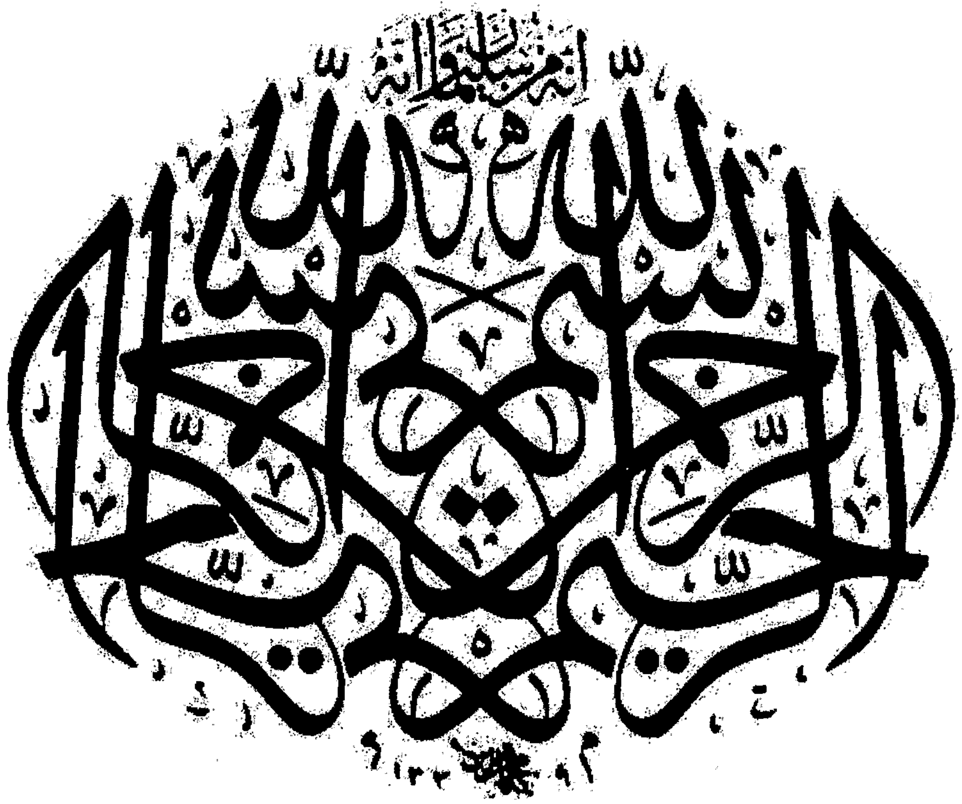

إنه من سليمان وإنه
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه گیلان
مجتمع علوم پایه
دانشکده ریاضی

پایان نامه
برای دریافت کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی

عنوان:

روش‌های هم محلی اسپلاین برای حل عددی معادلات با مشتقات جزیی بیضوی

استاد راهنما:

دکتر قاسم برید لقمانی

استاد مشاور:

دکتر فرید (محمد) مالک قائینی

پژوهش و نگارش:

هادی عزیزی

مهر ماه ۱۳۸۶

تقدیم به

مادر دلسوزم

و روان مقدس پدر عزیزم

که روح آب است و پاکی.

قدردانی

حمد و سپاس پروردگاری را سزاست که توان بر گرفتن قطره‌ای از اقیانوس بی‌کران علم و معرفت را در وجود انسان به ودیعه نهاد و از فضل الهی آنان را بهره‌مند گردانید.

شایسته می‌دانم از استاد گران‌قدر جناب آقای دکتر قاسم برید لقمانی که با قبول راهنمایی این پایان نامه، افتخار شاگردی ایشان را داشتم سپاسگزاری کنم و از همیاری و دقت نظر و دلسوزی ایشان صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. از جناب آقای دکتر فرید(محمد) مالک به عنوان استاد مشاور، به خاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان صمیمیانه سپاسگزارم.

از استادان ارجمند جناب آقای دکتر هوشمند و جناب آقای دکتر احمدی نیا به خاطر مسئولیت داوری این پایان نامه کمال تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از سرکار خانم عابدینی که در دوران تحصیل در دانشکده ریاضی مثل یک مادر دلسوز راهنما، مشوق و سنگ صبور من بودند بی نهایت سپاسگزارم.

از دوستان عزیزم آقایان مصطفی جعفری، مازیار زارع پور، بهزاد کفاش، مهدی حاجی اشرفی، مهدی خوبی، سید باقر میردهقان و به خصوص حجت امراللهی که مرا در تدوین این پایان نامه یاری رساندند سپاسگزارم.

