فهرست مندرجات

مقدمه

بعد از حمد خداوندی که ستایش بندگان خویش را بهایی در برابر نعمت‌های خود قرار داد،

در هندسه جبری یکی از مسائل مهم، مطالعه هندسه یک مجموعه متناهی از نقاط می‌باشد. چرا که مسائل بسیاری وجود دارد که تلاش برای حل آنها منجر به بررسی هندسه مجموعه نقاط متناهی می‌گردد. از جمله یکی از سوالات مهم در هندسه جبری مسئله زیر است :

فرض کنیم $P_1, \ldots, P_s$، s نقطه متمایز در $\mathbb{P}^r$ و $m_1, \ldots, m_s$ اعداد صحیح نامنفی باشند. آیا می‌توان یک چندجمله‌ای همگن از درجه d و از $r+1$ متغیر پیدا کرد که از این نقاط بگذرد و تمامی مشتق‌های نسبی آن تا مرتبه $m_i - 1$ در P_i، برای $1 \leq i \leq s$، برابر صفر باشند؟

این مسأله که به مسأله درون یابی چندجمله‌ای چند متغیر مشهور شده‌است، یکی از مسائل کلاسیک هندسه جبری است و توجه بسیاری از هندسه جبری‌دانان کلاسیک از قبیل کاستلنوو، هالفن، را به خود جلب کرده است و هنوز راه حل کاملی برای آن به دست نیامده است. انگیزه‌های مطالعه چنین مسأله‌ای ریشه در مسائل مشخص تری دارد.

به عنوان مثال برای مطالعه خم‌های در $\mathbb{P}^3$ نقاط حاصل از اشتراک یک صفحه و خم می‌توانند اطلاعات مناسبی درباره آن‌ها به دست دهند.

یا به هنگام مطالعه تکینگی‌های معمولی خم‌های آفین در $\mathbb{A}^{r+1}$، مخروط مماس برخم در نقطه تکینه معمولی از تعداد متناهی خط متمایز تشکیل می‌شود که هر یک از این خطوط یک و فقط یک نقطه در $\mathbb{P}^r$ را تعیین می‌کنند.

از طرف دیگر در حالتی که تمامی m_i ها مساوی باشند این مسأله به طور عمیقی مورد توجه بوده و مورد مطالعه قرار گرفته است. به خصوص هنگامی که $m_1 = \cdots = m_s = 2$ است، پاسخ مسأله فوق در تعیین بعد واریته‌های قاطع بالاتر برخی واریته‌های تصویری تعیین کننده بوده‌اند. اما واریته‌های بسیار دیگری وجود دارند که تلاش برای به کار بستن این روش در مورد آنها به راحتی انجام نمی‌گیرد.

هدف ما در این پایان نامه، مطالعه این مسأله به کمک تابع هیلبرت می‌باشد. تابع هیلبرت ابزاری مناسب برای مطالعه مجموعه‌ای از نقاط متناهی می‌باشد. چرا که تابع هیلبرت، در وهله اول اطلاعاتی جبری در زمینه حلقه مختصاتی، به دست می‌دهد و از آن مهمتر در گام بعد اطلاعاتی هندسی در باب پیکربندی و ساختمان هندسی نقاط در اختیار می‌گذارد. پیدا کردن تابع هیلبرت یک مجموعه متناهی از نقاط که دارای چندگانگی می‌باشند، مسأله‌ای بسیار دشوار می‌باشد، اما با این حال بسیار مورد توجه هندسه جبری دانان بوده است. اگرچه تلاش‌های زیادی در راستای حل این مسأله صورت گرفته است اما با این حال اطلاعات کمی در این باره موجود است.

برای اینکه بتوان پیچیدگی‌های مسأله را که ناشی از پیکربندی[۱] نقاط در $\mathbb{P}^r$ است، را کاهش داد فرض می‌کنیم این نقاط روی خم خاصی قرار بگیرند به خصوص فرض می‌کنیم این نقاط روی خم نرمال گویا قرار داشته باشند.

در این پایان نامه مسائل زیر را بررسی می‌کنیم.

الف) فرض کنیم $C \subset \mathbb{P}^r$، خم نرمال گویا با چندگانگی a باشد. در فصل سوم تابع هیلبرت C را محاسبه خواهیم کرد.

