چکیده

استقلال نقاط هیگنر [1] وابسته به طبقه‌های ماکسیمال در میدانهای مربعی موهومی متمایز، روی یک خم بیضوی تعریف شده روی $\mathbb{Q}$ که ضرب مختلط ندارد، توسط سیلورمن [2] و روزن [3] در [۲۹] نشان داده شده است. در این پایان نامه ما کار آنها را به حالتی که نقاط هیگنر وابسته می‌شوند به طبقه‌های غیرماکسیمالی که دارای هادی مساویند، تعمیم می‌دهیم. در واقع کار آنها را از حالتی که طبقه‌ها دارای هادی ۱ هستند به حالتی که طبقه‌ها دارای هادی $f \geq 1$ می باشند، تعمیم خواهیم داد.

کلمات کلیدی: خم بیضوی، فرم مدولار، نقاط هیگنر.

رده‌بندی انجمن ریاضی آمریکا: ۱۱G۰۵، ۱۱R۳۷.

---

[1]Heegner

[2]Silverman

[3]Rosen

فهرست مطالب

فهرست علائم اختصاری

ضرب مختلط .... CM

مبین $\mathcal{O}$ .... $Disc(\mathcal{O})$

مجموعه نقاط هیگنر روی $X_\circ(N)$ وابسته به $\mathcal{O}$ .... $ELL^N(\mathcal{O})$

گروه موردل-ویل خم بیضوی E روی میدان عددی K .... $E(K)$

خم بیضوی E روی میدان K .... E/K

تحویل E در $\mathfrak{p}$ .... $\widetilde{E}_\mathfrak{p}$

نیم صفحه بالائی پوانکاره .... $\mathcal{H}$

مجموعه نقاط هیگنر روی خم بیضوی وابسته به $\mathcal{O}$ .... $HP(\mathcal{O})$

نیم صفحه بالائی پوانکاره توسعه یافته .... $\mathcal{H}^*$

میدان کلاسی حلقه‌ای K وابسته به $\mathcal{O}$ .... $K_\mathcal{O}$

L-تابع وابسته به خم بیضوی E روی میدان عددی K .... $L(E/K,s)$

L-تابع وابسته به فرم مدولار f .... $L(f,s)$

طبقه در میدان عددی .... $\mathcal{O}$

طبقه ماکسیمال در میدان عددی K .... $\mathcal{O}_K$

نگاشت پارامتری سازی مدولار برای E .... Φ_E

نگاشت یکشکل سازی وایراشتراس .... Φ_ω

نگاشت پسکشی Φ_N .... Φ_N^*

گروه پیکارد وابسته به $\mathcal{O}$ .... $Pic(\mathcal{O})$

فضای فرمهای بازگشتی از وزن ۲ و سطح N .... $S_۲(N)$

فضای متم متعامد $S_۲^{old}(N)$ در $S_۲(N)$ نسبت به ضرب پترسون .... $S_۲^{new}(N)$

زیر فضای تولید شده توسط فرمهای کهنه در فضای $S_۲(N)$ .... $S_۲^{old}(N)$

عملگر nام هکه .... T_n

خم مدولار .... $X_۰(N)$

مقدمه

فرض کنیم E یک خم بیضوی تعریف شده روی یک میدان عددی باشد. روشهایی که بتوانند نقاطی گویا روی E بدهند، در حساب خمهای بیضوی بسیار با اهمیت می باشند. بیرچ[۴] در [۷] روشی برای بدست آوردن نقاطی گویا روی خمهای بیضوی تعریف شده روی $\mathbb{Q}$ ارائه کرد که به نقاط هیگنر موسوم شدند. در واقع این نقاط وابسته به طبقه‌هایی خاص در میدانهای مربعی موهومی می‌باشند که روی میدان کلاسی حلقه‌ای [5] آنها، وابسته به طبقه‌ها، گویا هستند.

