمجموعه شامل عناصر از مرتبه‌های توانهای عدد اول p را با $r_p(A)$ نشان می‌دهیم و به ترتیب رتبه **بی تاب** و p–رتبه گروه A می‌نامیم.

قضیه ۴.۳.۱ رتبه‌های $r(A)$، $r_0(A)$ و $r_p(A)$ برای هر گروه آبلی A پایا هستند.

اثبات. به [۲۳، صفحه ۸۶] رجوع شود. ■

مثال ۲ اعداد گویای $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ گروه‌های رتبه ۱ بی‌تاب و تابدار می‌باشند. در واقع هر دو عضو غیرصفر از این دو گروه با یکدیگر وابسته هستند. همچنین ثابت می‌شود که هر گروه از رتبه ۱ با زیرگروه‌هایی از این گروه‌ها یکریخت می‌باشند [۲۳، صفحه ۸۶].

تعریف ۵.۳.۱ گروه آبلی A را **هم‌دوری** نامند هرگاه عدد صحیح مثبتی مانند n و عدد اولی چون p وجود داشته باشند بطوریکه $A \cong \mathbb{Z}_{p^n}$ یا $A \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

تعریف ۶.۳.۱ زیرگروه B از گروه آبلی A را **اساسی** گویند هرگاه اشتراک آن با هر زیرگروه غیرصفر A یک گروه غیرصفر باشد.

قضیه ۷.۳.۱ یک مجموعه مستقل M در گروه آبلی A ماکسیمال است اگر وتنها اگر $< M >$ یک زیرگروه اساسی A باشد.

اثبات. به [۲۳، قضیه ۲.۱۶] رجوع شود. ■

تعریف ۸.۳.۱ یک گروه آبلی بی‌تاب را **کاملاً تجزیه پذیر** گویند هرگاه بتوان آن را به صورت جمع مستقیم گروه‌های از رتبه ۱ نوشت.

مثال ۳ هر گروه آبلی آزاد یک گروه کاملاً تجزیه‌پذیر می‌باشد.

تعریف ۹.۳.۱ گروه A را **تجزیه‌ناپذیر** گویند هرگاه هیچ جمعوندی مستقیم به غیر از 0 و خودش نداشته باشد.

مثال ۴ هر گروه از رتبه ۱ تجزیه‌ناپذیر است.

۴.۱ بخش پذیری

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنیم A گروهی آبلی و x عضوی غیرصفر از آن باشد. فرض کنیم p عددی اول باشد. دراین‌صورت p–**ارتفاع** x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$h_p(x) = Sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists y \in A \ : \ p^n y = x\}.$$

اگر مجموعه $\{n \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in A; p^n y = x\}$ کراندار باشد، آنگاه p–ارتفاع x عدد صحیح نامنفی است و در غیر این‌صورت آن را ∞ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲.۴.۱ فرض کنیم p یک عدد اول باشد. گروه آبلی A را p–**بخش پذیر** نامند هرگاه برای هر عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $p^n A = A$. بعلاوه آن را **بخش پذیر** نامند هرگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $nA = A$.

جمع مستقیم تمام زیرگروه‌های بخش‌پذیر یک گروه A، یک زیرگروه بخش‌پذیر از آن گروه تشکیل میدهد، که آن را با نماد $d(A)$ نشان می‌دهیم و همواره جمعوند مستقیم A می‌باشد.

تعریف ۳.۴.۱ گروه آبلی A را **تحویل یافته** نامند هرگاه $d(A) = 0$.

مثال ۵ هر گروه آبلی آزاد تحویل یافته است زیرا $\mathbb{Z}$ تحویل یافته است.