ب) فرض کنیم $P_1, \dots, P_s$، s نقطه متمایز در $\mathbb{P}^r$ باشند که روی خم نرمال گویای C قرار دارند. فرض کنیم $m_s, \dots, m_s, t$، اعداد صحیح نامنفی باشند و I_Z ایده‌ال همگن اسکیم صفر بعدی $Z = (P_1, \dots, P_s, m_1, \dots, m_s)$ باشد، آنگاه نشان می‌دهیم مسأله باز تعیین $H(\frac{R}{I_Z}, t)$ در حالت‌های خاصی به انتخاب نقاط بستگی ندارد.($R = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_r]$).

پ) فرض کنیم Z همان اسکیم بند (ب) باشد و $W = (Q_1, \dots, Q_s, m_1, \dots, m_s) \subset \mathbb{P}^r$ نقاطی متمایز باشند که کوچکترین زیرفضایی که هر $r+1$ تای آنها پدید می‌آورد همان $\mathbb{P}^r$ باشد. فرض کنیم I_Z و I_W به ترتیب ایده‌ال مجموعه نقاط Z و W باشند. آنگاه برای $r = 2$ و هر $t \in \mathbb{N}$ داریم $H(\frac{R}{I_W}, t) \geq H(\frac{R}{I_Z}, t)$.

---

[۱] configuration

سوالی که در رابطه با قسمت (پ) مطرح است این که چه موقع نامساوی فوق تبدیل به تساوی و چه موقع نامساوی اکید می‌شود. حدس می‌زنیم هنگامی که $m_1 = \cdots = m_s$، باشد نامساوی فوق تبدیل به تساوی خواهد شد.

ت) فرض کنیم p نقطه و l زیرفضای خطی از متمم بعد ۲ در $\mathbb{P}^r$ که در مکان عام قرار دارند، داشته باشیم. حال سوالی که مطرح است این است که آیا یک خم نرمال گویا وجود دارد که از این نقاط عبور کند و زیرفضاهای خطی را در تعداد مشخصی نقطه قطع کند. در واقع لازم است که خم نرمال گویا زیرفضاهای خطی را در $r-1$ نقطه قطع کند.

کاتالیزانو[۲] و جیمی‌لیانو[۳] مسأله (ب) را برای حالت $r = 2, 3$ حل کرده‌اند. همچنین الگوریتمی برای محاسبه $H(\frac{R}{I_Z}, t)$ وجود دارد که به $m_1, \ldots, m_s$ بستگی دارد. همچنین آنها سعی کرده‌اند این الگوریتم را به حالت کلی تر تعمیم دهند.

کاتالیزانو همچنین یک کران برای شاخص نظم یک مجموعه از نقاط در $\mathbb{P}^r$، که در مکان عام قرار دارند ارائه کرده است و زمانی که این نقاط روی خم نرمال گویا قرار دارند، دقیقاً شاخص نظم را مشخص کرده است. همچنین کاتالیزانو مسأله (پ) را برای زمانی که $r = 2$ حل کرده‌است.

در فصل آخر مسأله (ت) را بررسی خواهیم کرد. مسأله (ت) برای $r = 3$ در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم مورد بررسی قرار گرفته است و در سالهای اخیر کاتالیزانو و کارلینی [۴] این مسأله را برای r دلخواه حل کرده‌اند.

البته مسأله قسمت (ت) را می‌توان به حالت کلی تر آن تعمیم داد. بدین صورت که بجای خم نرمال گویا، می‌توان یک واریته ورونزه قرار داد. برای مثال کاپرانو[۵] مسأله وجود رویه ورونزه، که شامل یک مجموعه خاص از نقاط باشد را مورد مطالعه قرار داده است.

---
[۲] Catalisano
[۳] Gimigliano
[۴] Carlini
[۵] Kapranov

مسأله قسمت (ت) کاربردهای فراوانی بویژه در محاسبه تابع هیلبرت یک اسکیم (postulation) و محاسبه بعد واریته‌های قاطع بالاتر دارد. البته ایده استفاده از خم‌های نرمال گویا در مطالعه دستگاه‌های خطی و واریته‌های قاطع بالاتر یک واریته، مسأله‌ای مربوط به دوره کلاسیک می‌باشد.

فصل ۱

پیشنیازها

در این فصل مفاهیم و قضایایی را که در فصول بعدی برای تجزیه و تحلیل قضایای اصلی مورد نیازند و در منابع مختلف پراکنده‌اند ذکر می‌کنیم. چون این قضایا تقریباً شناخته شده‌اند، از اثبات آنها صرفنظر می‌کنیم و تنها مرجعی که قضیه از آنها نقل شده ذکر می‌کنیم.

در سراسر این پایان نامه $\mathbb{K}$، را به عنوان یک میدان بطور جبری بسته[۱] در نظر می‌گیریم.