در ابتدا این روش برای بدست آوردن نقاط گویا روی خمهای بیضوی تعریف شده روی $\mathbb{Q}$ مورد توجه بود، تا این که گراس[۶]، کوهنن[۷] و زگیه[۸][۱۷، ۱۸] توانستند یک ارتباط مؤثر و مهم بین این داده‌های جبری و مشتق مرتبه اول $L(E/K,s)$، Lـتابع وابسته به E روی یک میدان مربعی موهومی K که موجودی تحلیلی می باشد، در نقطه $s=۱$ ارائه

[4] Birch

[5] Ring class field

[6] Gross

[7] Kohnen

[8] Zagier

دهند. آنها با استفاده از نقاط هیگنر، نقطه ای مانند P_K در گروه موردل-ویل [9] $E(K)$ بدست آوردند و نشان دادند که ارتفاع کانونی این نقطه متناسب است با مقدار $L'(E/K, 1)$ و به عنوان نتیجه ای از آن داریم، $P_K \in E_{tors}(K)$ اگر و تنها اگر $L'(E/K, 1) = 0$. بعداً کالیوگین [10] [۲۳، ۲۴] نشان داد که با استفاده از این نقاط می توان یک کران بالا برای رتبه گروه $E(K)$ بدست آورد.

سرانجام، این کارها منجر به اثبات حالت خاصی از حدس معروف بیرچ و سوینرتون دایر [11] در مورد خمهای بیضوی تعریف شده روی $\mathbb{Q}$ شد. و تنها حالتی از این حدس می باشد که تا کنون اثبات شده است. در واقع نشان دادند که:

اگر رتبه تحلیلی خم بیضوی $E/\mathbb{Q}$ کوچکتر یا مساوی یک باشد آنگاه حدس بیرچ و سوینرتون دایر درست است.

لذا مطالعه مفهوم نقاط هیگنر مورد توجه قرار گرفت و ریاضیدانانی مثل دارمون [12] و برتولینی [13] مطالعات گسترده ای در این زمینه انجام دادند. آنها توانستند ایده بیرچ را برای بدست آوردن نقاطی گویا روی E که به نقاط استارک [14]-هیگنر موسوم شده اند، تعمیم دهند. که می تواند زمینه ای برای تحقیق افراد علاقمند باشد. برای دیدن برخی از کارهای آنها در این زمینه به [۳، ۴، ۵، ۶، ۱۱، ۱۲، ۱۳] مراجعه کنید. علاوه بر این برای دیدن تعمیمی از رابطه گراس و زگیه از حالت نقاط هیگنر با هادی ۱ به حالت نقاط هیگنر با

---

9 Mordell-Weil

10 Kolyvagin

11 Birch and Sowinnerton-Dyer

12 Darmon

13 Bertolini

14 Stark

هادی $f \geq ۱$ که توسط ژانگ[15] انجام شد به[۳۵، ۳۶] مراجعه کنید. همچنین برای دیدن تعمیم کارهای فوق به حالتی که خم بیضوی بجای میدان عددی روی میدان تابعی در نظر گرفته می شود به[۳۳] مراجعه کنید.

بنا به قضیه موردل-ویل گروه آبلی $E(K)$ با تولید متناهی است اما اثبات قضیه، الگوریتمی برای تعیین مولدهای $E(K)/E_{tors}$ ارائه نمی دهد و تاکنون نیز الگوریتمی که بتواند مولدهای بخش غیرتابی $E(K)$ را مشخص کند ارائه نشده است. لذا بررسی استقلال نقاط گویا روی خم بیضوی از اهمیت ویژه ای برخوردار است. بنابراین سؤالی که در این جا مطرح می شود اینستکه، استقلال نقاط هیگنر روی خم بیضوی چگونه است به عبارت دیگر آیا نقاط هیگنر بدست آمده روی خم بیضوی می توانند تحت شرایطی مستقل باشند. گراس، کوهنن و زگیه در[۱۷، ۱۸] رفتار نقاط هیگنر روی خم بیضوی $E/\mathbb{Q}$ وابسته به میدانهای مربعی موهومی متمایز، را مورد بررسی قرار دادند و نشان دادند که اگر $P_۱, \ldots, P_r$ نقاط هیگنر وابسته به طبقه‌های ماکسیمال به ترتیب در میدانهای مربعی متمایز $K_۱, \ldots, K_r$ باشند و $Q_i = Tr_{H_i/\mathbb{Q}}(P_i)$ که H_i میدان کلاسی هیلبرت[16] K_i است، آنگاه زیر گروه تولید شده توسط $Q_۱, \ldots, Q_r$ در $E(\mathbb{Q})$ حداکثر از رتبه یک است.

