بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

ماتریسهای بازه ای

استاد راهنما :

دکترعظیم ریواز

استاد مشاور :

دکتر محمود محسنی مقدم

مؤلف :

علی سعید

بهمن ماه ۱۳۸۹

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود

دانشجو : علی سعید

استاد راهنما : دکتر عظیم ریواز

استاد مشاور : دکتر محمود محسنی مقدم

داور ۱ : دکتر محمد علی ولی

داور۲ : دکتر آزیتا تاج الدینی

معاونت پژوهشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده :

با یاد شادروان مهندس علیرضا افضلی پور

و

زنده یاد دکتر فرزاد نعمت

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

که راستی قامتم در خمیدگی قامتشان تجلی یافت.

آنان که در کوره دوران سوختند تا پختگی ام را به نظاره بنشینند.

و آنان که در لحظه لحظه زندگیم مرا هادی، یار و تکیه گاه بوده اند.

تشکر و قدردانی

خدایا به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ بر بی ثمری لحظه ای که برای زیستن گذشته است حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگیش سوگوار نباشم. بگذار تا آن را ، من خود انتخاب کنم اما آنچنان که تو دوست می داری .خدایا چگونه زیستن را تو به من بیاموز چگونه مردن را خود خواهم دانست. *(قسمتی از نیایش دکتر علی شریعتی)*

ستایش می کنم آن سرچشمه علم و فضیلت را که اینگونه الطاف بیکرانش را در راه کسب حکمت و دانش بر من ارزانی نمود، وظیفه خود می دانم از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر ریواز که افتخار شاگردی ایشان را داشته و طی سالیان اخیر از رهنمودهایشان بهره مند و در محضرشان کسب اخلاق و دانش نموده ام صمیمانه تشکر کنم. انجام این پایان نامه بدون راهنمایی های ایشان میسر نبود. همچنین از استاد فرزانه جناب آقای دکتر محسنی مقدم که زحمت مشاوره و اساتید بزرگوارجناب آقای دکتر ولی و سرکار خانم دکترتاج الدینی که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفته اند تشکر وقدردانی کنم.

در پایان از قطب جبرخطی دانشگاه شهید باهنر کرمان که این پایان نامه را مورد حمایت مالی خود قرار داده است تشکر می نمایم.

چکیده

در این پایان نامه ماتریسهای بازه ای، مقادیر ویژه وبردارهای ویژه آنها را مطالعه خواهیم کرد و اشاره ای به برخی از خواص و کاربرد هایشان خواهیم داشت. به ویژه کرانها ی مقادیر ویژه ماتریسهای بازه ای را بررسی خواهیم نمود. این کرانها در بسیاری از شاخه های علوم به ویژه علم رباتیک اهمیت دارند. همچنین دقیقا به معرفی خواصی از ماتریسهای بازه ای، بردارهای پرون یک ماتریس بازه ای نامنفی تحویل ناپذیر و خواصی از کرانهای مقادیر ویژه برای کلاسی از ماتریسهای بازه ای سه قطری متقارن خواهیم پرداخت.

مقدمه

به خوبی مشخص می باشد که امروزه ماتریسها نقش اساسی در علوم مختلف از جمله ریاضیات ،آمار، فیزیک و علوم مهندسی دارند. خصوصا شاخه ای از ریاضیات تحت عنوان "آنالیز ماتریسی" یک عرصه ی تحقیقاتی با کاربردهای فراوانی در زمینه هایی چون نظریه ی کنترل ،ریاضی فیزیک ، علوم مهندسی وغیره می باشد.

همانطور که می دانیم بسیاری از مسایل روزمره و اکثر مسایل علوم مهندسی پس از مدل بندی ریاضی به صورت دستگاه معادلات خطی ویا دستگاه معادلات دیفرانسیل در می آیند وجوابهای این دستگاهها ارتباط تنگاتنگی با ماتریسهای ضرایب ، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مربوطه دارند. از آنجا که در زندگی روزمره اکثرمسایل دارای متغیرهای نامشخص ولی کراندار وهمچنین اندازه گیریهایمان نادقیق می باشد لذا داده های ورودی این گونه مسایل کمیت های واقعی نمی باشند. برای رفع این نقص می توان بازه های شامل آن مقادیر را در نظر گرفت ولذا ماتریسهای حاصل از مدل بندی اینگونه مسایل دارای درایه های بازه ای می باشند.اینگونه ماتریسها را تحت عنوان "ماتریسهای بازه ای[۱]" یاد می کنیم.Hansen و Smith از جمله اولین کسانی بودند که کار روی ماتریسهای بازه ای را آغاز نمودند و موجب شدند تا افراد دیگری به تحقیق و مطالعه در این خصوص بپردازند که از آن جمله می توان به اساتیدی چون Alefeld، Herzberger، Jaulin، Neumaier، Rohn و.... اشاره کرد. آقای دکتر Rohn در سالیان اخیر بیشترین دستاورد را در این زمینه داشته است و در این متن اکثرا مقالات وی مورد بررسی قرار گرفته است.