از خواهران و برادر خوبم که همواره مشوق من در امر تحصیل بوده‌اند بسیار ممنونم.

و در پایان از تنها سرمایه زندگی‌ام، مادر عزیزم که هر چه امروز دارم از زحمات بی دریغ و دعای ایشان است و حقیر خاک پای ایشانم، با تمام وجود قدردانی می‌کنم.

هادی عزیزی

مهرماه ۸۶- یزد

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی	صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی دوره کارشناسی ارشد	شناسه: ب/ک/۳

جلسه دفاعیه پایان نامه تحصیلی آقای هادی عزیزی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته/گرایش: ریاضی کاربردی

تحت عنوان: حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم بیضوی با استفاده از اسپلاین ها

و تعداد واحد: ۶ درتاریخ ۲۵/۷/ ۸۶ ۱۳ باحضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید.

پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان‌نامه با نمره: به عدد ۱۹/۲۵ به حروف نوزده و بیست و پنج صدم و درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

عنوان	نام و نام خانوادگی	امضاء
استاد/ استادان راهنما:	قاسم برید لقمانی	
استاد/ استادان مشاور:	فرید(محمد) مالک قائینی	
متخصص وصاحبنظرداخلی:	محمدرضا هوشمند اصل	
متخصص و صاحبنظر خارجی:	مهدی احمدی نیا	

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام ونام خانوادگی: محمدرضا نوربالا

امضاء:

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان نامه، از توابع اسپلاین، B- اسپلاین‌ها و روش‌های هم محلی برای حل عددی معادلات با مشتقات جزیی بیضوی خطی مرتبه دوم استفاده می‌کنیم. همچنین به بررسی وجود، یکتایی و تحلیل همگرایی روش می‌پردازیم و نیز با حل عددی مثال‌ها و نتایج عددی بدست آمده روش حاضر را با روش‌های موجود دیگر مورد مقایسه، بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

مقدمه

حل مسائل مقدار مرزی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی به علت کاربرد فراوان آنها در علوم مهندسی و فیزیک، همواره قابل توجه دانشمندان و ریاضیدانان جهان بوده است. از آنجا که حل تحلیلی دسته‌ای از این نوع مسائل به راحتی مقدور نمی‌باشد، لذا برای بدست آوردن جواب از تقریب‌های عددی استفاده می‌کنیم.

تاکنون روش‌های متعددی برای حل این نوع مسائل مقدار مرزی ابداع شده‌اند که برخی از مهمترین آنها، روش عناصر متناهی، روش تفاضل متناهی، روش گالرکین و همچنین استفاده از اسپلاین‌ها می‌باشد.

در این پایان نامه حل مسائل مقدار مرزی معادلات با مشتقات جزیی بیضوی به روش هم محلی اسپلاین را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

استفاده از توابع اسپلاین و روش هم محلی برای حل عددی مسائل مقدار مرزی معمولی به دهه ۶۰ بر می‌گردد، که در آن سال‌ها Elberg امکان استفاده از توابع اسپلاین در بدست آوردن جواب تقریبی مسائل مقدار مرزی را مطرح کرد. De boor نیز در سال ۱۹۷۸ کارهای جالبی با استفاده از اسپلاین‌ها روی مسائل مقدار مرزی انجام داد [۶].

مسائل مقدار مرزی مشتقات جزیی به دلیل اهمیتشان از سال‌ها قبل بسیار مورد بحث بوده‌اند. به عنوان مثال در [۱۱]، Dyksen، Rice و Bonomo در سال ۱۹۸۱ این مسائل را مورد بحث قرار داده‌اند. در سال‌های ۱۹۸۸ و ۱۹۹۰ کارهایی توسط christara، Hostist و Vavalis به کمک توابع اسپلاین مربعی دوگانه، اسپلاین مکعبی و روش هم محلی برای حل این نوع معادلات انجام

شد[۴و۹]. همچنین در سال ۲۰۰۵ Hawary، zanaty و sanousy با استفاده از اسپلاین‌های مرتبه چهارم و روش هم محلی به حل این نوع معادلات پرداختند [۷].