۱.۱ اسکیم

در هندسه جبری بعد از واریته[۲]، عام‌ترین شئ هندسی، اسکیم‌ها[۳](یا طرح‌ها) هستند. در این قسمت مختصری از نظریه اسکیم، که برای مساله اصلی پایان نامه مورد نیاز است را ارائه خواهیم کرد.

برای مثال اگر I یک ایده‌ال حلقه مختصاتی $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ باشد آنگاه مجموعه صفرهای I یک واریته آفین در $\mathbb{A}^n$ برای ما تعریف می‌کند. همچنین مجموعه صفرهای ایده‌ال I^2 نیز همان مجموعه

[۱] algebraically closed field

[۲] varietie

[۳] schemes

قبلی را به ما می‌دهد، در واقع ما رادیکال هر ایده‌الی را در نظر می‌گیریم و تفاوتی میان I و $I^{۲}$ قرار نمی‌دهیم. حال اگر بخواهیم بین مجموعه جواب I و $I^{۲}$ تفاوت قائل شویم و یا اینکه در مطالعه مسائلی که در آن میدان ما بطور جبری بسته نیست، را بررسی کنیم اسکیم‌ها این ابزار را در اختیار ما قرار می‌دهند.

برای تعریف اسکیم ابتدا نیاز داریم با مفهوم بافه (شیف[۴]) آشنا شویم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک[۵] باشد. $\mathcal{F}$ را یک بافه از حلقه‌ها گویند هرگاه

(آ) برای هر زیر مجموعه باز $U \subseteq X$ ، $\mathcal{F}(U)$ یک حلقه باشد.

(ب) برای هر باز $V \subseteq U$ متعلق به X یک نگاشت از حلقه‌ها مانند $f_{UV} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ وجود داشته باشد بطوریکه در شرایط زیر صدق کنند:

(پ) $\mathcal{F}(\emptyset) = ۰$

(ت) f_{UU} نگاشت همانی باشد.

(ث) اگر $W \subseteq V \subseteq U$ که W، V و U زیر مجموعه‌های باز متعلق به X هستند آنگاه $f_{UW} = (f_{VW})o(f_{UV})$

(ج) اگر U یک مجموعه باز و $\{V_i\}$ یک پوشش باز برای آن باشد و $s \in \mathcal{F}(U)$ بطوریکه برای هر i ، $f_{UV_i}(s) = ۰$ آنگاه $s = ۰$

(چ) اگر U یک مجموعه باز و $\{V_i\}$ یک پوشش باز برای آن باشد و اگر برای هر i ، داشته باشیم $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ با این خاصیت که $f_{U,V_i \cap V_j}(s_i) = f_{U,V_i \cap V_j}(s_j)$ آنگاه یک $s \in \mathcal{F}(U)$ وجود دارد بطوریکه برای هر i، $f_{U,V_i}(s) = s_i$.

[۴] sheaf

[۵] topological space

در تعریف فوق اگر فقط شرایط (آ) تا (ث) برقرار باشد، آن را یک پیش بافه می‌نامند.

اگر $\mathcal{F}$ یک بافه روی فضای توپولوژیک X باشد. $\mathcal{F}(U)$ را یک برش $\mathcal{F}$ روی مجموعه باز U می‌نامیم. وهم‌چنین $\mathcal{F}(U)$ را با $\Gamma(U,\mathcal{F})$ نیز نمایش می‌دهند.

مثال ۱.۱.۱ اگر X یک واریته روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. برای هر مجموعه باز $U \subseteq X$ ، $\mathcal{O}(U)$ را حلقه توابع منظم[۶] از U به $\mathbb{K}$ می گیریم. آنگاه $\mathcal{O}$ یک بافه حلقه‌ها روی X است.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم $\mathcal{F}$ یک بافه روی X باشد و $p \in X$. حد مستقیم[۷] حلقه‌های $\mathcal{F}(U)$ برای همه U های شامل نقطه p را ساقه (استک[۸]) $\mathcal{F}$ در p می‌نامند.

مثال ۲.۱.۱ اگر X یک واریته آفین[۹] باشد و $\mathcal{O}$ بافه توابع منظم روی X باشد، آنگاه ساقه $\mathcal{O}_p$ در نقطه p مساوی $\mathcal{O}(X)_p$ یا همان موضعی شده حلقه مختصاتی X در نقطه p می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ دو بافه حلقه‌ها روی X باشند. یک ریختپایی (مورفیسم[۱۰]) $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$، مجموعه‌ای از ریختپایی‌ها از $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ می‌باشد، که برای هر مجموعه باز U و مجموعه باز V بطوریکه $V \subseteq U$ دیاگرام زیر جابجایی است.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\
\downarrow \rho_{UV} & & \downarrow \rho\prime_{UV} \\
\mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V)
\end{array}$$

---

[۶] regular function

[۷] direct limite

[۸] stalk

[۹] affine variety

[۱۰] morphism

φ را یکریختی [۱۱] گویند اگر از دو طرف دارای وارون باشد.