پایان نامه را در سه فصل آماده کرده ایم و برای اختصار و جلوگیری ازآوردن مطالب مقدماتی جبر خطی، فرض کرده ایم که خواننده محترم با مفاهیم اولیه جبر خطی و ماتریسها آشنایی دارد.(در صورت نیاز می توانید به مرجع [۱] مراجعه نمایید.)

در فصل اول به بیان تعاریف و مقدماتی پیرامون بازه ها، بردارهای بازه ای و ماتریسهای بازه ای می پردازیم.

[۱] Interval matrices

در فصل دوم به بررسی کلاس خاصی از ماتریسهای بازه ای تحت عنوان "ماتریسهای بازه ای نامنفی تحویل ناپذیر[۲] " می پردازیم چرا که نامنفی بودن جزء خصوصیات ذاتی بسیاری از کمیتهای اندازه گیری و فیزیکی می باشد و ماتریسهای نامنفی در مدل بندی بسیاری از مسایل شاخه های علوم ومهندسی یافت می شود. (که ازآن جمله می توان به موارد زیر اشاره کرد:

تئـــوری احتمـــال زنجیرهـــای مـــارکوف، تئـــوری جمعیـــت، روشـــهای تکـــراری درآنالیزعـــددی، اقتصـــاد (مـــدلهای ورودی وخروجـــی)، آنالیزحساســـیت وپایـــداری، علم اپیدمیولوژی ومسایل فیزیکی.)

لـذا در فصـل دوم ابتـدا در مـورد ماتریسـهای نـامنفی وتحویـل ناپـذیر و سـپس در مـورد ماتریسـهای بـازه ای نـا منفـی تحویـل ناپـذیر بحـث مـی کنـیم و بـه بررسـی خصوصـیت جالـب این دسته از ماتریسـها کـه مربـوط بـه مقـدار ویـژه ماکزیمـال و بـردار ویـژه متنـاظرش مـی باشـد، مـی پـردازیم ونهایتـا در فصـل سـوم کـه مهمتـرین فصـل ایـن پایـان نامـه مـی باشـد بـه بحـث و بررسـی پیرامـون کرانهـای مقـادیر ویـژه ماتریسـهای بـازه ای مـی پـردازیم کـه اخیـرا مـورد توجـه فـراوان قرارگرفتـه چـرا کـه کـاربرد ایـن موضـوع در علـم رباتیـک اجتنـاب ناپـذیر است.

[۲] Irreducible nonnegative interval matrices

فهرست مطالب

فصل سوم : کرانهای مقادیر ویژه ماتریسهای بازه ای

فصل اول :

بازه هاوماتریسهای بازه ای

۱.۱- مقدمه

این فصل را با بازه ها، تعاریف و مفاهیم اولیه آغاز می کنیم. درسرتاسر متن منظورمان از یک بازه یک بازه حقیقی بسته وکراندار می باشد مگر اینکه خلاف آن آورده شده باشد. در ادامه اعمال حسابی روی بازه ها را به دو صورت معمولی و اصلاح شده بیان می کنیم و برخی از معایب و مزیت های هرکدام از اعمال حسابی را در قالب مثالهایی شرح می دهیم. سپس به تعریف بردارهای بازه ای و ماتریسهای بازه ای می پردازیم. اعمال حسابی روی اینگونه ماتریسها را بیان می کنیم و با مفاهیمی چون دترمینان و معکوس ماتریسهای بازه ای آشنا می شویم. در پایان هم اشاره ای به روش کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی بازه ای می نماییم.

