دانشگاه کردستان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

بررسی ویژگی‌های $C(X)$ به پیمانه ساکل در مقایسه با $C(X)$

پژوهشگر:

شیوا فتاحی

استاد راهنما:

دکتر مصطفی قادرمزی

استاد مشاور:

دکتر علی سلیمان‌جهان

۱۳۹۲

چکیده

فرض کنیم $C_F(X)$ ساکل $C(X)$ باشد. نشان می‌دهیم که هر ایده‌ال اول در $C(X)/C_F(X)$ اساسی است. برای هر $h \in C(X)$، ثابت می‌کنیم هر ایده‌ال اول (z- ایده‌ال) از $C(X)/(h)$ اساسی است اگر و تنها اگر مجموعه $Z(h)$ از صفر مجموعه‌های h شامل نقاط منفرد نباشد ($intZ(h) = \emptyset$) . ثابت شده است که $dimC(X) \geqq dim(C(X)/C_F(X))$ که $dimC(X)$ بعد گلدی $C(X)$ می‌باشد، و نامساوی ممکن است اکید باشد. همچنین به ویژگیهای جبری فضاهای فشرده با حداکثر نقاط منفرد شمارا می‌پردازیم. برای هر ایده‌ال اساسی E در $C(X)$ مشاهده می‌کنیم $E/C_F(X)$ در $C(X)/C_F(X)$ اساسی است اگر و تنها اگر مجموعه نقاط منفرد X متناهی باشند.

واژه‌های کلیدی: ایده‌ال اساسی، نقاط منفرد، حلقه خارج قسمتی $C(X)$ به هنگ ساکل، ایده‌ال اصلی، z -ایده‌ال، ایده‌ال اول، ایده‌ال شمارا مولد.

فهرست مطالب

پیشگفتار

فرض کنید $C(X)$ حلقه حقیقی مقدار توابع پیوسته روی فضای نامتناهی هاوسدرف کاملا منظم X، و C^* زیر حلقه‌ای از توابع کراندار آن باشد. ساکل $C(X)$ را با $C_F(X)$ نمایش می‌دهیم که با مجموع همه ایده‌الهای مینیمال $C(X)$، و اشتراک همه ایده‌الهای اساسی در $C(X)$، برابر است. می‌دانیم $C_F(X) \neq 0$ اگر و تنها اگر X دارای نقاط منفرد باشد، اگر مجموعه نقاط منفرد X متناهی باشد آنگاه $C(X)/C_F(X) \cong C(Y)$ که در آن Y مجموعه نقاط نامنفرد X می‌باشد. در این حالت نتیجه می‌دهد که $C(X)/C_F(X) \cong eC(X)$ که در آن $e^2 = e \in C(X)$ که $C(X)/C_F(X)$ به عنوان یک حلقه است که ویژگیهای جبری $C(X)$ را دارد. در حالت کلی $C(X)/C_F(X)$ با $C(Y)$، ممکن است برای هر فضای توپولوژی Y یکریخت نباشد.

هیچکدام از دو حلقه جزئا مرتب $C(X)$ و $C_F(X)$ نمی‌توانند کاملا مرتب باشند (مرجع [۱۵]، ۵.۴).

هدف اصلی در این پایان نامه آشکار کردن رابطه بین این دو حلقه و بدست آوردن این رابطه واطلاعاتی در مورد X می‌باشد. رئوس مطالب در زیر آمده است:

بعد از یاداوری نتایج مقدماتی در فصل اول و دوم، که مکررا در بخشهای بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، بخش سوم مربوط به نقش ایده‌الهای اساسی در حلقه $C(X)/C_F(X)$ است. بویژه نشان داده می‌شود که هر ایده‌ال اول از $C(X)/C_F(X)$ اساسی است و ویژگی‌های فضای توپولوژیکی X، که در آن برای هر ایدال اساسی E، $E/C_F(X)$ در $C(X)/C_F(X)$ اساسی باشد مشخص شده است. در قسمت آخر بخش سه نشان داده می‌شود که بعد گلدی حلقه اخیر کمتر از $C(X)$ نیست. این نتیجه و این حقیقت که تنها مفهوم جدید از بعد گلدی نامتناهی است در مرجع [۱۰] مورد توجه قرار گرفته است. مثال‌های متفاوتی از حلقه‌های با بعد گلدی دلخواه پیدا می‌کنیم. همچنین مشاهده می‌کنیم که برای هر کاردینال غیر قابل دسترس مانند λ،

فضای فشردهX با بعد صفر وجود دارد بطوری که بعد گلدی از $C(X)$ برابر λ است.

