بسم الله الرحمن الرحيم

٤٥٨١١٧

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

۱۳۸۱/۶/۲۶

مشخصه ایده‌آلهای اول مینیمال

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

امیر ویسی

۴۰۸۱۷

استاد راهنما

دکتر احمد حقانی

۱۳۷۹

۴۰۸۱۷

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی آقای امیر ویسی

تحت عنوان

مشخصه ایده آلهای اول مینیمال

در تاریخ ۷۹/۱۲/۶ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱-استاد راهنمای پایان نامه	دکتر احمد حقانی
۲-استاد مشاور پایان نامه	دکتر قدسیه وکیلی
۳-استاد داور ۱	دکتر منصور معتمدی
۴-استاد داور ۲	دکتر بیژن طائری

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر امیر نادری

تشکر و قدردانی

بعد از **حمد خداوند یکتا** که به من توفیق داد تا این دوره از تحصیلاتم را به انجام رسانم؛ از استاد بزرگوارم **جناب آقای دکتر احمد حقانی** که مرا به عنوان دانشجوی خودشان پذیرفتند ودر تهیه این پایان نامه یاری ام کردند صمیمانه تشکرو قدردانی می کنم وبرای ایشان آرزوی توفیق دارم.

بر خود لازم می دانم از **جناب آقای دکتر منصور معتمدی** استاد محترم دانشگاه شهید چمران اهواز که هم در دوره کارشناسی از محضرشان بهره مند شدم وهم در جلسه دفاع از این پایان نامه به عنوان استاد داور حضور یافتند سپاسگزاری نمایم.

از **جناب آقای دکتر سعید اعظم** استاد گرانقدر دانشگاه اصفهان که توفیق استفاده از محضرشان نصیبم شد قدردانی می کنم.

وهمچنین از اساتید محترم دانشکده علوم ریاضی که در این دوره شاگردشان بودم به ویژه **خانم دکتر قدسیه وکیلی** استاد مشاور پایان نامه و**آقای دکتر بیژن طائری** استاد داور پایان نامه تشکر می کنم.

در پایان از دوستان دانشجویم که در این مدت از دوستی گرمشان برخوردار بودم سپاسگزارم.

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات ،
ابتکارات و نوآوریهای ناشی از تحقیق موضوع
این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی
اصفهان است.

تقدیم به

پدر

و

مادرم

فهرست مطالب

چکیده

برای یک ایدال اول P در یک حلقه R تعریف می‌کنیم، $O(P) = \{a \in R \mid aRs = 0$, برای یک $s \in R/P\}$ و $\bar{O}(P) = \{x \in R \mid x^n \in O(P)$, برای یک عدد صحیح و مثبت $n\}$ چندین نویسنده ،نمایش‌هایی از حلقه‌هایی که فاکتورآنها به صورت $R/O(P)$ است، بدست آورده‌اند. همچنین در یک حلقه تعویض‌پذیر یک ایدال اول مینیمال P به عنوان یک ایدال اول P ،به طوری که $P = \bar{O}(P)$ ، مشخص شده است. در این پایان نامه، شرایطی را مطرح می‌کنیم که برای ایدال اول P ، تساوی $P = \bar{O}(P)$ را تضمین می کنند. خاصیت $P = \bar{O}(P)$ ، برای بدست آوردن شرایطی که معین می‌کنند حلقه $R/O(P)$ ایدال اول مینیمال یکتادارد، به کار گرفته می‌شود. باافزودن شرایطی، $O(P)$ و $\bar{O}(P)$ را تعمیم می‌دهیم. برای تشریح و تحدید نتایج‌مان مثالهایی مطرح و اثبات می‌شوند.

فصل اول

مقدمه

در این پایان نامه، هرجا از R یاد شود، منظور حلقه شرکت پذیر R است که لزوماً دارای عنصر یکه (عضو واحد) نیست. مگر این که خلاف آن رابه طور صریح بیان کنیم. $N(R)$ ، $\beta(R)$ و $N_r(R)$ به ترتیب مجموعه اعضای پوچتوان R ، رادیکال اول R و رادیکال پوچ R می‌باشند. برای زیر مجموعه X در R ، (X) ، $r(X)$ و $\ell(X)$ به ترتیب ایدال تولید شده توسط X ، پوچساز راست X در R و پوچساز چپ X در R می‌باشند. ایدالهای اول را به طورسره در نظر می‌گیریم. مجموعه ایدالهای اول R رابا $Spec(R)$ و مجموعه ایدالهای اول مینیمال R را با $mSpec(R)$ نشان می‌دهیم. برای ایدال I ی R ، اشتراک تمام ایدالهای اول شامل I را با $\rho(I)$ ، نشان می‌دهیم.