۱.۲- بازه ها

تعریف ۱.۱ . (الف). یک بازه حقیقی بسته و کراندار مانند $[a,b]$ برابر است با:

$$[a,b]=\{x\in R\ :\ a\le x\le b\}$$

معمولابازه ها را با حروف بزرگ لاتین نمایش می دهند و نقاط چپ وراست یک بازه چون X را با $\underline{X}$ و $\overline{X}$ نشان داده و داریم: $X=[\underline{X},\overline{X}]$

(ب). دو بازه X و Y را مساوی گوییم اگر نقاط انتهایی چپ و راست آنها با هم برابر باشند یعنی $\overline{X}=\overline{Y}$ و $\underline{X}=\underline{Y}$ می باشد.

(پ). بازه X را تباهیده گوییم اگر $\underline{X}=\overline{X}$ باشد. چنین بازه ای شامل یک عدد حقیقی منفرد x است. معمولا بازه های تباهیده را با $[x,x]$ نشان میدهند.

(ت). بازه X را متقارن گوییم اگر $\underline{X}=-\overline{X}$ باشد.

(ث). اگر $\overline{X}<\underline{Y}$ آنگاه گوییم $X<Y$ می باشد.

(ج). بازه X را مثبت گوییم هرگاه به ازای هر $x\in X$ داشته باشیم $x>0$ وبا نماد $X>0$ نشان میدهیم.

(چ). مجموعه تمام اعداد حقیقی را با R و مجموعه تمام بازه های حقیقی را با IR نمایش می دهیم.

عرض ،مقدار مطلق ونقطه میانی یک بازه

تعریف۱.۲. (الف). عرض یک بازه چون X که با $\bar{W}(X)$ نشان داده میشود برابر است با:

$$\bar{W}(X)=\overline{X}-\underline{X}$$

(ب). مقدار مطلق بازه X که با نماد $|X|$ نشان داد ه می شود ماکزیمم قدرمطلق عناصرانتهایی چپ و راست بازه میباشد:

$$|X|=\max\left\{|\overline{X}|,|\underline{X}|\right\}$$

از تعریف واضح است که: $|x|\le|X| \quad \forall\ x\in X$

(پ). نقطه میانی بازه X عبارت است از:

$$M(X)=\frac{1}{2}\left(\underline{X}+\overline{X}\right)$$

مثال۱.۱. اگر $Y=[-1,1]$ و $X=[0,2]$ باشدآنگاه داریم:

$$\bar{W}(X)=\bar{W}(Y)=2$$

$$M(X)=1 \quad و \quad M(Y)=0$$

گزاره۱.۱. هر بازه متقارن دارای نقطه میانی صفر است وهمچنین داریم:

$$X=|X|[-1,1] \quad و \quad |X|=\frac{1}{2}\bar{W}(X)$$

۱.۳- اعمال حسابی معمولی روی بازه ها $(-,+,\times,/)$

اگر X و Y دو بازه دلخواه باشند آنگاه داریم:

$$X*Y=\left\{x*y \ \middle|\ x\in X, y\in Y\right\}$$

که * هر یک از چهار عمل اصلی است.

لذا خواهیم داشت:

$$X+Y=\left[\underline{X}+\underline{Y},\ \overline{X}+\overline{Y}\right]$$
$$X-Y=X+\left(-Y\right)=\left[\underline{X}-\overline{Y},\ \overline{X}-\underline{Y}\right]$$
$$Y=\left[\underline{Y},\overline{Y}\right]\Rightarrow -Y=\left[-\overline{Y},-\underline{Y}\right]=\left\{-y:y\in Y\right\}$$
$$X.Y=\left[\min S,\max S\right]\ \ ,\ \ S=\left\{\underline{X}\underline{Y},\underline{X}\overline{Y},\overline{X}\underline{Y},\overline{X}\overline{Y}\right\}$$
$$\frac{X}{Y}=X.\frac{1}{Y}$$
$$\frac{1}{Y}=\left\{\frac{1}{y}:y\in Y\right\}=\left[\frac{1}{\overline{Y}},\frac{1}{\underline{Y}}\right]\quad \left(0\notin Y\right)$$

مثال۱.۲ . برای بازه های $X=\left[-1,0\right]$ و $Y=\left[1,2\right]$ داریم:

$$X+Y=\left[0,2\right]$$
$$X-Y=\left[-3,-1\right]$$
$$2.Y=\left[2,2\right].\left[1,2\right]=\left[2,4\right]$$
$$X.Y=\left[\min S,\max S\right]=\left[-2,0\right]\qquad S=\left\{-1.1,-1.2,0.1,0.2\right\}=\left\{-1,-2,0\right\}$$

با اعمال حسابی فوق روابطی در بین بازه های حقیقی برقرار می باشد که مهمترین آنها در گزاره ۱.۲آمده است.