در فصل چهارم به مطالعه z-ایده‌الها در $C(X)/C_F(X)$ می‌پردازیم و نشان می‌دهیم مشابه $C(X)$ هستند هر ایده‌ال و رادیکال آن در $C(X)/C_F(X)$ دارای بزرگترین z- ایده‌ال‌های یکسانی هستند. همچنین نشان می‌دهیم هر ایده‌ال شمارا تولید شده در $C(X)$ اساسی و در یک ایده‌ال اصلی $C(X)$ قرار دارد که تعمیم نتیجه ۲.۲ در مرجع [۲۲] است و بلافاصله از این نتیجه می‌شود که هر ایده‌ال ماکسیمال ثابت شمارا مولد در $C(X)$ بوسیله عنصر خودتوان تولید می‌شود که در مرجع [۱۳] معرفی شده است. اگر مجموعه نقاط منفرد X متناهی باشند آنگاه $C(X)/C_F(X)$ با $C(X)$ متفاوت نیست یعنی یکریخت و همانند $C(Y)$ است.

در فصل پنجم به حلقه $C(X)/(h)$ که (h) ایده‌ال اصلی دلخواه در $C(X)$ است می‌پردازیم. ثابت می‌کنیم هر ایده‌ال اول (z-ایده‌ال) در $C(X)/(h)$ اساسی است اگر و تنها اگر $Z(h)$ شامل نقاط منفرد نباشد ($intZ(h) = \emptyset$)بلافاصله این واقعیت اطلاعات جدیدی در مورد تقریبا p-فضاها به ما می‌دهد.

فصل ۱

تعاریف و پیشنیازها

۱.۱ نظریه مجموعه‌ها

نظریه مجموعه‌ها در اواخر سال ۱۸۷۳ توسط جرج کانتور رسماً بوجود آمد و شروع به توسعه کرد. او در طی مقالات خود مجموعه‌ها را معرفی کرد و مفاهیمی چون اعداد اصلی، اعداد ترتیبی، اعداد ترامتناهی را معرفی کرد و آنها را گسترش داد. در سال ۱۸۹۷ تا ۱۹۰۲ پاردکس‌هایی بر نظریه مجموعه‌ها وارد شد. به این ترتیب، ریاضیدانان سعی کردند با حفظ ویژگی‌های اصلی مجموعه‌ها، نظریه مجموعه‌ها را به گونه‌ای پایه‌ریزی کنند تا بدور از پارادکس‌ها باشد. در سال ۱۹۰۸ ارنست تسرملو یک دستگاهی از اصول موضوع را برای نظریه مجموعه‌ها پایه‌گذاری کرد که با تصحیح کارهای او به‌وسیله آدولف فرانکیل و تورالف اسکولم، نظریه مجموعه‌های تسرملو-فرنکیل یا ZF بوجود آمد. کمی بعد تسرملو اصل موضوع جنجال برانگیزی به عنوان اصل موضوع انتخاب را به اصول موضوع ZF اضافه کرد و سیستم اصول موضوع ZFC را پدید آورد. نکته مهمی که باید در ZFC یادآور شد این است که در آن همه اشیای مورد بحث مجموعه هستند و در حقیقت برای مقاصد ریاضی، نیاز به بررسی اشیایی دیگر بجر مجموعه‌ها را نداریم. ده اصل موضوع ZFC در [۱۹] آمده است .

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه X نامتناهی است اگر یک زیرمجموعه‌ای سره مانند Y داشته باشد به طوری که یک تناظر یک به یک بین X و Y وجود داشته باشد. مجموعه متناهی است اگر نامتناهی نباشد.

تعریف ۲.۱.۱. دو مجموعه X و Y را همتوان می‌گویند و نماد $X \sim Y$ را برای آن به‌کار می‌برند هرگاه بین

X و Y یک تناظر یک به یک $f: X \to Y$ وجود داشته باشد.

تعریف ۳.۱.۱. مجموعه X را شمارای نامتناهی گفته می‌شود هرگاه $X \sim \mathbb{N}$. مجموعه شمارا مجموعه‌ای است که یا متناهی باشد یا شمارای نامتناهی.

تبصره ۴.۱.۱ . مجموعه تمام زیرمجموعه‌های متناهی یک مجموعه شمارای نامتناهی، شمارای نامتناهی است.

تعریف ۵.۱.۱. رابطه $\leqslant$ روی مجموعه A، رابطه ترتیبی جزئی گفته می‌شود اگر و تنها اگر رابطه $\leqslant$ روی A انعکاسی و متعدی و پادمتقارن باشد. یک مجموعه جزئا مرتب، جفت $(A, \leqslant)$ است که در آن A یک مجموعه و $\leqslant$ یک رابطه ترتیبی جزئی روی A است.

تعریف ۶.۱.۱. رابطه ترتیبی کلی $\leqslant$ روی مجموعه A یک رابطه ترتیبی جزئی است به گونه‌ای که برای هر دو عنصر a و b در A، یا $b \leqslant a$ یا $a \leqslant b$.