در سال ۲۰۰۷ سیلورمن و روزن [۲۹] استقلال نقاط هیگنر $P_۱, \ldots, P_r$ را با این فرض که E دارای CM نیست مورد بررسی قرار دادند و شرایطی کافی برای مستقل بودن آنها در $E(\overline{\mathbb{Q}})/E_{tors}$ ارائه کردند. در این پایان نامه ما کار آنها را به حالتی که طبقه‌ها غیر ماکسیمال با هادی مساویند، تعمیم می دهیم. در واقع کار آنها را از حالتی که طبقه‌ها دارای هادی ۱ هستند به حالتی که طبقه‌ها دارای هادی $f \geq ۱$ می باشند، تعمیم خواهیم داد.

---

[15] Zhang

[16] Hilbert class field

در کارهای انجام شده برای بررسی استقلال نقاط هیگنر که به آنها اشاره کردیم، باید توجه کرد که برای بدست آوردن نقاط هیگنر روی خم بیضوی، نقاط هیگنر وابسته به میدانهای مربعی موهومی متمایز در نظر گرفته شده‌اند و طبیعی است که‌می توان بجای این کار نقاط هیگنر وابسته به طبقه‌های مختلف در یک میدان مربعی موهومی را در نظر گرفت و استقلال آنها را مورد بررسی قرار داد. برای دیدن کارهایی در این زمینه به [۱۶، ۱۹، ۲۳، ۲۴] مراجعه کنید.

در این پایان نامه در فصل یک مفاهیم و قضایای مورد نیاز برای تعریف نقاط هیگنر را معرفی می کنیم و هدف ما در این فصل بیان وجود پارامتری سازی مدولار برای خمهای بیضوی تعریف شده روی $\mathbb{Q}$ می باشد که برای تعریف نقاط هیگنر روی یک خم بیضوی اساس کار می باشد. در فصل دوم ابتدا مفاهیم مورد نیاز از نظریه میدان کلاسی، در حدی که به آن نیاز داریم، و سپس مفهوم نقاط هیگنر روی خم مدولار ارائه خواهد شد و با استفاده از پارامتری سازی مدولار، مفهوم نقاط هیگنر روی خم بیضوی تعریف شده و مثالی از نحوه محاسبه نقاط گویا روی خم بیضوی با استفاده از مفهوم نقاط هیگنر در PARI/GP آورده می شود. و در پایان نیز صورت دقیق تر برخی از نتایج مهم بدست آمده از مفهوم نقاط هیگنر که در این بخش بطور اجمالی به آنها اشاره شد را مطرح می کنیم تا هدف این پایان نامه و چگونگی شکل گیری موضوع آن مشخص شود. سرانجام در فصل سوم نتایج بدست آمده در مورد استقلال نقاط هیگنر را بیان و اثبات می کنیم و سپس سؤالاتی در این زمینه که می توانند موضوع تحقیق قرار بگیرند، مطرح می شوند. قابل ذکر است که نتایج این کار در International Journal of Number Theory برای چاپ مورد پذیرش قرار گرفته است[۲].