در فصل اول این پایان نامه برخی مفاهیم و تعاریف اولیه مورد نیاز در فصول بعدی آورده شده است. در فصل دوم و سوم چگونگی استفاده از روش هم محلی اسپلاین مرتبه دوم و چهارم و همچنین تحلیل همگرایی روش مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل چهارم نیز با ارائه مثال‌هایی، نتایج فصل‌های دوم و سوم به طور عددی بیان می‌شود.

فصل اول

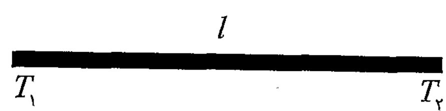
تعاریف و مفاهیم پایه

۱.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

در علوم و مهندسی بعضی کمیت‌های فیزیکی به چندین عامل بستگی دارند یعنی تابعی که با آن سروکار داریم چندین متغیر مستقل دارد. برای روشن شدن موضوع به مثال‌های زیر توجه می‌کنیم:

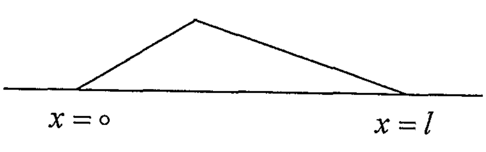
مثال۱.۱.۱ میله‌ای به طول l را در نظر بگیرید که ابتدای میله را در تماس با منبع با دمای T_1 و انتهای میله را در تماس با منبع با دمای T_2 قرار می‌دهیم. حال می‌خواهیم دمای هر نقطه از میله را محاسبه کنیم. این دما به زمان و فاصله x , $l-x$ از دو منبع وابسته است. بنابراین متغیرهای مستقل x و t هستند.

$u(x,t)$: دمای نقطه x از میله در زمان t



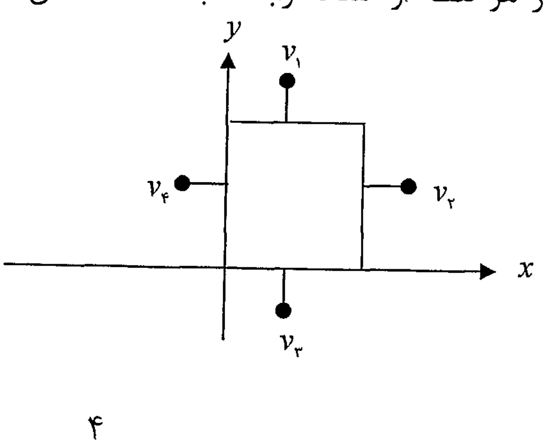
مثال۲.۱.۱ هرگاه تاری به طول l را در دو انتها به محل‌های ثابتی ببندیم و یک شکل اولیه به آن بدهیم، سپس آن را رها کنیم آنگاه ارتفاع هر نقطه از تار به زمان و فاصله نقطه از ابتدای تار وابسته است. بنابراین باز هم متغیرهای مستقل x و t هستند.

$u(x,t)$: ارتفاع نقطه x از تار در زمان t



مثال ۳.۱.۱ هرگاه چهار طرف یک صفحه پتانسیل مستطیلی را به ولتاژهای مختلف وصل کنیم، آنگاه ولتاژ هر نقطه از صفحه وابسته به مختصات آن نقطه است و متغیرهای مستقل x و y هستند.

$u(x,y)$: ولتاژ نقطه (x,y)



تعریف ۱.۱.۱ معادله دیفرانسیلی که علاوه بر متغیرهای وابسته و متغیرهای مستقل، شامل یک یا چند مشتق جزیی متغیرهای وابسته باشد یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی نامیده می‌شود.

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی برای یک متغیر وابسته u و چندین متغیر مستقل $x,y,\ldots$ عبارت است از

$$F(x,y,\ldots,u,u_x,u_y,\ldots,u_{xx},u_{xy},u_{yy},\ldots)=0$$

که در آن

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}\quad,\quad u_y=\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad,\quad u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\quad,\quad u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

مثال ۴.۱.۱ هریک از معادلات زیر مثال‌هایی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی هستند.

۱) $xu_x-yu_y=\sin xy$

۲) $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}$

۳) $uu_yu_{xxx}+u_{yy}^2=\sin u$

۴) $(u_{xx})^2+u_{yy}=u_z+z^3$

تعریف ۲.۱.۱ یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی را خطی گوییم هرگاه متغیرهای وابسته و مشتقات آنها در معادله دیفرانسیل به صورت خطی ظاهر شوند (مثلاً در هم ضرب یا مجذور نشده باشند). معادله دیفرانسیلی که خطی نباشد را غیرخطی گوییم.