در فصل دوم به کلیات می پردازیم. پیش نیازها، تعاریف و قضایای مقدماتی که برای شروع بحث لازم و در ادامه به ماکمک خواهند کرد، بیان و هر جا ضروری باشد اثبات ارائه می گردد. شناخت و تشریح ایدالهای اول مینیمال

در یک نیم‌گروه جابجایی که به تبع آن ایدالهای اول مینیمال در یک حلقه تعویض‌پذیر مشخص می‌گردد و شاید ایده مقاله اصلی برای تعمیم، از آن جا ناشی شده است، حائزاهمیت است. بدین جهت در بخش دوم‌این فصل به تعاریف و قضایایی در این زمینه خواهیم پرداخت. در بخش سوم، حلقه‌ای مطرح می شود که به گونه‌ای خاص ساخته شده و جزییات برخی ازگزاره‌ها و مثال‌ها را در فصل های بعدی اثبات می‌کند.

از آنجا که هدف، یافتن ایدال اول مینیمال P در یک حلقه ۲ـاولیه R ،با شرایط خاص می‌باشد، درفصل سوم، این گونه حلقه‌ها به تفصیل مورد بحث قرار می‌گیرند. با ارائه مثالها و قضایایی در زمینه حلقه‌هایی اتحاد جایگشتی، متقارن و تقریباً متقارن که نمونه‌هایی از حلقه‌هایی ۲ـاولیه‌اند، با جزییات بیشتری از آنها آشنا می‌شویم.

در ابتدای فصل چهارم، به معرفی نمادها و علائمی می‌پردازیم که در صدد هستیم ایدالهای اول مینیمال را بر حسب آنها بیان کنیم. در ادامه، ایدالهای اول مینیمال را در حلقه‌هایی ۲ـاولیه به این نمادها ربط می دهیم . باارائه چندین لم وگزاره، معادل بودن شرط «۲ـ اولیه» برای یک حلقه R را با «اول مینیمال بودن یک ایدال» برای یک ایدال اول P از آن بررسی می‌کنیم.

در فصل پنجم، مهمترین قضیه که در واقع تعمیمی از یک لم در بخش دوم ازفصل دوم است، مطرح می شود. در این قضیه با اضافه کردن شرایط $(CZ۱)$ و $(CZ۲)$ به یک حلقه ۲ـاولیه R ، یک ایدال اول مینیمال P کاملاً بر حسب نمادهای($\bar{O}_P$ یا $\bar{O}(P)$)که در فصل قبل معرفی شدند شناسایی می‌گردد. برای حلقه‌های دارای شرط $(CZ۱)$ ، شرطی معادل با «۲ـاولیه» بودن بدست می‌آوریم . مثالهایی مطرح می کنیم که نشان می دهند فرضهای قضیه اصلی ما، اضافی نیستند. همچنین رده بزرگی از حلقه‌های تعویض‌ناپذیرکه در آنهاایدال اول مینیمال P برحسب $\bar{O}_P$ یا $\bar{O}(P)$ بیان می گردد، مشخص می‌شوند. در یک قضیه مهم و نتیجه آن کلاس بزرگی از حلقه‌ها معین می شوند که علیرغم این که دارای شرط $(CZ۱)$ نیستند ولی برای هرایدال اول P درآنها ، $P = \bar{O}(P)$.

در فصل ششم، خواص حلقه $R/O(P)$ مورد بررسی قرار می گیرد. این که چه وقت $P/O(P)$ ، تنها ایدال اول مینیمال حلقه $R/O(P)$ است ، حائز اهمیت است. بدین جهت در این فصل شرایطی را تعیین می‌کنیم که تضمین کننده یکتایی ایدال اول مینیمال $P/O(P)$ در حلقه $R/O(P)$ می‌باشند.

فصل دوم

کلیات

در بخش اول این فصل ابتدا پیش‌نیازها و قضایای مقدماتی مورد نیاز را مطرح کرده و هر جا ضروری باشد اثبات مطلب را ارائه می‌دهیم. در بخش دوم به شرح نیم‌گروههای تعویض‌پذیر و ایدال اول مینیمال شامل یک ایدال داده شده در آنها می‌پردازیم. همچنین لم کیست که خود محک مناسبی برای شناخت یک ایدال اول مینیمال P شامل یک ایدال داده شده در یک نیم‌گروه تعویض‌پذیر است بیان می‌گردد. در فصل چهارم این لم را برای حلقه‌هایی با شرایط خاص تعمیم می‌دهیم. بخش سوم را به ساختار حلقه‌ای اختصاص می‌دهیم که دارای ویژگیهای خاص است و جزییات یک مثال جالب در فصل چهارم را ثابت می کند.