تعریف ۷.۱.۱. گیریم $(A, \leqslant)$ یک مجموعه جزئا مرتب است.

(الف) عنصر $u \in A$ را کران بالای B، یک زیرمجموعه A می‌گویند اگر و فقط اگر برای هر $b \in B$، $u \geqslant b$.

(ب) $u_\circ$، کران بالای B، کوچکترین کران بالای B است اگر و تنها اگر برای هر کران بالای B مانند u، $u_\circ \leqslant u$.

(ج) عنصر $e \in A$ را ماکسیمال می‌گویند اگر و تنها اگر برای هر $a \in A$، از $e \leqslant a$ نتیجه می‌شود که $e = a$.

لم ۸.۱.۱. *(لم زورن) اگر A یک مجموعه ناتهی همراه، رابطه ترتیبی جزئی $\leq$ باشد، با این ویژگی که هر زنجیر ناتهی از آن کران بالایی در A داشته باشد آنگاه A عضوی ماکسیمال دارد.*

اثبات. به [۲۷] رجوع شود. $\square$

اعداد ترتیبی و حساب ترتیبی

تعریف ۹.۱.۱. می‌گوییم دو مجموعه خوشترتیب $(A,\leqslant)$ و $(B,\acute{\leqslant})$ همریخت ترتیبی هستند اگر یک نگاشت دوسویی مانند $f:A\to B$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $a_۱,a_۲\in A$ و $a_۱\leqslant a_۲$ داشته باشیم $f(a_۱)\acute{\leq}f(a_۲)$. تابع f را یک همریختی ترتیبی می‌نامیم.

درحالت کلی، اعداد ترتیبی، متناهی و ترامتناهی، را یک مفهوم اولیه می‌گیریم که قاعده‌های زیر در آن صادق‌اند:

ت.۱. به هر مجموعه خوشترتیب یک عدد ترتیبی، که آن را با $ord(A,\leqslant)$ نشان می‌دهیم، نسبت داده می‌شود، و اگر α یک عدد ترتیبی باشد، یک مجموعه خوشترتیب $(A,\leqslant)$ وجود دارد به قسمی که $ord(A,\leqslant)=\alpha$.

ت.۲. فرض کنید $(A,\leqslant)$ و $(B,\leqslant')$ دو مجموعه خوشترتیب هستند. $ord(A,\leqslant)=ord(B,\leqslant')$ اگر و تنها اگر $(A,\leqslant)\approx(B,\leqslant')$. چون هر دو مجموعه خوشترتیب متناهی که تعداد عضوهایشان مساوی باشند همریخت ترتیبی هستند، نمادهای مناسب زیر را انتخاب می‌کنیم:

ت.۳. $ord(A,\leqslant)=۰$ اگر و تنها اگر $A=\emptyset$.

ت.۴. اگر مجموعه خوشترتیب $(A,\leqslant)$ به قسمی باشد که برای عدد طبیعی k داشته باشیم $A\sim\{۱,۲,...,k\}$، آنگاه $ord(A,\leqslant)=k$.

عدد ترتیبی مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$، با رابطه کوچکتر یا مساوی معمولی، را معمولا با حروف یونانی امگا، ω، نشان می‌دهیم؛ یعنی $\omega=ord\{۱,۲,...\}$.

قضیه ۱۰.۱.۱. *فرض α یک عدد ترتیبی اختیاری است. آنگاه مجموعه تمام اعداد ترتیبی β به قسمی که $\alpha<\beta$، یک مجموعه خوشترتیب است که عدد ترتیبی آن α است.*

اثبات. رجوع شود به [۲۷]. □

تعریف ۱۱.۱.۱. $S(\alpha)=\alpha\cup\{\alpha\}$.

تعریف ۱۲.۱.۱. α را یک عددترتیبی تالی گویند اگر و تنها اگر

$$\exists B(\alpha = S(B))$$

α عددترتیبی محدود گویند اگر و تنها اگر $\alpha \neq 0$ و α عددتریبی تالی نباشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. تالی بلافصل a را با a^+ نشان می‌دهیم.

کاردینال

مفاهیم اولیه کاردینال دانسته فرض می‌شود.

تعریف ۱۴.۱.۱. k کاردینال تالی است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد a بطوری که $k = a^+$، k کاردینال محدود است اگر و تنها اگر $k > \omega$ و کاردینال تالی نباشد.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید $\varphi : M \to N$ یک نگاشت باشد، M در N هم‌پایان است اگر برای هر $n \in N$، $m \in M$ به قسمی وجود داشته باشد که $n \leq \varphi(m)$، یعنی $\varphi(M)$ در N هم‌پایان است.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض A یک مجموعه جزئا مرتب باشد کوچکترین کاردینالتی از زیر مجموعه هم پایان A را هم پایان مجموعه A گویند و با $cf(A)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۷.۱.۱. یک کاردینالی که با cfخودش برابر است را کاردینال منظم گویند.