به عنوان مثال معادلات ۱ و ۲ در مثال قبل خطی و معادلات ۳ و۴ غیرخطی هستند.

تعریف ۳.۱.۱ مرتبه یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی برابر با بالاترین مرتبه مشتقی است که در معادله ظاهر می‌شود.

در مثال قبل معادله۱ از مرتبه اول، معادله ۲ و ۴ از مرتبه دوم و معادله۳ از مرتبه سوم می‌باشد.

تعریف ۴.۱.۱ صورت کلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول بر حسب دو متغیر مستقل y,x عبارت است از

$$P(x,y)u_x + Q(x,y)u_y + R(x,y)u = S(x,y)$$

تعریف ۵.۱.۱ صورت کلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم بر حسب دو متغیر مستقل y,x عبارت است از

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y) \quad (۱.۱.۱)$$

تعریف ۶.۱.۱ معادله (۱.۱.۱) را همگن گوییم اگر برای هر y,x داشته باشیم، $g(x,y)=0$. هرگاه $g(x,y)\neq 0$ آنگاه معادله غیرهمگن نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱ بر اساس علامت b^2-4ac در معادله (۱.۱.۱) سه نوع معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم دو متغیره داریم:

الف) اگر $b^2-4ac<0$ معادله را بیضوی گوییم.

ب) اگر $b^2-4ac=0$ معادله را سهموی گوییم.

ج) اگر $b^2-4ac>0$ معادله را هذلولوی گوییم.

اصطلاحاتی که در اینجا به کار بردیم از این امر ناشی می‌شود که وقتی a و b و c و... و f اعدادی ثابت و $g\equiv 0$ باشد معادله (۱.۱.۱) همیشه دارای جواب هایی به شکل $u=\exp(\lambda x+\mu y)$ است که در آن اعداد ثابت λ و μ در معادله جبری زیر صدق می‌کنند[۲۰]:

$$a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2 + d\lambda + e\mu + f = 0$$

از هندسه تحلیلی می‌دانیم که چنین معادله‌ای یک مقطع مخروطی در صفحه $\lambda\mu$ است و انواع مختلف مقاطع مخروطی نیز بوسیله علامت b^2-4ac معین می‌شوند.

سه نوع معادله خطی مرتبه دوم که در تعریف ۷.۱.۱ معرفی می‌شوند در حالت کلی نیاز به انواع مختلف شرایط اولیه یا مرزی دارند تا جوابی را معین کنند. فرض کنیم u نمایش متغیر وابسته در

یک مسأله مقدار مرزی باشد.

تعریف ۸.۱.۱ شرطی که مقادیر خود u را در امتداد قسمتی از مرز تعیین می کند به شرط دیریکله[1] معروف است. یک شرط نویمان[2] مقادیر مشتقات نرمال $\frac{\partial u}{\partial n}$ را روی قسمتی از مرز تعیین می‌کند، که در آن مشتق نرمال $\frac{\partial u}{\partial n}$، مشتق جهتی u در امتداد بردار قائم n بر مرز داده شده می‌باشد و شرط مرزی رابین[3] مقادیر $\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}$ را در نقاط مرزی تعیین می‌کند که در آن α و β عدد ثابت یا تابعی از متغیرهای مستقل هستند.

روش‌های مختلف تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی موجودند، از جمله می‌توان به استفاده از سری‌های فوریه، تبدیل مسأله به یک معادله یا یک دستگاه معادلات انتگرالی، تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس اشاره کرد. ولی استفاده از این روش‌ها برای حل هر معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی امکان پذیر نمی‌باشد، مثلاً استفاده از سری‌های فوریه برای مسائل با حداکثر سه متغیر و با ضرایب ثابت می‌تواند اجرا گردد؛ ولی برای متغیرهای بیشتر کار بسیار زیادی می‌برد و مقرون به صرفه نیست.

روش‌های مختلف عددی نیز برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی موجودند که استفاده از آنها نیز محدودیت‌هایی دارد. یکی از این روش‌های مفید عددی برای حل این گونه معادلات در فصل بعد بیان شده است.

[1] Dirichlet
[2] Neumann
[3] Robin

۲.۱ اسپلاین‌ها و B- اسپلاین‌ها

نظریه‌ی توابع اسپلاین از اوایل دهه ۶۰ میلادی با کارهایی که کارل دبور[۴] روی آن انجام داد راه‌گشای حل بسیاری از مسائل علمی در زمینه‌ی محاسبات فیزیک اتمی شد.