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

در این فصل مفاهیم و قضایای مورد نیاز برای اثبات مدولار بودن خمهای بیضوی تعریف شده روی $\mathbb{Q}$ بیان می شود که نتیجه آن اثبات وجود پارامتری سازی مدولار برای این خمهاست. به عبارت دیگر نشان خواهیم داد که اگر $E/\mathbb{Q}$ یک خم بیضوی با هادی N باشد آنگاه نگاشت جبری $\Phi_E : X_\circ(N) \to E$ تعریف شده روی $\mathbb{Q}$ که درآن $X_\circ(N)$ خم مدولار است، موجود می باشد. این نتیجه در تعریف مفهوم نقاط هیگنر روی یک خم بیضوی اساسی است. قابل ذکر است که مطالب ارائه شده بطور خلاصه و بدون اثبات آورده شده اند و برای دیدن جزئیات و اطلاعات بیشتر به مراجع معرفی شده مراجعه کنید.

فرض کنیم E یک خم بیضوی روی میدان K با معادله وایرشتراس[1]

$$y^۲ + a_۱xy + a_۳y = x^۳ + a_۲x^۲ + a_۴x + a_۶ \quad , a_i \in K \qquad (۱-۱)$$

باشد. چند پارامتر مهم برحسب ضرایب a_i ها به E وابسته می شوند که چون در این پایان نامه از آنها بارها استفاده خواهیم کرد در اینجا آنها را معرفی می کنیم تا هم خواننده در

[1] Weierstrass

ادامه کار راحتر باشد و هم ما بتوانیم به آنها ارجاع دهیم.

اگر مشخصه میدان K مخالف ۲ باشد با قرار دادن $\frac{1}{2}(y - a_1x - a_3)$ در معادله (۱)، بجای y خواهیم داشت

$$y^2 = x^3 + b_2x^2 + b_4x + b_6 \qquad (۱-۲)$$

که در آن $b_4 = 2a_4 + a_1a_3$، $b_2 = a_1^2 + 4a_2$ و $b_6 = a_3^2 + 4a_6$.

تعریف ۱.۱ قرار می دهیم

$$b_8 := a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2$$

$$c_4 := b_2^2 - 24b_4$$

$$\Delta_E := -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6$$

$$\omega_E := dx/(2y + a_1x + a_3) = dy/(3x^2 + 2a_2x + a_4 - a_1y)$$

که در آن Δ_E و ω_E را به ترتیب مبین و فرم دیفرانسیل نرون [2] خم بیضوی E نامیم.

۱-۱ L-توابع خمهای بیضوی

فرض کنیم E/K خمی با معادله زیر باشد

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \quad , a_i \in K \qquad (۱-۳)$$

[2] Néron

نشان داده می شود(صفحه ۵۰ مرجع[۳۰]) E منفرد است اگر و تنها اگر $\Delta_E = ۰$.

تعریف ۲.۱ فرض کنیم P نقطه‌ای منفرد روی خم E با معادله (۳) و α و β شیبهای خطهای مماس بر E در P باشند. نقطه P را

۱. گره نامیم هرگاه $\alpha \neq \beta$.

۲. نقطه بازگشتی نامیم هرگاه $\alpha = \beta$.

گزاره ۳.۱ خم E با معادله (۳)

۱. دارای گره است اگر و تنها اگر $\Delta_E = ۰$ و $c_۴ \neq ۰$.

۲. دارای نقطه باز گشتی است اگر و تنها اگر $\Delta_E = c_۴ = ۰$.

اثبات. به گزاره ۱.۴ صفحه ۵۰ [۳۰] مراجعه کنید. □

قضیه ۴.۱ فرض کنیم E/K خمی با معادله (۳) و $E_{ns}(K)$ مجموعه نقاط نامنفرد Kـگویای روی E باشد.

۱. اگر E دارای نقطه بازگشتی باشد، آنگاه $E_{ns}(K) \cong K^+$.

۲. اگر E دارای گره باشد، قرار می دهیم $L = K(\alpha, \beta)$ که α و β شیب خطوط مماس بر E در نقطه گره هستند. در این صورت $E_{ns}(K) \cong K^*$ هرگاه $L = K$ و $E_{ns}(K) \cong \{x \in L^* : N_{L/K}(x) = ۱\}$ هرگاه $L \neq K$.