قضیه ۱.۱.۱ اگر $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ یک ریختپایی از بافه‌ها روی X باشد آنگاه φ یک یکریختی است اگر و تنها اگر ریختپایی القایی بین ساقه‌ها $\varphi_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p$ ، برای هر $p \in X$ یک یکریختی باشد.

برهان. مرجع [۱۲] فصل ۲، قضیه ۱.۱ را ببینید. ■

تعریف ۴.۱.۱ اگر $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$، یک ریختپایی از بافه حلقه‌ها باشد آنگاه ایده‌ال بافه‌ای که به هر باز U از X، هسته [۱۲] ریختپایی $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$، را نظیر می‌کند را بافه هسته φ می‌نامند.

تعریف ۵.۱.۱ $\mathcal{F}'$ را یک زیر بافه از $\mathcal{F}$ نامند هرگاه برای هر باز $U \subseteq X$ ، $\mathcal{F}'(U)$ یک زیر حلقه از $\mathcal{F}(U)$ باشد.

تعریف ۶.۱.۱ اگر $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت پیوسته بین فضاهای توپولوژیک باشد، برای هر بافه $\mathcal{G}$ روی Y، بافه وابسته به پیش بافه‌ای که به هر زیرمجموعه باز U از X ایده‌ال $\lim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)$ را نظیر می‌کند را تصویر وارون $f^{-1}\mathcal{G}$ تعریف می‌کنیم. حال اگر Z یک زیرفضای توپولوژیک X باشد و $i : Z \longrightarrow X$ نگاشت شمول باشد و $\mathcal{F}$ یک بافه روی X باشد، آنگاه $i^{-1}\mathcal{F}$ را تحدید $\mathcal{F}$ به Z یا بافه القایی می‌نامند و با $\mathcal{F}|_Z$ نمایش می‌دهند.

[۱۱] isomorphism

[۱۲] kernel

تعریف ۷.۱.۱ دوتایی $(X, \mathcal{O}_X)$ را یک فضای موضعاً حلقه‌ای[۱۳] گویند اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $\mathcal{O}_X$ یک بافه از حلقه‌ها روی آن باشد بطوریکه برای هر $p \in X$ ساقه $\mathcal{O}_{X,p}$ یک حلقه موضعی باشد.

مثال ۳.۱.۱ اگر A یک حلقه باشد آنگاه $(\mathrm{spec(A)}, \mathcal{O}_{spec})$ یک فضای موضعاً حلقه‌ای است.

تعریف ۸.۱.۱ فضای موضعاً حلقه‌ای $(X, \mathcal{O}_X)$ که یکریخت با طیف[۱۴] حلقه‌ای مانند A است را یک اسکیم آفین می‌گویند. یک اسکیم فضایی موضعاً حلقه‌ای است که برای هر نقطه آن یک همسایگی باز وجود دارد که این همسایگی با بافه القایی، یک اسکیم آفین باشد.

حال می‌خواهیم یکی از مهمترین رده از اسکیم‌ها را تعریف کنیم که با استفاده از حلقه‌های مدرج[۱۵] ساخته می‌شوند. که مشابه واریته تصویری هستند.

تعریف ۹.۱.۱ اگر S یک حلقه مدرج باشد، ProjS را مجموعه همه ایده‌ال‌های اول و همگن[۱۶] S ، بطوریکه هیچ یک از این ایده‌ال‌ها شامل تمام $S_+ = \bigoplus_{d>0} S_d$ نباشد، تعریف می‌کنیم.

حال می‌خواهیم یک توپولوژی روی ProjS قرار دهیم. فرض کنیم a یک ایده‌ال همگن از S باشد، زیرمجموعه $V(a)$ از S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$V(a) = \{\mathcal{P} \in \mathrm{ProjS} | \mathcal{P} \supseteq a\}$$

[۱۳] locally ringed space

[۱۴] spectrum

[۱۵] graded ring

[۱۶] homogeneous

با یک بررسی ساده می‌توان نشان داد که ProjS دارای یک توپولوژی است که در آن $V(a)$ ها زیرمجموعه‌های بسته آن را تشکیل می‌دهند.