تذکر ۱۸.۱.۱ . β منظم است اگر تنها اگر β عددترتیبی محدود باشد و $cf(\beta) = \beta$.

لم ۱۹.۱.۱. *β منظم باشد پس β کاردینال است. ω منظم است، k^+ منظم است.*

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض K کاردینال نامتناهی باشد، اگر $x, y \in K$ باشند، x, y را تقریبا مجزا گویند اگر و تنها اگر $| x \cap y |< k$.

تعریف ۲۱.۱.۱. گردایه $A \subseteq P(k)$ را گردایه تقریبا مجزا گویند اگر برای هر $x \in A$ آنگاه $(| x |= k)$ و هر دو عضو مجزا از A تقریبا مجزا باشند.

تعریف ۲۲.۱.۱. گرادیه تقریبا مجزای A را که خانواده تقریبا مجزای B بطور محض شامل آن نباشد را گردایه ماکسیمال تقریبا مجزا گویند.

قضیه ۲۳.۱.۱. *فرض $\omega < k$ کاردینال منظم باشد پس:*

۱. *اگر $A \subseteq P(k)$ یک خانواده تقریبا مجزا باشد که $|A| = k$، پس A ماکسیمال نیست.*

۲. *یک گردایه ماکسیمال تقریبا مجزا مانند $B \subseteq P(k)$ از کاردینالتی بزرگتر از k^+ وجود دارد.*

اثبات. رجوع شود به [۱۹]. □

تعریف ۲۴.۱.۱. k کاردینال غیر قابل دسترس است اگر و تنها اگر k یک کاردینال منظم و محدود باشد.

۲.۱ جبر

در این پایان‌نامه مفاهیم مقدماتی حلقه را دانسته فرض می‌کنیم و کلیه حلقه‌ها را جابه‌جایی و یکدار در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم Rیک حلقه باشد، عضوی چون $r \in R$ را مقسوم‌علیه صفر Rگوییم، هرگاه عنصری مانند $\circ_R \neq y \in R$ وجود داشته باشد که $ry = \circ_R$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. در این صورت R را دامنه صحیح می‌گوییم اگر

یک) R حلقه صفر نباشد، یعنی $\circ_R \neq ۱_R$، و

دو) $\circ_R$ تنها مقسوم علیه صفر R باشد.

تعریف ۳.۲.۱. عنصر a متعلق به حلقه R را پوچتوان گویند هرگاه $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد بطوری که $x^n = \circ$.

تعریف ۴.۲.۱. حلقه R را کاهشی گوییم هرگاه هیچ عنصر پوچ‌توان غیر صفر نداشته باشد.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد عنصر $e \in R$ را خودتوان گوییم هرگاه $e^۲ = e$.

ایده‌ال

تعریف ۶.۲.۱. زیرمجموعه‌ی ناتهی I از حلقه R ایده‌ال نامیده می‌شود هرگاه:

۱. برای هر $x, y \in I$، $x + y \in I$؛

۲. برای هر $x \in I$ و هر $r \in R$، $xr \in I$.

هر گاه ایده‌ال I با خود حلقه برابر نباشد آن را ایده‌ال سره یا محض می‌نامیم.

قرارداد ۷.۲.۱. از این به بعد کلیه ایده‌الها را در این پایان نامه سره در نظر میگیریم.

تعریف ۸.۲.۱. ایده‌ال I از حلقه R که $0 \neq I$ یا $I \neq R$ یک ایده‌ال حقیقی نامیده می‌شود در واقع ایده‌ال ناصفر I از R حقیقی است اگر و تنها اگر شامل هیچکدام از یکه‌های R نباشد زیرا $u \in R$ یکه، $u \in I$ اگر و تنها اگر $u^{-1}u \in I = 1_R$ یعنی $I = R$.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید X زیر مجموعه‌ی از حلقه R باشد همچنین $\{A_i | i \in I\}$ خانواده تمام ایده‌ال‌ها در R باشد که شامل Xاند در این صورت $\bigcap_{i \in I} A_i$ ایده‌ال تولید شده به وسیله X نام دارد، و با (X) نمایش داده می‌شود.

- عناصر X مولدهای (X) نام دارند هر گاه $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ آنگاه ایده‌ال (X) با $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ نشان داده می‌شود و می‌گوییم با تولید متناهی است.
- ایده‌ال (X) تولید شده به وسیله یک عنصر را یک ایده‌ال اصلی نام دارد.