اثبات. به گزاره ۲.۵ صفحه ۶۱ [۳۰] مراجعه کنید. □

فرض کنیم K یک میدان عددی و $\mathcal{O}_K$ حلقه صحیح های K، $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آ ل اول $\mathcal{O}_K$ و $v_{\mathfrak{p}}$ ارزیاب وابسته به $\mathfrak{p}$ باشد. اگر E یک خم بیضوی روی K باشد، معادله وایراشتراس

را برای E، $i=۱,۲,۳,۴,۶$ و $a_i \in \mathcal{O}_K$ که $y^۲ + a_۱xy + a_۳y = x^۳ + a_۲x^۲ + a_۴x + a_۶$ در $\mathfrak{p}$ مینیمال گوئیم، هرگاه برای هر معادله $y^۲ + a'_۱xy + a'_۳y = x^۳ + a'_۲x^۲ + a'_۴x + a'_۶$ که E را توصیف می کند و $a'_i \in \mathcal{O}_K$ داشته باشیم $\upsilon_{\mathfrak{p}}(\Delta_E) \leq \upsilon_{\mathfrak{p}}(\Delta'_E)$. که در آن Δ_E و Δ'_E به ترتیب مبین های E با ضرایب a_i ها و a'_i ها است. همواره میتوان چنین مدلی برای E در $\mathfrak{p}$ یافت (صفحه ۱۷۲ [۳۰]).

فرض کنیم $E : y^۲ + a_۱xy + a_۳y = x^۳ + a_۲x^۲ + a_۴x + a_۶$ که $a_i \in \mathcal{O}_K$، یک خم بیضوی با معادله مینیمال در $\mathfrak{p}$ باشد. تحویل E در $\mathfrak{p}$ را با $\widetilde{E}_{\mathfrak{p}}$ نمایش داده و تعریف می کنیم

$$\widetilde{E}_{\mathfrak{p}} : y^۲ + \overline{a}_۱xy + \overline{a}_۳y = x^۳ + \overline{a}_۲x^۲ + \overline{a}_۴x + \overline{a}_۶$$

که در آن $\overline{a}_i$ مانده a_i به هنگ $\mathfrak{p}$ است. لذا $\widetilde{E}_{\mathfrak{p}}$ یک خم روی میدان متناهی $k := \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ می باشد.

اگر $\upsilon_{\mathfrak{p}}(\Delta_E) = ۰$ باشد آنگاه $\widetilde{E}_{\mathfrak{p}}$ یک خم بیضوی روی k است و در این حالت گوئیم E در $\mathfrak{p}$ دارای تحویل خوب می باشد.

تعریف ۵.۱ فرض کنیم E/K یک خم بیضوی، و $\mathfrak{p}$ ایدهآل اولی در $\mathcal{O}_K$ بطوریکه $\widetilde{E}_{\mathfrak{p}}$ خمی منفرد باشد. در این صورت گوئیم E/K در $\mathfrak{p}$ دارای تحویل بد است. علاوه بر این

۱. اگر $\widetilde{E}_{\mathfrak{p}}$ دارای نقطه بازگشتی باشد، گفته می شود E/K در $\mathfrak{p}$ دارای تحویل جمعی است.

۲. اگر $\widetilde{E}_{\mathfrak{p}}$ دارای گره و $\widetilde{E}_{\mathfrak{p}_{ns}}(k) \cong k^*$ باشد، گفته می شود E/K در $\mathfrak{p}$ دارای تحویل ضربی شکافته شده است.

۳. اگر $\widetilde{E}_{\mathfrak{p}}$ دارای گره و $\widetilde{E}_{\mathfrak{p}_{ns}}(k) \ncong k^*$ باشد، گفته می شود E/K در $\mathfrak{p}$ دارای تحویل ضربی غیر شکافته شده است.

تعریف ۶.۱ فرض کنیم E یک خم بیضوی روی میدان عددی K باشد. هادی E به صورت $\mathcal{N} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{f(\mathfrak{p})}$ تعریف می شود که در آن $\mathfrak{p}$ ایده‌آ ل اول در $\mathcal{O}_K$ است و $f(\mathfrak{p})$

۱. برابر صفر است هرگاه E/K در $\mathfrak{p}$ دارای تحویل خوب باشد.