حال می‌خواهیم یک بافه ساختمانی $\mathcal{O}$ از حلقه‌ها روی ProjS تعریف کنیم.

برای هر $\mathcal{P} \in \mathrm{ProjS}$، حلقه $S_{(\mathcal{P})}$ که عضوهای آن اعضای درجه صفر از حلقه موضعی $T^{-1}S$ می‌باشد که در آن T یک زیرمجموعه بطور ضربی یسته شامل اعضای همگن $S-\mathcal{P}$ می‌باشد، را در نظر می‌گیریم. حال برای هر زیرمجموعه باز $U \subseteq \mathrm{ProjS}$، $\mathcal{O}(U)$ را مجموعه تمام توابع $f : U \longrightarrow \bigsqcup S_{(\mathcal{P})}$ که در آن برای هر $\mathcal{P} \in U$ داریم $f(\mathcal{P}) \in S_{(\mathcal{P})}$ است، تعریف می‌کنیم. با یک بررسی ساده می‌توان نشان داد $\mathcal{O}$ در شرایط تعریف بافه صدق می‌کند.

تذکر ۱.۱.۱ فرض کنیم S یک حلقه مدرج باشد، آنگاه $(\mathrm{ProjS}, \mathcal{O})$ یک فضای موضعاً حلقه‌ای است.

گزاره ۱.۱.۱ فرض کنیم S یک حلقه مدرج باشد آنگاه:

آ) برای هر $\mathcal{P} \in \mathrm{ProjS}$، ساقه $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ با حلقه موضعی $S_{(\mathcal{P})}$ یکریخت است.

ب) برای هر عضو همگن $f \in S_+$، تعریف می‌کنیم $D_+(f) = \{\mathcal{P} \in \mathrm{ProjS} | f \notin \mathcal{P}\}$. آنگاه $D_+(f)$ یک زیرمجموعه باز ProjS می‌باشد. همچنین برای هر زیرمجموعه باز از ProjS یکریختی زیر از فضاهای موضعاً حلقه‌ای را داریم.

$$(D_+(f), \mathcal{O}\mid_{D_+(f)}) \cong \mathrm{SpecS_{(f)}}$$

که در آن $S_{(f)}$ یک زیر حلقه شامل عناصر از درجه صفر در حلقه موضعی S_f می‌باشد.

پ) $(\mathrm{ProjS}, \mathcal{O})$ یک اسکیم می‌باشد.

برهان. مرجع [۱۲] فصل ۲، گزاره ۲.۵ را ببینید. ■

مثال ۴.۱.۱ اگر $\mathbb{K}$ یک میدان بطور جبری بسته باشد، $\mathbb{P}^r_k = Proj\mathbb{K}[x_\circ, \dots, x_r]$ یک اسکیم می‌باشد. زیر فضایی از $\mathbb{P}^r_k$ ، که از نقطه‌های بسته فضای توپولوژیک $Proj\mathbb{K}[x_\circ, \dots, x_r]$ تشکیل شده است، بطور طبیعی با واریته تصویری $\mathbb{P}^r$ همومورف است.

تعریف ۱۰.۱.۱ بعد[۱۷] یک اسکیم را همان بعد فضای توپولوژیک آن تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ اگر $(X, \mathcal{O}_X)$ یک فضای موضعاً حلقه‌ای باشد، $\mathcal{F}$ را بافه ایده‌ال می‌گویند، هرگاه برای هر مجموعه باز U ، $\mathcal{F}(U)$ یک ایده‌ال حلقه $\mathcal{O}(U)$ باشد.

تذکر ۲.۱.۱ فرض کنیم X یک واریته باشد آنگاه X به همراه بافه ساختمانی از حلقه توابع منظم با مجمموعه نقاط بسته از اسکیم $\mathrm{Spec}K[X]$ همئومورف[۱۸] می‌باشد.(که در آن $K[X]$ حلقه توابع منظم واریته X می‌باشد).

۲.۱ تابع هیلبرت

یکی از ابزارهایی که اطلاعات مفیدی درباره یک واریته یا اسکیم به دست می‌دهد، تابع هیلبرت[۱۹] است. که به ما بعد فضای برداری چند جمله‌ای‌های همگن از درجه d که شامل واریته یا اسکیم می‌باشند را به ما می‌دهد.