مطالعه روی این توابع و کاربردهای آنها از حدود سال‌های ۱۹۸۰ پیشرفت نسبتاً سریعی داشت که به خاطر کاربرد فراوان آنها در زمینه‌های مختلف محاسباتی بود. از کاربردهای زیادی که توابع اسپلاین دارند می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

نظریه تقریب توابع، حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و مشتقات جزئی، انتگرال گیری عددی، حل معادلات انتگرال، مسائل کنترل بهینه و ...

اکنون توابع اسپلاین و B- اسپلاین علاوه بر کاربردهای فوق در تصویرسازی و ساخت انیمیشن‌ها نیز کاربرد فراوانی دارند.

حال به بیان برخی از تعاریف و خواص مربوط به توابع اسپلاین و B- اسپلاین که در ادامه مورد نیاز است می‌پردازیم؛

تعریف ۱.۲.۱ یک تابع اسپلاین از قطعه چندجمله‌ای‌هایی بر روی زیربازه‌ها تشکیل می‌شود که با شرایط پیوستگی خاص به هم می‌پیوندند.

فرض کنید $n+1$ نقطه‌ی $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ مشخص شده باشند، یک تابع اسپلاین از درجه k تابعی چون S می‌باشد به قسمی که :

۱) S در هر زیربازه‌ی $[x_i, x_{i+1}]$ یک چندجمله‌ای از درجه کوچکتر یا مساوی k باشد.

۲) S دارای مشتقات پیوسته تا مرتبه $(k-1)$ روی $[x_0, x_n]$ باشد.

بنابراین S دارای شکل کلی زیر می‌باشد:

---

[۴] Carl de Boor

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=a_{0,k}x^k+a_{0,k-1}x^{k-1}+\dots+a_{0,0} & x\in[x_0,x_1] \\ S_1(x)=a_{1,k}x^k+a_{1,k-1}x^{k-1}+\dots+a_{1,0} & x\in[x_1,x_2] \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x)=a_{n-1,k}x^k+a_{n-1,k-1}x^{k-1}+\dots+a_{n-1,0} & x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

متداول‌ترین اسپلاینی که بین هر زوج گره‌ی متوالی بکار می‌رود، چندجمله‌ای مکعبی است که اسپلاین مکعبی نامیده می‌شود؛ و این خاصیت را دارد که نه تنها به طور پیوسته مشتق پذیر است بلکه دارای یک مشتق پیوسته مرتبه دوم روی بازه است، چرا که در اسپلاین مکعبی $k=3$ است، پس باید S و S' و S'' پیوسته باشند.

اما آیا پیوستگی S و S' و S'' شرایط کافی را برای تعریف یک اسپلاین مکعبی فراهم می‌کنند؟

در چندجمله ای قطعه ای مکعبی کلی زیر:

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=a_{0,3}x^3+a_{0,2}x^2+a_{0,1}x+a_{0,0} & x\in[x_0,x_1] \\ S_1(x)=a_{1,3}x^3+a_{1,2}x^2+a_{1,1}x+a_{1,0} & x\in[x_1,x_2] \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x)=a_{n-1,3}x^3+a_{n-1,2}x^2+a_{n-1,1}x+a_{n-1,0} & x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

$4n$ ضریب وجود دارند. از طرفی بر روی هر زیربازه $[x_i,x_{i+1}]$ دو شرط درونیابی وجود دارند:

$$S(x_i)=y_i \qquad , \qquad S(x_{i+1})=y_{i+1}$$

که جمعاً $2n$ شرط شمرده می‌شود. پیوستگی S' در هر گره یک شرط ارائه می‌دهد:

$$S'_i(x_i)=S'_{i+1}(x_i)$$

که در کل $n-1$ شرط به حساب می‌آید. به طور مشابه پیوستگی $S''(x)$ نیز $n-1$ شرط دیگر ارائه می‌دهد. پس در کل $4n-2$ شرط برای تعیین $4n$ ضریب وجود دارد. بنابراین دو درجه آزادی موجود است و راه‌های مختلفی برای بهره‌گیری از آنها وجود دارد، از جمله اینکه:

۱) قرار دهیم $S''(x_0)=S''(x_n)=0$؛ که به آن اسپلاین مکعبی طبیعی گویند.

۲) $S'(x_0)$ و $S'(x_n)$ موجود باشد که در این صورت به آن اسپلاین مقید گویند.