لم ۱۰.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه و $a \in R$. در این صورت مجموعه $aR := \{ra : r \in R\}$ ایده‌ال R است، و ایده‌ال اصلی تولید شده توسط a نامیده می‌شود. نمادهای دیگر aR عبارت‌اند از (a) و aR.*

اثبات. رجوع شود به [۲۶]. □

لم ۱.۲.۱۱. *فرض کنید I ایده‌ال حلقه تعویض‌پذیر R باشد.*

یک) اگر J ایده‌ال R باشد و $I \subseteq J$ ، آن گاه گروه آبلی J/I ایده‌ال R/I است و به علاوه به ازای هر $r \in R$ داریم $r + I \in J/I$ اگر و تنها اگر $r \in J$.

دو) به ازای هر ایده‌ال J از R/I تنها یک ایده‌ال چون K از R با ویژگی $I \subseteq K$ وجود دارد که K/I برابر J باشد. در واقع ایده‌ال منحصر به فرد K از R که در این شرطها صدق کند عبارت است از $K = \{a \in R : a + I \in J\}$.

اثبات. رجوع شود به [۲۶]. □

تعریف ۱.۲.۱۲. ایده‌ال سره I از حلقه R را مینیمال گویند اگر $I \neq 0$ و به ازای هر ایده‌ال J که $0 \subset J \subset I$ داشته باشیم آنگاه: $J = 0$ یا $J = I$.

تعریف ۱.۲.۱۳. ایده‌ال سره M از حلقه R ماکسیمال گویند هر گاه به ازای هر ایده‌ال N که $M \subset N$ ، $N \subset R$ داشته باشیم $N = M$ یا $N = R$.

لم ۱.۲.۱۴. *فرض کنید I ایده‌ال حلقه تعویض‌پذیر R باشد. I ماکسیمال است اگر و تنها اگر R/I میدان باشد.*

اثبات. رجوع شود به [۲۶]. □

تذکر ۱.۲.۱۵ . فرض کنید I و M ایده‌الهایی از حلقه تعویض‌پذیر R باشند که $I \subseteq M$، M ایده‌ال ماکسیمال R است اگر و تنها اگر M/I ایده‌ال ماکسیمال R/I باشد.

اثبات. رجوع شود به [۲۶]. □

قضیه ۱.۲.۱۶. *ایده‌آل M در حلقه R ماکسیمال است اگر و تنها اگر برای هر $f \in R - M$، $g \in R$ به‌قسمی وجود داشته باشد که $1 - fg \in M$.*

اثبات. به [۲۶] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض کنید P ایده‌الی از حلقه تعویضپذیر R باشد. می‌گوییم P ایده‌ال اول R است اگر P ایده‌ال سره R باشد، و برای هر $a, b \in R$ که $ab \in P$ آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$.

تذکر ۱.۲.۱۸ . فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد.

۱. توجه کنید که خود R ایده‌ال اول R در نظر گرفته نمی‌شود.

۲. اگر R دامنه صحیح باشد، ایده‌ال صفرش ایده‌ال اول R است.

لم ۱.۲.۱۹. *فرض کنید I ایده‌ال حلقه تعویضپذیر R باشد. در این صورت I اول است اگر و تنها اگر حلقه R/I دامنه صحیح باشد.*

اثبات. رجوع شود به [۲۶]. □

قضیه ۱.۲.۲۰. *هرگاه R یک حلقه یکدار باشد آنگاه هر ایده‌ال ماکسیمال M در R اول است.*

اثبات. رجوع شود به [۲۶]. □

لم ۱.۲.۲۱. *فرض کنید I ایده‌ال حلقه تعویضپذیر R باشد. و $J \supseteq I$. در این صورت ایده‌ال J/I از حلقه رده‌های مانده‌های R/I اول است اگر تنها اگر J ایده‌ال اول R باشد.*

اثبات. رجوع شود به [۲۶]. □

تعریف ۱.۲.۲۲. فرض کنید I ایده‌آل سره حلقه R باشد. رادیکال I را با $Rad(I)$ یا $\sqrt{I}$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P(\text{ایده‌آل اول } P)} P$$

تعریف ۲۳.۲.۱. ایده‌آل اول P در حلقه R را یک ایده‌آل اول مینیمال روی ایده‌آل سره I می‌نامیم هرگاه $I \subseteq P$ و ایده‌آل اولی چون P_1 موجود نباشد که $I \subseteq P_1 \subsetneqq P$.

هر ایده‌ال اول مینیمال روی (0) را ایده‌ال اول مینیمال R گویند و مجموعه تمام ایدهالهای اول مینیمال روی ایده‌ال I را با $Min(I)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۴.۲.۱. زیرمجموعه S از حلقه R را بسته ضربی گوییم هرگاه:

۱) $1 \in S$

۲) اگر $s_1, s_2 \in S$ آنگاه $s_1.s_2 \in S$.