۲. برابر یک است هرگاه E/K در $\mathfrak{p}$ دارای تحویل ضربی باشد.

۳. برابر دو است هرگاه E/K در $\mathfrak{p}$ برای هر اول $\mathfrak{p}$ که بالای عدد اول $p \geq ۵$ است، دارای تحویل جمعی باشد. (در سایر حالات برای تعیین $f(\mathfrak{p})$ به صفحه ۳۷۹ [۳۱] مراجعه کنید.)

حال با توجه به مطالب ارائه شده می توان مفهوم Lـتابع وابسته به یک خم بیضوی را تعریف کرد. فرض کنیم E یک خم بیضوی تعریف شده روی میدان عددی K با هادی $\mathcal{N}$ باشد. اگر $\mathfrak{p}$ یک اول متناهی از K باشد، قرار می دهیم $|\mathfrak{p}| := N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})$ و میدان مانده‌ای K در $\mathfrak{p}$ را با $K_{\mathfrak{p}}$ نمایش می دهیم.

Lـتابع وابسته به E روی K را بشکل زیر تعریف می کنیم

$$L(E/K,s) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathcal{N}} (۱ - a_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{p}|^{-s} + |\mathfrak{p}|^{۱-۲s})^{-۱} \prod_{\mathfrak{p} | \mathcal{N}} (۱ - a_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{p}|^{-s})^{-۱} =: \sum_{\upsilon} a_{\upsilon}|\upsilon|^{-s}$$

که در آن $\circ \neq \upsilon \trianglerighteq \mathcal{O}_K$ و

$$a_{\mathfrak{p}} = |\mathfrak{p}| + ۱ - \#\widetilde{E}_{\mathfrak{p}}(K_{\mathfrak{p}})$$

است. این حاصلضرب روی نیم صفحه $\Re(s) > ۳/۲$ همگرا و $L(E/K,s)$ روی این نیم صفحه یک تابع تحلیلی می باشد. (به صفحه ۱۷۲ [۳۱] مراجعه کنید.)

۱-۲ خم مدولار

برای توضیحات بیشتر و دیدن جزئیات مطالبی که در این بخش ارائه می شوند به [۲۲] و یا به [۱۴] مراجعه کنید.

فرض کنیم

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \ Im(z) > 0\}.$$

نیم صفحه بالایی پوانکاره[3] باشد. گروه $SL_2(\mathbb{Z})$ متشکل از ماتریسهای ۲ × ۲ با درایه‌های صحیح که دارای دترمینان یک می باشند، روی $\mathcal{H}$ به صورت زیر کنش می کند.

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{H} &\to \mathcal{H} \\ (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau) &\mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}. \end{aligned}$$

فرض کنیم N یک عدد صحیح مثبت باشد. قرار می دهیم

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : \ N \mid c \right\}$$

$\Gamma_0(N)$ روی نیم صفحه بالایی توسعه یافته، یعنی $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$، کنش می کند و خارج قسمت $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}^*$ را با $X_0(N)$ نمایش می دهیم و خم مدولار می نامیم. کنش $\Gamma_0(N)$ روی $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ دارای تعداد متناهی مدار می باشد که آنها را نقاط بازگشتی می نامیم. و نشان داده می شود که $X_0(N)$ صفرهای یک چند جمله‌ای با ضرایب در $\mathbb{C}$، یعنی یک خم جبری روی $\mathbb{C}$ است.

[3] Poincaré

۱-۳ فرم مدولار

تعریف ۷.۱ تابع تحلیلی $f:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ را یک فرم مدولار از وزن ۲ روی $\Gamma_{\circ}(N)$ یا از سطح N نامیم هرگاه

۱. برای هر $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma_{\circ}(N)$،

$$f(\gamma\tau)=(c\tau+d)^{2}f(\tau).$$

۲. $f(\tau)$ در تمام نقاط بازگشتی $\Gamma_{\circ}(N)\backslash\mathcal{H}^{*}$ تحلیلی باشد.