۲-۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۲ـ۱ـ۱ : فرض کنیم X یک زیر مجموعه R باشد، اشتراک تمام ایدالهای شامل X را ایدال تولید شده به وسیله X می‌نامیم و آنرا با (X) نمایش می‌دهیم
اگر $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ آن‌گاه (X) راایدال متناهیاً تولید شده‌گوییم و $x_1, \dots, x_n$ را مولدهای (X) گوییم.
اگر $X = \{x\}$ ، (X) را ایدال اصلی می‌نامیم.

قضیه ۲ـ۱ـ۲ : فرض کنیم R یک حلقه، $a \in R$ و $X \subseteq R$ دراینصورت

(۱) $(a) = \{ra + na + as + \sum_{i=1}^{m} r_i a s_i \mid m \in N \ , \ n \in Z \ , \ r, s, r_i, s_i \in R\}$

(۲) اگر R واحددار باشد آن گاه $(a) = \{\sum_{i=1}^{n} r_i a s_i \mid n \in N \ , \ r_i, s_i \in R\}$ به ویژه $(X) = RXR$

(۳) اگر $a \in C(R)$ آن گاه: $(a) = \{ra + na \mid n \in Z, \ r \in R\}$ (C(R)مرکزحلقه R است).

(۴) اگر R واحددار و $a \in C(R)$ آن گاه $Ra = (a) = aR$

(۵) اگر Rواحددار و $X \subseteq C(R)$ آن گاه $(X) = \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid n \in N \ , \ r_i \in R \ , x_i \in X\}$

اثبات: [۱،صفحه ۱۲۴]

تعریف ۲ـ۱ـ۳ : ایدال P ی حلقه R را اول گوییم هرگاه $P \neq R$ و برای ایدالهای I و J در R ، $IJ \subseteq P$ نتیجه دهد که $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$

نتیجه ۲ـ۱ـ٤: اگر « $xy \in P$ نتیجه دهد $x \in P$ یا $y \in P$ » آن گاه P اول است.
عکس نتیجه فوق همواره درست نیست. به تمرین (۹) از [۱] صفحه ۱۳۳ مراجعه کنید.

گزاره ۲ـ۱ـ۵ : در حلقه تعویضپذیر R ایدال P اول است اگروتنهااگر برای هر $x, y \in R$ ، $xy \in P$ نتیجه دهد $x \in P$ یا $y \in P$

اثبات: ساده است.

قضیه زیر شرایط معادلی را برای ایدال اول P در حلقه R بیان می کند.

قضیه ۲ـ۱ـ۶ : برای ایدال $P \subseteq R$ شرایط زیر معادلند:

(۱) P ایدال اول است.

(۲) اگر $a, b \in R$ و $(a)(b) \subseteq P$ آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$

(۳) اگر $a, b \in R$ و $aRb \subseteq P$ آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$

(۴) اگر I و J ایدالهای راست در حلقه R باشند و $IJ \subseteq P$ آن‌گاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$

(۵) اگر I و J ایدالهای چپ در حلقه R باشند و $IJ \subseteq P$ آن‌گاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$

اثبات: [۲،صفحه۱۶۵]

تعریف ۲ـ۱ـ۷ : رادیکال اول[1] R را با $\beta(R)$ نشان می‌دهیم و تعریف می کنیم

$$\beta(R) = \bigcap\{P \mid P \in \operatorname{spec}(R)\}$$

$\beta(R)$ را «رادیکال پوچ پایینی»[2] یا «رادیکال بیر[3]ـمک کوی[4]» هم می نامند.

تعریف ۲ـ۱ـ۸ : زیر مجموعه ناتهی S از R را m ـسیستم گوییم هرگاه برای هر $a, b \in S$ عضو $r \in R$ موجود باشدبه طوری که $arb \in S$

اگر S مجموعه ضربی بسته باشد آن گاه‌یک mـسیستم است. ولی عکس آن لزوماً درست نیست.

مثال ۲ـ۱ـ۹: گیریم R حوزه‌واحددار باشد و $0 \neq a \in R$ و $a \neq 1$ و a معکوس نداشته باشد آن گاه $S_a = \{a, a^2, a^4, a^8, \dots\}$ mـسیستم است ولی به طور ضربی بسته نیست (چون $a^3 \notin S_a$)

نتیجه ۲ـ۱ـ۱۰ : در حلقه R ، ایدال P اول است اگروتنهااگر $S = R \setminus P$ یک mـسیستم باشد.

اثبات: از قسمت (۳) قضیه (۲ـ۱ـ۶) بدست می‌آید.

---

1) Prime Radical 2) Lower Nilradical 3) Reinhold Baer 4) Mc coy

گزاره ۲ـ۱ـ۱۱: گیریم $S\subseteq R$ یک m سیستم باشد و P ایدالی در R باشد که $P\cap S = \phi$ و P با این خاصیت ماکسیمال باشد آن گاه: P ایدال اول است.