قضیه ۲۵.۲.۱. *هرگاه S زیرمجموعه بسته ضربی حلقه R و از ایده‌آل I در R مجزا باشد، آنگاه مجموعه*

$$\mathcal{A} = \{P \subseteq R : S \cap P = \emptyset \text{ و } \text{است } I \text{ ایده‌آل سره ی شامل } P\}$$

با رابطه شمول دارای عنصر ماکسیمال است و چنین عنصری ایده‌آل اول است.

اثبات. به [۱۵] مراجعه شود. □

لم ۲۶.۲.۱. *اگر I ایده‌آل سره حلقه R باشد، آنگاه*

$$\sqrt{I} = \{r \in R : \exists n \in \mathbb{N} \qquad s.t \qquad r^n \in I\}$$

اثبات. به [۲۶] مراجعه شود. □

اگر $\mathfrak{M}$ را گردایه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال در حلقه R فرض کنیم، آنگاه برای هر $a \in R$ تعریف می‌کنیم:

$$M_a = \{M \in \mathfrak{M} : a \in M\} \quad , \quad \mathfrak{M}_a = \cap M_a = \cap_{a \in M \in \mathfrak{M}} M$$

تعریف ۲۷.۲.۱. فرض کنید I و J ایده‌الهای حلقه تعویضپدیر R باشند. حاصل تقسیم یا خارج تقسیم $(I:J)=\{a\in R : aJ\subseteq I\}$ تعریف می‌شود. روشن است که این حاصل تقسیم ایده‌ال R است و $I\subseteq(I:J)$. در حالت خاص $I=۰$، حاصل تقسیم

$$(۰:J)=\{a\in R : aJ=۰\}=\{a\in R : ab=۰\forall b\in J\}$$

پوچساز J نامیده می‌شود و با $AnnJ$ نمایش داده می‌شود.

لم ۲۸.۲.۱. *هر ایده‌آل متناهیاً تولید شده در حلقه‌ی کاهشی R که تمام عناصرش مقسوم‌علیه صفر است دارای پوچساز غیر صفر است.*

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنید Q ایده‌الی از حلقه تعویضپذیر R باشد. می‌گوییم Q ایده‌ال اولیه R است اگر Q ایده‌ال سره R باشد، و هرگاه $a,b\in R$ و $ab\in Q$ ولی $a\notin Q$ آن گاه $n\in\mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $b^n\in Q$.

بدیهی است که هر ایده‌ال اول حلقه تعویضپذیر R، ایده‌ال اولیه است.

قضیه ۳۰.۲.۱. *هر گاه Q یک ایده‌ال اولیه در حلقه R باشد آنگاه $\sqrt{Q}$ یک ایده‌ال اولیه است.*

اثبات. رجوع شود به [۲۵]. □

تعریف ۳۱.۲.۱. ایده‌ال I در حلقه R دارای تجزیه اولیه است اگر $I=Q_۱\cap Q_۲\cap\ldots\cap Q_n$ طوری که در آن هر Q_i اولیه است.

قضیه ۳۲.۲.۱. *فرض کنید e عنصر خود توان حلقه کاهشی R باشد. ایده‌ال eR مینیمال است اگر و تنها اگر ایده‌ال $(۱-e)R$ ماکسیمال باشد.*

اثبات. رجوع شود به [۲۵]. □

تعریف ۱.۲.۳۳. فرض کنید R حلقه باشد و M مجموعه‌ای ناتهی. M را، همراه با دو عمل جمع $+ : M \times M \to M$ و ضرب در اسکالر $. : R \times M \to M$، $R-$ مدول می‌نامیم اگر

۱. $(M, +)$ گروه آبلی باشد،

۲. به ازای هر دو عضو از M مثل x, y و هر عضو از R مثل r، $r(x + y) = rx + ry$،

۳. به ازای هر عضو از M مثل x و هر دو عضو از R مثل r, s $(r + s)x = rx + rs$،

۴. به ازای هر عضو ازM مثل x و هر دو عضو از R مثلr, s، $(rs)x = r(sx)$،

۵. به ازای هر عضو از M مثل x، $1x = x$.

با توجه به تعریف بالا، به راحتی می‌توانیم بررسی کنیم که اگر M همراه با جمع$+$ و ضرب اسکالر $.$، $R-$مدول باشد، آن گاه به ازای هر عضو از M مثلx، هر عضو از R مثل r وهر عضو از $\mathbb{Z}$ مثل n، $r0 = 0$، $0x = 0$، $(-r)x = -rx = r(-x)$ و $n(rx) = r(nx)$

تعریف ۱.۲.۳۴. فرض کنید M، $R-$ مدول باشد و N، زیر مجموعه‌ای ناتهی از M.گوییم N زیرمدول M است و می‌نویسیم $N \leq M$، اگر تحدید عمل جمع M به $N \times N$ و تحدید عمل ضرب اسکالر M به $R \times N$ به ترتیب عمل جمع روی N و ضرب در اسکالر روی N به وجود آورد و به علاوه، N، با این عمل جمع و ضرب در اسکالر، $R-$مدول باشد.