گزاره۱.۲. برای بازه های دلخواه X،Y و Z داریم:

1) $X+Y=Y+X$
2) $X.Y=Y.X$
3) $0+X=X+0=X$
4) $0.X=X.0=0$
5) $1.X=X.1=X$
6) $X+\left(Y+Z\right)=\left(X+Y\right)+Z$

اگر چه روابط فوق برقرارند ولی اعمال حسابی معمولی دارای نقص هایی نیز می باشد از جمله الزاما رابطه $X.(Y+Z)=X.Y+X.Z$ برقرار نمی باشد بلکه در حالت کلی داریم: $X.(Y+Z)\subseteq X.Y+X.Z$ بایک مثال نشان می دهیم که رابطه فوق الزاما برقرار نیست.

مثال۱.۳. اگر $X=[1,2]$ و $Y=[1,1]$ و $Z=[-1,-1]$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$X.(Y+Z)=[0,0]=0$$

$$X.Y+X.Z=[-1,1]\neq 0$$

(در ادامه خواهیم دید که کار کردن با اعمال حسابی معمولی موجب می شود که روابط شرکتپذیری و پخشپذیری و تعویض با اسکالر در ماتریسهای بازه ای برقرار نباشد.)

۱.٤- بردارهای بازه ای

تعریف ۱.۳. بردار $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ را بردار بازه ای گوییم اگر X_i برای $1\le i\le n$ بازه باشند.

تعریف۱.٤. عرض یک بردار بازه ای $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ عبارت است از:

$$\overline{W}(X)=\max\overline{W}(X_i)\quad (1\le i\le n)$$

تعریف۱.۵. نقطه میانی یک بردار بازه ای $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ عبارت است از:

$$M(X)=(M(X_1),M(X_2),...,M(X_n))$$

۱.۵- ماتریسهای بازه ای

تعریف۱.٦. یک ماتریس بازه ای، ماتریسی است که درایه هایش بازه ها می باشند و به صورت $A^I=(a_{ij})_{(m\times n)}$ نمایش می دهیم که $a_{ij}=[\underline{a_{ij}},\overline{a_{ij}}]$ بازه ها می باشند.

تعریف فوق از ماتریسهای بازه ای تعریفی متداول است. معمولا در مقالات با تعاریفی دیگر(که همگی معادل یکدیگر می باشند) مواجه می شویم. در اینجا به دو تعریف معادل اشاره می کنیم.

تعریف۱.۷. گیریم $\underline{A}$و $\overline{A}$دو ماتریس حقیقی $n\times n$ دلخواه با شرط $\underline{A}\le\overline{A}$ باشند.(منظور از نامساوی $\le$ به صورت مولفه ای است.) آنگاه مجموعه $A^I=\left[\underline{A},\overline{A}\right]=\left\{A\ :\ \underline{A}\le A\le\overline{A}\ \right\}$ را یک ماتریس بازه ای با کرانهای $\underline{A}$و $\overline{A}$ می گوییم.

تعریف۱.۸. فرض کنیم ماتریسهای حقیقی $A_c,\Delta\in R^{n\times n}$ و $\Delta\ge 0$ (بدین معنا که تمامی درایه های ماتریس Δ نامنفی است.) داده شده اند. مجموعه زیر را ماتریس بازه ای A^I در نظر می گیریم.

$$A^I=\left[A_c-\Delta,A_c+\Delta\right]=\left\{A:\ A_c-\Delta\le A\le A_c+\Delta\right\}$$

برای اینکه معادل بودن تعاریف ۱.۷ و ۱.۸ را مشاهده کنیم کافی است $A_c-\Delta=\underline{A}$ و $A_c+\Delta=\overline{A}$ در نظر بگیریم لذا از آنجا که $\Delta\ge 0$ می باشد داریم $\underline{A}\le\overline{A}$.

به عکس هرگاه $\underline{A}\le\overline{A}$ کافی در نظر بگیریم: $\Delta=\frac{1}{2}\left(\overline{A}-\underline{A}\right)$ و $A_c=\frac{1}{2}\left(\underline{A}+\overline{A}\right)$ که به وضوح $\Delta\ge 0$ می باشد.