[۱۷] dimension
[۱۸] homeomorphism
[۱۹] Hilbert function

تعریف ۱.۲.۱ اگر $X \subseteq \mathbb{P}^r$ یک واریته تصویری باشد، تابع $h_X : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ که به صورت

$$h_X(m) = \dim(k[X]_m)$$

که در آن $k[X] = k[x_\circ, \ldots, x_r]/I(X)$ حلقه مختصاتی همگن وابسته به X است تعریف می‌شود، را تابع هیلبرت X می‌نامند.
(می‌دانیم که $k[X]$ یک حلقه مدرج می‌باشد. و $h_X(m)$ بعد قسمت m ام از $k[X]$ را به عنوان فضای برداری روی $\mathbb{K}$ به ما می‌دهد.

مثال ۱.۲.۱ فرض کنید $X \subseteq \mathbb{P}^۲$ ، واریته‌ای متشکل از سه نقطه باشد. آنگاه مقدار $h_X(۱)$ هم‌خط یا غیر هم‌خط بودن این نقاط را مشخص می‌کند. با محاسبه‌ای ساده می‌توان نشان داد، اگر سه نقطه هم‌خط باشند $h_X(۱) = ۲$ و در غیر اینصورت $h_X(۱) = ۳$. و هم‌چنین نتیجه می‌شود برای $t \geq ۲$، $h_X(t) = ۳$.

فرض کنید $X \subseteq \mathbb{P}^r$ یک مجموعه متناهی از نقاط باشد. آنگاه $h_X(m)$ برای $m < d$، (که d تعداد نقاط است) اطلاعاتی در مورد وضعیت نقاط به ما می‌دهد.

قضیه ۱.۲.۱ فرض کنیم $X \subseteq \mathbb{P}^r$ یک واریته و h_X تابع هیلبرت آن باشد. آنگاه یک چند جمله‌ای P_X و عدد صحیح t وجود دارد، بطوریکه برای $m > t$ ، $h_X(m) = P_X(m)$. به علاوه درجه چندجمله‌ای P_X برابر بعد واریته است. هم‌چنین عدد صحیح t را شاخص نظم می‌نامند.
چندجمله‌ای P_X را چندجمله‌ای هیلبرت X می‌نامند. ضریب پیشرو چندجمله‌ای P_X برابر $(d/k!)$ می‌باشد که در آن k بعد واریته و d درجه واریته می‌باشد.

برهان. مرجع [۱۱] فصل ۱۳، گزاره۱۳.۲ را ببینید. ■

۳.۱ درجه

یکی از ویژگی‌های یک واریته، درجه[۲۰] آن می‌باشد که در زیر آن را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱ اگر $X \subseteq \mathbb{P}^r$ یک واریته k بعدی تحویل ناپذیر باشد، آنگاه درجه یک واریته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

(آ) تعداد نقاط اشتراک X با زیر فضای خطی $r-k$ بعدی از $\mathbb{P}^r$.

(ب) درجه ابر رویه‌ای که با X به طور دو گویا ایزومورف است.

(پ) درجه نگاشت پوشا و متناهی $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^k$ (بعد فضای برداری $\mathbb{K}(X)$ روی $\mathbb{K}(\mathbb{P}^k)$).

اگر X یک واریته تحویل‌پذیر دلخواه از بعد k باشد، آنگاه درجه X برابر مجموع درجه مؤلفه‌های k بعدی X می‌باشد.

مثال ۱.۳.۱ فرض کنیم X یک ابر رویه تحویل ناپذیر در $\mathbb{P}^r$ باشد و F معادله تعریف کننده آن باشد بنابر تعریف (ب)، درجه X برابر درجه F می‌باشد. به خصوص اگر X یک زیر فضای خطی $\mathbb{P}^r$ باشد آنگاه درجه X برابر ۱ خواهد بود.

قضیه ۱.۳.۱ اگر $X, Y \subseteq \mathbb{P}^r$ زیر مجموعه‌هایی سره و بسته به ترتیب از بعد k و l باشند، بطوریکه $k + l \geq r$ و اشتراک آنها تراورد[۲۱] باشد. آنگاه

$$deg(X \cap Y) = degX.degY$$

و اگر $k + l = r$ آنگاه $X \cap Y$ دقیقا شامل حاصلضرب درجه X در درجه Y نقطه می‌باشد.

[۲۰] degree

[۲۱] transversal

قضیه فوق به قضیه بزو معروف است.

تذکر ۱.۳.۱ فرض کنیم $X \subseteq \mathbb{P}^r$ یک زیرواریته از درجه ۱ باشد، آنگاه X یک زیرواریته خطی $\mathbb{P}^r$ می‌باشد.