قضیه ۱.۲.۳۵. (محک فشرده). *فرض کنید M، $R-$ مدول باشد و N زیرمجموعه‌ای ناتهی از M. اگر به ازای هر دو عضو از N مثل x, y و هر عضو از R مثل r، $x + y \in N$ و $rx \in N$ آن گاه $N \leq M$.*

اثبات. رجوع شود به [۲۸]. □

مثال ۱.۲.۳۶. فرض کنید M، $R-$ مدول باشد و $\{M_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از زیر مدول‌های M. اگر I ناتهی باشد، تعریف می‌کنیم $\sum_{i \in I} M_i = \{\sum_{k=1}^{n} x_{ik} : n \geqslant 1, i_k \in I, x_{ik} \in M_{ik}\}$ و اگر I تهی باشد، قرار

می‌دهیم $\sum_{i\in I} M_i = 0$. به کمک محک فشرده، به راحتی می‌توانیم بررسی کنیم که $\sum_{i\in I} M_i$ زیرمدولی از M است. $\sum_{i\in I} M_i$ را مجموع زیرمدول‌های خانواده $\{M_i\}_{i\in I}$ می‌نامیم. اگر $I = \{1, ..., n\}$، به جای $\sum_{i\in I} M_i$ می‌نویسیم $\sum_{i=1}^{n} M_i$ یا $M_1 + M_2 + ... + M_n$. واضح است که

$.M_1 + M_2 + ... + M_n = \{x_1 + ... + x_n : x_i \in M_i; 1 \leqslant i \leqslant; \forall i\}$

قضیه ۳۷.۲.۱. *فرض کنید M، $R-$مدول باشد و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده ناتهی از زیرمدول‌های M. در این صورت شرایط زیر معادل‌اند.*

۱. *$\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای مستقل است، یعنی به ازای هر $n \geqslant 1$، هر عضو از I مثل i_k و هر عضو از M_{ik} مثل x_{ik}، از $\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = 0$ نتیجه می‌شود به ازای هر k، $1 \leqslant k \leqslant n$، $x_{ik} = 0$،*

۲. *به ازای هر عضو از I مثل j، $M_j \bigcap (\sum_{i\in I\setminus\{j\}} M_i) = 0$*

۳. *هر عضو از $\sum_{i\in I} M_i$ نمایشی منحصر به فرد برحسب مجموعی متناهی از اعضای M_iها دارد.*

اثبات. رجوع شود به [۲۸]. □

تعریف ۳۸.۲.۱. فرض کنید M، $R-$مدولی غیر صفر باشد. M را ساده می‌نامیم هرگاه 0 و M تنها زیرمدول‌های M باشند.

تعریف ۳۹.۲.۱. فرض کنید M، $R-$مدول باشد. M را نیم ساده می‌نامیم هر گاه به ازای هر زیر مدول از M مثل K، زیر مدولی از M مثل P موجود باشد که $.M = K \oplus P$

قضیه ۴۰.۲.۱. *فرض کنید M، $R-$ مدولی نیم ساده باشد. در این صورت، هر زیرمدول از M و هر مدول خارج قسمتی از M نیز نیم‌ساده است.*

اثبات. رجوع شود به [۲۸]. □

قضیه ۴۱.۲.۱. *فرض کنید M، $R-$ مدولی غیر صفر باشد. در این صورت شرایط زیر معادل‌اند.*

۱. M *مجموعی از زیر مدول‌های ساده خود است،*

۲. M *مجموع مستقیمی از زیر مدول‌های ساده خود است،*

۳. M *نیم ساده است.*

اثبات. رجوع شود به [۲۸]. □

تعریف ۴۲.۲.۱. فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. ساکل مدول M برابر است با مجموع زیرمدول‌های غیر صفر مینیمال M. که آن را با $soc(M)$ نمایش می‌دهند.

تذکر ۴۳.۲.۱. $R-$مدول M نیم ساده است اگر تنها اگر $soc(M) = M$.

تعریف ۴۴.۲.۱. فرض کنید M یک $R-$مدول غیرصفر باشد. M را شبه‌آرتینی می‌نامند اگر هر زیر مدول غیر صفرش ساکل غیرصفر داشته باشد.

تذکر ۴۵.۲.۱. هر مدول آرتینی، شبه‌آرتینی می‌باشد اما عکسش درست نیست. برای مثال $\mathbb{Z}$-مدول $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ شبه‌آرتینی است ولی آرتینی نیست.