در نهایت با دستگاه سه قطری و قطری غالب زیر، بر حسب $Z=[z_1,\dots,z_{n-1}]^T$ مواجه می‌شویم[۲۳]:

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & & \\ & h_2 & u_3 & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

(که z_i معرف $S''(x_i)$ است.)

پس از به دست آوردن z_iها آنها را در فرمول زیر قرار می‌دهیم:

$$s_i(x)=a_1(x_{i+1}-x)^3+a_2(x-x_i)^3+a_3(x-x_i)+a_4(x_{i+1}-x)$$

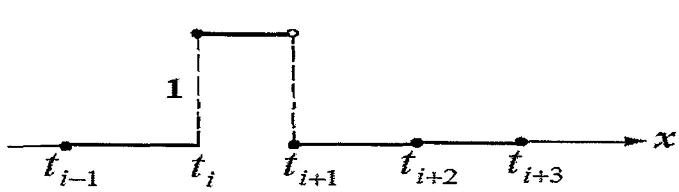
که در آن [۲۳]:

$$a_1=\frac{z_i}{6h_i},\ a_2=\frac{z_{i+1}}{6h_i},\ a_3=(\frac{y_{i+1}}{hi}-\frac{z_{i+1}hi}{6}),\ \ a_4=+(\frac{y_i}{h_i}-\frac{z_i hi}{6})$$

علاوه بر روش صریح فوق می‌توان توابع اسپلاین را به صورت بازگشتی زیر نیز تعریف کرد[۲۳]:

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید k یک عدد صحیح نامنفی و $t_1<t_2<\dots<t_j<\dots<t_{n+k+1}$ دنباله‌ای صعودی از گره‌ها باشد. iامین B- اسپلاین از درجه‌ی صفر به صورت قطعه‌ای ثابت زیر تعریف می‌شود:

$$B_{0,i}(x)=\begin{cases} 1 & x\in[t_i,t_{i+1}] \\ 0 & Otherwise \end{cases} \qquad (۱۳.۲.۱)$$



شکل ۱.۲.۱: نمودار B- اسپلاین از درجه‌ی صفر

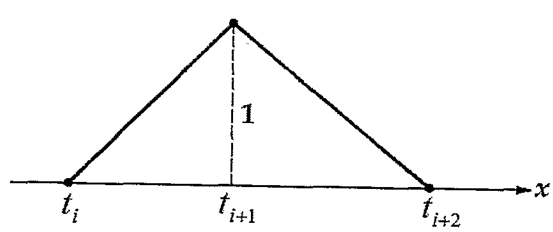
و با استفاده از رابطه بازگشتی زیر، iامین B - اسپلاین درجه k ، $(k\geq 1)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_{k,i}(x)=\left(\frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i}\right)B_{k-1,i}(x)+\left(\frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\right)B_{k-1,i+1}(x) \qquad (۱۴.۲.۱)$$

برای مثال iامین B- اسپلاین درجه‌ی اول به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$B_{1,i}(x)=\left(\frac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)B_{0,i}(x)+\left(\frac{t_{i+2}-x}{t_{i+2}-t_{i+1}}\right)B_{0,i+1}(x)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i} & t_i\le x\le t_{i+1}\\ \dfrac{t_{i+2}-x}{t_{i+2}-t_{i+1}} & t_{i+1}\le t_{i+2}\\ 0 & Othewise\end{cases}$$



شکل۱.۲.۱: نمودار B- اسپلاین درجه‌ی یک

قضیه زیر برخی از خواص B- اسپلاین‌ها را بیان می کند، اثبات این قضیه در [۱۳] موجود است:

قضیه ۳.۲.۱ فرض کنید k یک عدد صحیح نامنفی و $t=(t_i)\Big|_{i=0}^{n}$ دنباله‌ای از گره‌ها باشد، در این صورت B اسپلاین‌های روی t دارای خواص زیر هستند:

۱) i امین B اسپلاین یعنی $B_{k,i}$ تنها به گره‌های $t_i,t_{i+1},\ldots,t_{i+k+1}$ وابسته است.

۲) اگر x خارج از بازه‌ی $[t_i,t_{i+k+1})$ باشد در این صورت $B_{k,i}(x)=0$.

۳) اگر $x\in[t_j,t_{j+1})$ در این صورت $B_{k,i}(x)=0$ اگر $i<j-k$ یا $i>j$.