۴.۱ مجموعه متناهی از نقاط

فرض کنیم P یک نقطه در $\mathbb{P}^r$ باشد و $\mathcal{P}$ ایده‌ال وابسته به آن باشد حال اگر m یک عدد صحیح مثبت باشد آنگاه ایده‌ال $\mathcal{P}^m$ از حلقه $R = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_r]$ یک اسکیم صفر بعدی تعریف می‌کند، که در واقع همان تک نقطه‌ای P به همراه چندگانگی آن می‌باشد.

تذکر ۱.۴.۱ فرض کنیم P یک نقطه در $\mathbb{P}^r$ باشد و $\mathcal{P}$ ایده‌ال اول وابسته به آن باشد. حال اگر m یک عدد صحیح مثبت باشد آنگاه عبارات زیر معادلند:

آ) $F \in \mathcal{P}^m$.

ب) ناهمگن شده F و همه مشتق‌های جزئی آن تا مرتبه $m - 1$ در P صفر هستند.

پ) P نقطه تکین $V(F)$ با چندگانگی حداقل m است.

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنیم $X = \{P_1, \dots, P_s\}$ یک مجموعه از نقاط در $\mathbb{P}^r$ باشد و $\{m_1, \dots, m_s\}$ اعداد صحیح مثبت باشند.اگر $\mathcal{P}_i$ ایده‌ال وابسته به نقطه P_i باشد، اسکیم صفر بعدی تعریف شده توسط ایده‌ال $I = \mathcal{P}_1^{m_1} \cap \dots \cap \mathcal{P}_s^{m_s}$ را با $Z = (P_1, \dots, P_s; m_1, \dots, m_s)$ نمایش می‌دهند.

فرض کنیم $P_1, \dots, P_s$ نقاطی در $\mathbb{P}^r$ باشند. فرض کنیم $F_1, \dots, F_N$ همه تک جمله‌ای‌های از درجه d در R باشد. می‌دانیم $N = \binom{n+d}{d}$ بنابراین، پیدا کردن چندجمله‌ای‌هایی که از این نقاط بگذرند

معادل پیدا کردن ضرایب $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ از دستگاه معادلات خطی $\lambda_1 F_1(P_i) + \cdots + \lambda_N F_N(P_i) = 0$ برای $1 \le i \le s$ می‌باشد. به عبارت دیگر می‌توان ماتریس ضرایب دستگاه فوق که یک ماتریس $s \times \binom{n+d}{d}$ می‌باشد را تشکیل داد. فرض کنیم این ماتریس به صورت $G_d(P_1, \dots, P_s) = (g_{ij})$ که در آن $g_{ij} = F_j(P_i)$ باشد، حال می‌توان شرایط وجود جواب را بر حسب این ماتریس بیان کرد.

تعریف ۲.۴.۱ فرض کنیم $\{P_1, \dots, P_s\}$ نقاطی در $\mathbb{P}^r$ باشند، گوییم این نقاط در $S-$ مکان عام[۲۲] قرار دارند هرگاه ماتریس $G_d(P_1, \dots, P_s)$، برای هر عدد صحیح $d \ge 1$ دارای حداکثر رتبه باشد.

بطور معادل اگر $\mathbb{P}^r \times \cdots \times \mathbb{P}^r$ (s مرتبه) فضای پارامتری کننده واریته‌های متشکل از s نقطه در $\mathbb{P}^r$ باشد، آنگاه گوییم $\{P_1, \dots, P_s\}$ در $S-$ مکان عام قرار دارند هرگاه این نقاط در یک زیر مجموعه باز و چگال فضای پارامتری کننده واریته بتوانند تغییر کنند.

تعریف ۳.۴.۱ فرض کنیم $\{P_1, \dots, P_s\}$ نقاطی در $\mathbb{P}^r$ باشند، گوییم این نقاط در $S-$ مکان عام بطور خطی [۲۳] قرار دارند هرگاه هر مجموعه $r+1$ تایی از آن فضای $\mathbb{P}^r$ را تولید کند.

تعریف ۴.۴.۱ فرض کنیم Z یک اسکیم صفر بعدی باشد که توسط ایده‌ال I تعریف می‌شود. در این صورت طول بلندترین زنجیر کاهشی و سره از زیرمدول‌های R/I را درجه X می‌نامیم.