لم ۴.۴.۱ فرض کنیم A گروهی آبلی باشد. دراین‌صورت

۱) اگر D یک زیرگروه بخش پذیر A باشد آنگاه D جمعوند مستقیم A می‌باشد،

۲) A به صورت جمع مستقیم یک گروه بخش پذیر $d(A)$ و یک گروه تحویل یافته C نوشته می‌شود. به عبارت دیگر داریم

$$A = d(A) \oplus C,$$

که گروه $d(A)$ توسط A بطور یکتا تعیین می‌شود و گروه C نیز تا حد یکریختی یکتاست.

اثبات. به [۲۳، قضایای ۲.۲۱ و ۳.۲۱] رجوع شود. ■

مثال ٦ ساده‌ترین مثال‌های گروه‌های بخش‌پذیر، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ می‌باشند.

قضیه بعد بیان می‌کند که گروه‌های بخش پذیر بصورت جمع‌های مستقیم این دو گروه هستند.

قضیه ۵.۴.۱ فرض کنیم A گروهی آبلی و بخش پذیر باشد. دراین‌صورت

$$A \cong \bigoplus_{r_0(A)} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p} [\bigoplus_{r_p(A)} \mathbb{Z}_{p^\infty}].$$

اثبات. به [۲۳، قضیه ۱.۲۳] رجوع شود. ■

قضیه ٦.۴.۱ هر گروه آبلی A را می‌توان در یک گروه بخش پذیر نشانید. کوچکترین چنین گروهی را پوسته بخش پذیر A گویند که تا حد یکریختی یکتاست.

اثبات. رجوع شود به [۲۳، قضیه ۱.۲۴]. ■

تعریف ۷.۴.۱ یک زیرگروه B از گروه آبلی A را **کاملاً پایا** نامند هرگاه بازای هر α از $End_{\mathbb{Z}}(A)$ داشته باشیم $\alpha(B) \subseteq B$.

مثال ۷ گروه $\mathbb{Q}$ تنها زیرگروه کاملاً پایای غیرصفر $\mathbb{Q}$ است. در واقع اگر A زیرگروهی کاملاً پایا و غیرصفر از اعداد گویا باشد آنگاه برای هر $\alpha \in End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ داریم $\alpha.A \subseteq A$ یعنی A بخش پذیر است لذا $A \cong \mathbb{Q}$.

۵.۱ زیرگروههای خالص

تعریف ۱.۵.۱ فرض کنیم p یک عدد اول و B زیرگروهی از گروه آبلی A باشد. دراین‌صورت B را p−**خالص** نامند هرگاه برای هر عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $p^nB = B \cap p^nA$. بعلاوه آن را زیر گروه **خالص** نامند هرگاه برای هر عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $nB = B \cap nA$.

لم ۲.۵.۱ فرض کنیم A گروهی آبلی باشد. دراین‌صورت

۱) هر جمعوند مستقیم A زیرگروهی خالص از آن است. بعلاوه خود گروه و زیرگروه بدیهی آن زیرگروه‌های خالص بدیهی هر گروه می‌باشند،

۲) تنها زیرگروه‌های خالص $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ زیرگروه‌های بدیهی هستند،

۳) در هر گروه آبلی بی‌تاب، اشتراک تمام زیرگروه‌های خالص، مجدداً زیرگروهی خالص است. بنابراین برای زیرمجموعه S از یک گروه آبلی می‌توان زیرگروه خالص مینیموم شامل S که در واقع اشتراک تمام زیرگروه‌های خالص شامل S می‌باشد را درست کرد که آنرا با نماد $< S >^*$ نشان داده و زیرگروه خالص تولید شده توسط S می‌نامند.

اثبات. به [۲۳، صفحه ۱۱۴] رجوع شود. ■

لم ۳.۵.۱ فرض کنیم A گروهی آبلی باشد. دراین‌صورت

۱) اگر A شامل عضوی از مرتبه متناهی باشد، آنگاه شامل جمعوندی مستقیم هم‌دوری می‌باشد،

۲) هر گروه آبلی تجزیه ناپذیر A، یک گروه بی‌تاب یا هم‌دوری است.

اثبات. به [۲۳، بخش ۲۷] رجوع شود. ■