و یک فرم مدولار را فرم بازگشتی نامیم هرگاه مقدار آن در نقاط بازگشتی صفر باشد.

مجموعه فرمهای مدولار از وزن ۲ و سطح N تشکیل یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ می دهند. این فضا را با $M_{2}(N)$ نمایش می دهیم. مجموعه فرمهای بازگشتی از وزن ۲ و سطح N را با $S_{2}(N)$ نمایش می دهیم که تشکیل یک فضای برداری در $M_{2}(N)$ (برای محاسبه بعد این فضاها که به N وابسته است به [۱۴] مراجعه کنید) می دهد.

برای اینکه بتوانیم ارتباط بین فرمهای بازگشتی و خمهای بیضوی را بیان کنیم به معرفی چند مفهوم و نماد نیاز داریم که بتوان از آنها نوعی خاص از فرمهای بازگشتی بنام فرم تازه را تعریف کنیم.

تعریف ۸.۱ یک فرم بازگشتی از وزن ۲ و سطح N را یک فرم کهنه نامیم هرگاه عضوی از $S_{2}(N')$ باشد که درآن $N\neq N'$ و $N'\mid N$ است. زیر فضای تولید شده توسط فرمهای کهنه در $S_{2}(N)$ را با $S_{2}^{old}(N)$ نمایش می دهیم.

فضای $S_2(N)$ مجهز به یک ضرب داخلی است، که ضرب داخلی پترسون[۴] نامیده و به صورت زیر تعریف می شود. برای هر $f, g \in S_2(N)$،

$$< f, g >= \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}^*} f(z)\overline{g(z)}dxdy.$$

تعریف ۹.۱ فضای متمم متعامد وابسته به زیر فضای $S_2^{old}(N)$ در $S_2(N)$ نسبت به ضرب پترسون، را فضای تازه در $S_2(N)$ نامیم و آنرا با $S_2^{new}(N)$ نمایش می دهیم. به عبارت دیگر

$$S_2^{new}(N) = (S_2^{old}(N))^{\perp}.$$

روی فضای $S_2(N)$ عملگرهای خطی $T_p : S_2(N) \to S_2(N)$ که در آن p عددی اول است و به صورت زیر تعریف می شوند را عملگرهای هکه[۵] نامیم

$$T_p(f)(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} f(\frac{\tau+j}{p}) + pf(p\tau) & \text{اگر} \quad p \nmid N, \\ \\ \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} f(\frac{\tau+j}{p}) & \text{اگر} \quad p \mid N. \end{cases}$$

برای توسیع عملگرهای هکه به T_n که در آن n یک عدد صحیح و مثبت است کافیست که ضریب n^{-s} در سری دیرکله[۶] صوری زیر را محاسبه کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n n^{-s} := \prod_{p\mid N}(1 - T_p p^{-s})^{-1} \prod_{p\nmid N}(1 - T_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1}.$$

---

[4] Petersson

[5] Hecke

[6] Dirichlet

قضیه ۱۰.۱ عملگرهای هکه روی فضای $S_۲(N)$ در موارد زیر صدق می کنند.

۱. برای هر $r \geq ۱$ و هر عدد اول p که $p \nmid N$،

$$T_{p^{r+۱}} = T_{p^r}T_p - p^{r-۱}T_{p^{r-۱}}.$$

۲. برای هر $r \geq ۱$ و هر عدد اول p که $p \mid N$، $T_{p^r} = (T_p)^r$.

۳. اگر $gcd(m,n) = ۱$ آنگاه $T_mT_n = T_{mn}$.

تعریف ۱۱.۱ فرم مدولار $f \in S_۲(N)$ را یک فرم ویژه هکه نامیم هرگاه یک بردار ویژه برای هر عملگر هکه T_n ($n \in \mathbb{Z}^+$) باشد. و فرم ویژه هکه $f(\tau)$ با $q-$بسط (بسط فوریه) $\sum_{n=۱}^{\infty} a_nq^n$ که در آن $q = e^{۲\pi i\tau}$ است، را نرمال شده گوئیم هرگاه $a_۱ = ۱$. یک فرم ویژه هکه نرمال شده در $S_۲^{new}(N)$، فرم تازه نامیده می شود.