اثبات: فرض کنیم $a\notin P$ و $b\notin P$ ادعا می‌کنیم $(a)(b) \not\subset P$

برهان خلف: گیریم $(a)(b) \subseteq P$. چون $P \subseteq P + (a)$ و $P \subseteq P + (b)$ و P با خاصیت مجزایی از S ماکسیمال است. وجود دارند $s_۱\in(P+(a))\cap S$ و $s_۲\in(P+(b))\cap S$ چون S یک m- سیستم است. $\exists r\in R\ ;\ s_۱rs_۲\in(P+(a))\ R\ (p+(b)) \subseteq P+(a)(b) \subseteq P$ و این با مجزایی P از S تناقض دارد. در نتیجه فرض خلف مبنی بر اینکه $(a)(b) \subseteq P$ باطل است یعنی $(a)(b) \nsubseteq P$ و بنابر قضیه (۲ـ۱ـ۶) P اول است.

نتیجه ۲ـ۱ـ۱۲: اگر حلقه R تعویضپذیر باشد ایدال P اول است اگر و تنها اگر $S = R\backslash P$ یک مجموعه ضربی بسته باشد.

گزاره ۲ـ۱ـ۱۳: اگر R/P حوزه باشد آن گاه P اول است.

اثبات: واضح است.

توجه می‌کنیم عکس حکم موجود در گزاره (۲ـ۱ـ۱۳) برقرار نیست. (مثال موجود در نتیجه (۲ـ۱ـ۴))

لم ۲ـ۱ـ۱٤: اگر R حلقه واحددار و M ایدال ماکسیمال R باشد آن گاه M اول است.

اثبات: گیریم $a\notin M$ و $b\notin M$ ادعا می‌کنیم: $(a)(b) \nsubseteq M$ در غیر این صورت $(a)(b) \subseteq M$.

چون $M \subseteq M+(a)$ و $M \subseteq M+(b)$ و M ماکسیمال است.

پس،

$$M + (a) = R = M + (b)$$

در نتیجه $m_۲\in M$ و $m_۱$ و $x\in(a)$ و $y\in(b)$ وجود دارند به طوری که

$$m_۱ + x = ۱ = m_۲ + y$$

بنابراین $۱ = m_۱m_۲ + m_۱y + xm_۲ + xy \in M$ که با ماکسیمال بودن M تناقض دارد. بنابراین $(a)(b) \nsubseteq M$ و قضیه (۲ـ۱ـ۶) نتیجه می‌دهد M اول است.

گزاره ۲ـ۱ـ۱۵ : اگر I و J ایدالهای حلقه R باشند آن گاه: $I + J = (I \cup J)$

اثبات: ساده است.

گزاره فوق را می توان برای هر خانواده از ایدالهای حلقه R تعمیم داد. به عبارت دیگر اگر $\{I_k\}_{k\in K}$ یک خانواده از ایدالهای حلقه R باشد آن گاه

$$(\cup_{k\in K} I_k) = \sum_{k\in K} I_k$$

تعریف ۲ـ۱ـ۱۶ : ایدال سره P در حلقه R را نیم اول گوییم هرگاه برای هر ایدال I در R ، $I^2 \subseteq P$ نتیجه دهد $I \subseteq P$.

هر ایدال اول در حلقه R و همچنین $\beta(R)$ ایدالهای نیم اولند.

قضیه زیر شرایط معادلی را برای ایدال نیم اول P بیان می کند که با قضیه(۲ـ۱ـ۶) برای یک ایدال اول شباهت دارد.

قضیه ۲ـ۱ـ۱۷ : برای ایدال سره P در R شرایط زیر معادلند:

(۱) P نیم اول است.

(۲) اگر $a \in R$ و $aRa \subseteq P$ آن گاه $a \in P$

(۳) اگر $a \in R$ و $(a)^2 \subseteq P$ آن گاه $(a) \subseteq P$

(۴) اگر I ایدال راست R باشد،و $I^2 \subseteq P$ آن گاه $I \subseteq P$

(۵) اگر I ایدال چپ R باشد، و $I^2 \subseteq P$ آن گاه $I \subseteq P$

اثبات: مانند قضیه(۲ـ۱ـ۶) ثابت می گردد.

تعریف ۲ـ۱ـ۱۸ : برای ایدال I از حلقه R ، رادیکال I را با $\sqrt{I}$ نشان می دهیم و تعریف می کنیم $\sqrt{I} = \{s \in R \mid$ هر mـسیستم شامل s دارای اشتراک ناتهی با I است $\}$ واضح است که: $\sqrt{I} \subseteq \{s \in R \mid s^n \in I \,,\, n \geq 1$ برای یک $\}$ در حالتی که R تعویضپذیر است رابطه شمول به تساوی تبدیل می گردد.