تعریف۱.۹. اگر $A^I=\left[\underline{A},\overline{A}\right]$ یک ماتریس بازه ای باشد آنگاه ماتریسهای $A_c=\frac{1}{2}\left(\underline{A}+\overline{A}\right)$ و $\Delta=\frac{1}{2}\left(\overline{A}-\underline{A}\right)$ را به ترتیب ماتریسهای مرکزی وشعاعی ماتریس بازه ای A^I می نامیم.

تعریف ۱.۱۰. اگر A^I یک ماتریس بازه ای با درایه های بازه ای a_{ij} وB یک ماتریس با درایه های حقیقی b_{ij} باشند آنگاه گوییم $B\in A^I$ است هرگاه $b_{ij}\in a_{ij}$(برای همه iو j ها) باشد.

نرم ،عرض و نقطه میانی ماتریسهای بازه ای

تعریف ۱.۱۱. نرم یک ماتریس بازه ای A^I را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\left\|A^I\right\|=\max\sum_j\left|a_{ij}\right|\qquad(\ i=1,2,....)$$

(این یک تعمیم از نرم ماکزیمم برای ماتریسهای حقیقی است.)

نشان می دهیم که نرم قبل در خواص نرم ماتریسی صدق می کند. لذا سه خاصیت زیر را بررسی می کنیم:

$$1)\ \left\|A^I\right\| \geq 0 \quad , \quad \left\|A^I\right\| = 0 \Leftrightarrow A^I = 0^I$$

$$2)\ \left\|\alpha A^I\right\| = |\alpha|\left\|A^I\right\|$$ برای هر اسکالر دلخواه α

$$3)\ \left\|A^I + B^I\right\| \leq \left\|A^I\right\| + \left\|B^I\right\|$$

لذا برای ماتریسهای بازه ای دلخواه A^I و B^I و برای هر i و j و هر اسکالر دلخواه α داریم:

$$\left|a_{ij}\right| \geq 0 \Rightarrow \sum_j \left|a_{ij}\right| \geq 0 \Rightarrow \max \sum_j \left|a_{ij}\right| \geq 0 \Rightarrow \left\|A^I\right\| \geq 0$$

$$\left\|A^I\right\| = 0 \Leftrightarrow \max \sum_j \left|a_{ij}\right| = 0 \Leftrightarrow \sum_j \left|a_{ij}\right| = 0 \Leftrightarrow \left|a_{ij}\right| = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \Leftrightarrow A^I = 0^I$$

$$\left\|\alpha A^I\right\| = \max \sum_j \left|\alpha a_{ij}\right| = \max \sum_j |\alpha|\left|a_{ij}\right| = |\alpha| \max \sum_j \left|a_{ij}\right| = |\alpha|\left\|A^I\right\|$$

$$\left\|A^I + B^I\right\| = \max \sum_j \left|a_{ij} + b_{ij}\right| \leq \max \sum_j \left(\left|a_{ij}\right| + \left|b_{ij}\right|\right) = \max \sum_j \left|a_{ij}\right| + \max \sum_j \left|b_{ij}\right| = \left\|A^I\right\| + \left\|B^I\right\|$$

قابل ذکر است که اگر B یک ماتریس حقیقی دلخواه درماتریس بازه ای A^I باشد، آنگاه $\|B\| \leq \left\|A^I\right\|$ می باشد.

تعریف۱.۱۲. عرض یک ماتریس بازه ای A^I به صورت زیر تعریف میگردد:

$$\bar{W}\left(A^I\right) = \max \bar{W}\left(a_{ij}\right) \qquad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

تعریف۱.۱۳. ماتریس نقطه میانی یک ماتریس بازه ای به صورت زیر تعریف میگردد:

$$M\left(A^I\right) = \begin{pmatrix} M\left(a_{11}\right) & . & . & . & M\left(a_{1n}\right) \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ M\left(a_{m1}\right) & . & . & . & M\left(a_{mn}\right) \end{pmatrix}$$

از تعریف فوق واضح است که : $M\left(A^I\right) \in A^I$.