مثال ۱.۴.۱ فرض کنیم $Z = (P, m)$ که در آن $P \in \mathbb{P}^r$ و همچنین $\mathcal{P}$ ایده‌ال اول وابسته به آن باشد آنگاه با یک بررسی ساده می‌توان نشان داد که عناصر حلقه مختصاتی Z، $R/\mathcal{P}^m$ از درجه

[۲۲] general position

[۲۳] linear general position

حداکثر $m-1$ هستند، که این مطلب نشان می‌دهد که طول[۲۴] $R/\mathcal{P}^m$ برابر $\binom{r+m-1}{r}$ است. در نتیجه طبق تعریف فوق این عدد همان درجه Z می‌باشد.

مثال ۲.۴.۱ فرض کنیم $Z=(P_1,\dots,P_s;m_1,\dots,m_s)$، اسکیمی صفر بعدی باشد بطوریکه P_i ها در مکان عام قرار دارند. هم‌چنین دنباله دقیق زیر را در نظر بگیرید، که در آن $R=\mathbb{K}[x_0,\dots,x_r]$ می‌باشد.

$$0\to\frac{R}{\mathcal{P}_1^{m_1}\cap\cdots\cap\mathcal{P}_s^{m_s}}\to\frac{R}{\mathcal{P}_1^{m_1}}\oplus\cdots\oplus\frac{R}{\mathcal{P}_s^{m_s}}\to\frac{R}{\langle\mathcal{P}_1^{m_1}+\cdots+\mathcal{P}_s^{m_s}\rangle}\to 0$$

آنگاه

$$\frac{R}{\mathcal{P}_1^{m_1}\cap\cdots\cap\mathcal{P}_s^{m_s}}\cong\frac{R}{\mathcal{P}_1^{m_1}}\oplus\cdots\oplus\frac{R}{\mathcal{P}_s^{m_s}}$$

در نتیجه درجه اسکیم Z برابر $\sum_{i=1}^{s}\binom{r+m_i-1}{r}$ می‌باشد.

تعریف ۵.۴.۱ فرض کنیم $Z=(P_1,\dots,P_s;m_1,\dots,m_s)$ اسکیم صفر بعدی در $\mathbb{P}^r$ تعریف شده بوسیله ایده‌ال $I=\mathcal{P}_1^{m_1}\cap\cdots\cap\mathcal{P}_s^{m_s}$ باشد. آنگاه برای هر عدد صحیح t، $\mathcal{L}_t$ را دستگاه خطی شامل تمام چندجمله‌ای‌های از درجه t که روی Z صفر می‌شوند، در نظر می گیریم. می دانیم

$$\begin{aligned}\dim_k(\mathcal{L}_t)&=\dim_k(I_t)-1=\dim_k(R_t)-H_{R/I}(t)-1\\&=\dim_k(R_t)-e+h(\mathcal{L}_t)-1\end{aligned}$$

که $h(\mathcal{L}_t)=e-H_{R/I}(t)$، سیستم خطی $\mathcal{L}_t$ منظم نامیده می‌شود اگر و تنها اگر $H_{R/I}(t)=e$ یا به طور معادل $h(\mathcal{L}_t)=0$.

[۲۴] length

حال اگر $J := \mathcal{P}_1^{m_1} \cap \cdots \cap \mathcal{P}_s^{m_s}$ ، $I := J \cap \mathcal{P}^a$ ، $I' := J \cap \mathcal{P}^{a-1}$ ، $e = e(R/I)$ و $e' = e(R/I')$ هم‌چنین می‌دانیم

$$e = \sum_{i=1}^s \binom{m_i+n-1}{n} + \binom{a+n-1}{n}$$
$$e' = \sum_{i=1}^s \binom{m_i+n-1}{n} + \binom{a+n-2}{n}$$

ازاینرو

$$e - e\prime = \binom{a+n-2}{n-1}$$

لم ۱.۴.۱ دستگاه خطی $\mathcal{L}_t$ منظم است اگر و تنها اگر دستگاه خطی $\mathcal{L}'_t$ منظم باشد و $\dim_k(I'/I)_t \geq e - e'$.

برهان. مرجع [۷]، لم ۹ را ببینید. ■

۵.۱ خم نرمال گویا

در این قسمت خم نرمال گویا[۲۵] را معرفی و برخی خواص مقدماتی آن را یادآور می‌شویم.

تعریف ۱.۵.۱ واریته تحویل ناپذیر[۲۶] آفین X را نرمال گویند اگر، حلقه مختصاتی X، یعنی $k[X]$ بطور انتگرالی بسته باشد. حال یک واریته شبه تصویری[۲۷] تحویل ناپذیر را نرمال گویند، هرگاه هر نقطه آن دارای یک همسایگی آفین نرمال باشد.

---

[۲۵] rational normal curve

[۲۶] irreducible

[۲۷] quasiprojective