۴-۱ پارامتری سازی مدولار

در این بخش ارتباط بین فرمهای مدولار تازه و خمهای بیضوی تعریف شده روی $\mathbb{Q}$ را مورد بررسی قرار می دهیم.

بنا به نتیجه ۲.۵ مرجع [۱۲] می توان پایه ای متعامد برای $S_{۲}^{new}(N)$ شامل فرمهای تازه با ضرایب فوریه صحیح انتخاب کرد. فرض کنیم $f(\tau) = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n q^n$ که در آن $q = e^{۲\pi i\tau}$، یک چنین فرم تازه ای باشد. L–تابع

$$L(f, s) := \sum_{n=۱}^{\infty} a_n n^{-s}$$

را L–تابع وابسته به f می نامیم.

قضیه زیر ارتباطی بین L–توابع وابسته به فرمهای تازه و L–توابع وابسته به خمهای بیضوی برقرار می کند.

قضیه ۱۲.۱ (ایچلر–شیمیورا[۷]) فرض کنیم f یک فرم تازه در $S_{۲}^{new}(N)$ با ضرایب فوریه صحیح باشد. در این صورت خم بیضوی E_f تعریف شده روی $\mathbb{Q}$، موجود است بطوریکه

$$L(E_f/\mathbb{Q}, s) = L(f, s).$$

اثبات. به قضیه ۲.۱۲ [۱۲] مراجعه کنید. □

یک گام اساسی در کار ایچلر و شیمیورا بدست آوردن نگاشت جبری

$$\Phi_N : X_{\circ}(N) \to E_f$$

[7] Eichler-Shimura

تعریف شده روی $\mathbb{Q}$ می باشد بطوریکه $\Phi_N^*(\omega) = c.2\pi i f(\tau) d\tau$. که در آن Φ_N^* نگاشت پسکشی Φ_N و ω فرم دیفرانسیل نرون وابسته به E_f است و ثابت c، ثابت منین [8] وابسته به f نامیده می شود. نگاشت $\Phi_N : X_0(N) \to E_f$ در تعریف مفهوم نقاط هیگنر روی یک خم بیضوی، نقش اساسی دارد و می توان آنرا بطور صریح مشخص کرد که چون در محاسبه‌ی نقاط هیگنر روی یک خم بیضوی مورد نیاز است در اینجا ضابطه آنرا مشخص می کنیم.

قضیه ۱۳.۱ فرض کنیم Λ_{E_f} لاتیس نرون E_f و c ثابت منین وابسته به $f(\tau)$ با $q-$بسط $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ که در آن $q = e^{2\pi i \tau}$ است، باشد. در این صورت برای $\tau \in \mathcal{H}^*$،

$$\Phi_N(\tau) = \Phi_\omega(z_\tau)$$

که در آن $\Phi_\omega : \mathbb{C}/\Lambda_{E_f} \to E_f(\mathbb{C})$ نگاشت یکسان سازی وایرشتراس است و

$$z_\tau = c \int_{i\infty}^{\tau} 2\pi i f(z) dz = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} q^n.$$

اثبات. به گزاره ۲.۱۱ [۱۲] مراجعه کنید. □

نگاشت یکسان سازی وایراشتراس $\Phi_\omega : \mathbb{C}/\Lambda_{E_f} \to E_f(\mathbb{C})$ در ضابطه‌ی Φ_N، به شکل زیر تعریف می شود.

$$\begin{aligned} \Phi_\omega : \mathbb{C}/\Lambda &\longrightarrow E(\mathbb{C}) : y^2 = 4x^3 - g_2(\Lambda)x - g_3(\Lambda) \\ z &\mapsto (\wp_\Lambda(z), \wp'_\Lambda(z)) \\ 0 &\mapsto O_E \end{aligned}$$

[8] Manin