مثال۱.٤. برای ماتریس بازه ای $A^I = \begin{pmatrix} [1,2] & [-1,1] \\ [0,4] & [6,8] \end{pmatrix}$ داریم:

$$\|A^I\| = \max\{\|[1,2]\| + \|[-1,1]\|, \|[0,4]\| + \|[6,8]\|\} = \max\{2+1, 4+8\} = 12$$

$$\bar{W}(A^I) = \max\{\bar{W}([1,2]), \bar{W}([-1,1]), \bar{W}([0,4]), \bar{W}([6,8])\} = \max\{1,2,4\} = 4$$

$$M(A^I) = \begin{pmatrix} M([1,2]) & M([-1,1]) \\ \\ M([0,4]) & M([6,8]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

اعمال حسابی روی ماتریسهای بازه ای

اگر $A^I = (a_{ij})$ و $B^I = (b_{ij})$ دو ماتریس بازه ای $m \times n$ دلخواه و c اسکالری دلخواه باشد آنگاه داریم : $cA^I = (ca_{ij})$, $A^I \pm B^I = a_{ij} \pm b_{ij}$

همچنین اگر $A^I{}_{m\times p}$ و $B^I{}_{p\times n}$ ماتریسهای بازه ای دلخواهی باشند، آنگاه ماتریس $C^I = A^I B^I = (C_{ij})_{m\times n}$ نیز یک ماتریس بازه ای است که برای هر $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$ به گونه ای که $C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} P_{ik} Q_{kj}$ و $P_{ik} \in A_{ik}$ و $Q_{kj} \in B_{kj}$ می باشد.

مثال۱.۵. اگر A و B ماتریسهای زیر باشند داریم:

$$A = ([1,2],[3,4]) \quad و \quad B = \begin{pmatrix} [5,6] & [7,8] \\ [9,10] & [11,12] \end{pmatrix}$$

$$C = AB = ([1,2].[5,6] + [3,4].[9,10], [1,2].[7,8] + [3,4].[11,12])$$

$$= ([5,12] + [27,40], [7,16] + [33,48]) = ([32,52],[40,64])$$

تعریف۱.۱٤. اگر $X=\left[\underline{X},\overline{X}\right]\in IR$ یک بازه حقیقی دلخواه باشد آنگاه عرض جدید(نیمه عرض) را به صورت زیر در نظر می گیریم واز این به بعد با نیمه عرض سر و کار داریم مگرآنکه خلاف آن را آورده باشیم.

$$W(X)=\frac{1}{2}\left(\overline{X}-\underline{X}\right)$$

مقایسه بازه های حقیقی

تعریف ۱.۱۵. گیریم $X=\left[\underline{X},\overline{X}\right]$ و $Y=\left[\underline{Y},\overline{Y}\right]$ دو بازه حقیقی دلخواه باشند.

(الف).گوییم $X\prec Y$ است هر گاه $M(X)<M(Y)$ باشد.

(ب). تابع تعریف شده زیر را تابع انعطاف (قابلیت)[۱] می گوییم:

$$F_{\prec}:IR\times IR\rightarrow[0,\infty)$$

$$F_{\prec}(X,Y)=F(X\prec Y)=\frac{M(Y)-M(X)}{W(Y)+W(X)}$$

و بایستی $W(Y)+W(X)\neq 0$ باشد که بدان معنی است که بازه های X و Y همزمان نمی توانند بازه هایی تباهیده باشند.

تابع انعطاف $F_{\prec}$ دارای خواص زیر می باشد: (در واقع $F_{\prec}$ یک رابطه ترتیبی جزئی روی مجموعه IR مشخص می نماید.)

۱) برای هردو بازه دلخواه $X,Y\in IR$ داریم: $F(X\prec Y)>0$ یا $F(Y\prec X)>0$ یا $F(X\prec Y)=F(Y\prec X)=0$ که معادل $F(X\prec Y)+F(Y\prec X)=0$ می باشد.

۲) برای هر سه بازه دلخواه $X,Y,Z\in IR$ اگر $F(X\prec Y)\geq 0$ و $F(Y\prec Z)\geq 0$ را داشته باشیم آنگاه $F(X\prec Z)\geq 0$ می با شد، یعنی رابطه متعدی است.

تعریف۱.۱٦. (الف).گوییم بازه X و بازه Y هم ارزند و با نماد $X\approx Y$ نمایش می دهیم هرگاه $F(X\prec Y)=0$ باشد و لذا $M(X)=M(Y)$ می باشد.

به ویژه هر گاه $F(X\prec Y)=0$ و $W(X)=W(Y)$ آنگاه $X=Y$ می باشد.

[۱] The Acceptability Function