تعریف ۴۶.۲.۱. زیر مجموعه A از حلقه R را T-پوچتوان گویند اگر برای هر دنباله از عناصر $A \supseteq \{a_1, a_2, ...\}$، $n \geq 1$ وجود داشته باشد بطوری که $a_1 a_2 ... a_n = 0$.

تعریف ۴۷.۲.۱. حلقه R را کامل گویند اگر $R/radR$ نیم‌ساده و $radR$، $T-$پوچتوان باشد.

تعریف ۴۸.۲.۱. بعد گلدی متناهی مدولM یعنی بزرگترین عدد صحیح m بطوریکه M شامل جمع مستقیم از m زیرمدول غیر صفر باشد اگر m وجود نداشته باشد می‌گوییم M دارای بعد گلدی نامتناهی است.

تعریف ۴۹.۲.۱. فرض k یک کاردینال باشد، می‌گوییم k در M دست یافتنی است اگر M شامل یک جمع مستقیم از k زیر مدول غیر صفرش باشد.

۳.۱ توپولوژی

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و τ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. τ را توپولوژی روی Xمی‌نامیم در صورتی که شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $\tau \ni \emptyset$ و $X \in \tau$

۲) اگر $\mathsf{A} \subseteq \tau$، آنگاه $\bigcup \mathsf{A} \in \tau$.

۳) اگر $A, B \in \tau$، آنگاه $A \cap B \in \tau$.

هر عضو τ را یک مجموعه باز و متمم آن را بسته می‌نامند.

تذکر ۲.۳.۱ . اگر X مجموعه دلخواهی باشد، گردایه همه زیر مجموعه‌های آن تشکیل توپولوژی در X می‌دهد که به توپولوژی گسسته موسوم است.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید A زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیک X باشد. درون مجموعه A عبارت است از اجتماع همه مجموعه‌های باز جزء A؛ و بستار مجموعه A عبارت است از اشتراک همه مجموعه‌های بسته حاویA.

بستار مجموعه‌ی S در فضای توپولوژی X با clS یا cl_XS، درونش را با $intS$ یا int_XS نشان داده می‌شود.

تعریف ۴.۳.۱. اگر A زیر مجموعه X باشد $x \in X$ را نقطه منفرد A می‌نامیم . درصورتی که یک همسایگی از x به قسمی وجود داشته باشد که A را در هیچ نقطه‌ای به جز x قطع نکند. و آن را نقطه حدی یا انباشتگی مجموعه A می‌نامیم، درصورتی که هر همسایگی از x، A را در نقطه‌ای به جز x قطع کند.

تعریف ۵.۳.۱. یک پایه باز فضای توپولوژی X، گردایه‌ای از مجموعه‌های باز فضا است که هر مجموعه باز فضا به صورت اجتماعی از مجموعه‌های این گردایه است.

تعریف ۶.۳.۱. یک گردایه از زیرمجموعه‌های بسته X را پایه بسته می‌نامیم، اگر گردایه متمم مجموعه‌های آن گردایه، پایه برای مجموعه‌های باز باشد.

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنیم X فضای توپولوژی باشد. فضای X را هاوسدورف (T_2) می‌نامیم، هرگاه برای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X$، مجموعه‌های بازِ U_x و V_y به قسمی وجود داشته باشند که

$x \in U_x, y \in V_y$ و $U_x \bigcap V_y = \emptyset$.

قضیه ۸.۳.۱. *در فضای هاوسدورف X هر مجموعه متناهی بسته است.*

اثبات. رجوع شود به [۲۴]. □

قضیه ۹.۳.۱. *فرض کنید X یک فضای هاوسدورف و A زیر مجموعه‌ای از X باشد. در این صورت، نقطه x نقطه حدی A است اگر و فقط اگر هر همسایگی x شامل بینهایت نقطه از A باشد.*

اثبات. رجوع شود به [۲۴]. □

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنید X, Y دو فضای توپولوژیک و $f : X \longrightarrow Y$، یک تابع باشد و $P \in X$ اگر برای هر مجموعه‌ی باز W در Y که شامل $f(P)$ است مجموعه‌ی باز V در X شامل P به قسمی وجود داشته باشد که $f[V] \subseteq W$، آنگاه f را در نقطه P پیوسته می‌نامند: اگر f در هر نقطه‌ی X پیوسته باشد آن را تابع پیوسته می‌نامند.

تعریف ۱۱.۳.۱. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند، و تابع $f : X \to Y$ تناظر دوسویی باشد. اگر f و تابع معکوس آن هر دو پیوسته باشند آنگاه f را هومئورفیسم می‌نامند.

تعریف ۱۲.۳.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد. در این صورت یک جداسازی X زوج مرتبی مانند (U, V) است که در آن U و V دو زیرمجموعه‌ی باز ناتهی X اند به‌طوری‌که $X = U \cup V$ و $U \cap V = \emptyset$.