دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان

تقریبی از نقاط ثابت برای نیم گروه های میانگین پذیر از نگاشت های غیرانبساطی در فضاهای باناخ

استاد راهنما:

دکتر محمد موسایی

استاد مشاور:

دکتر حجت اله سامع

پژوهشگر:

عادل احمدی

۲۹ شهریورماه ۱۳۹۰

دانشگاه بوعلی سینا
مدیریت تحصیلات تکمیلی

کد رهگیری: ۲۰٤۷۲۳۷

فرم مشخصات پایان‌نامه

عنوان: تقریبی از نقاط ثابت برای نیم گروه های میانگین پذیر از نگاشت های غیر انبساطی در فضاهای باناخ

نام نویسنده: عادل احمدی

نام استاد راهنما: دکتر محمد موسایی

نام استاد مشاور: دکتر حجت اله سامع

دانشکده : علوم پایه

گروه آموزشی: ریاضی

رشته تحصیلی: ریاضی محض

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

تاریخ تصویب:۲۵/ ۶ / ۱۳۸۹

تاریخ دفاع: ۲۹/ ۶ / ۱۳۹۰

تعداد صفحات: ۹۳

واژه‌های کلیدی: نقطه ثابت، نگاشت های غیر انبساطی، نیم گروه برگشت پذیر چپ، میانگین چپ پایا، نیم گروه های میانگین پذیر،فضایای همگرایی قوی .

Thesis Information

Title: Approximation of fixed points for amenable semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces.

Author: Adel Ahmadi

Supervisor: Dr. Mohammad Moosaei

Advisor: Dr. Hojatollah Samea

Faculty: Science

Department: Mathematics

Subject: Mathematics

Field: Analysis

Degree: Master of Science

Approval Date: 2010/ 9/ 16

Defence Date: 2011/ 9/ 20

Number of Pages: 93

Key Words: Fixed point, Nonexpansive mappings, Left reversible semigroup, Left invariant mean, amenable semigroups, Strong convergence theorems.

قدردانی

و من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

بی‌کران سپاسمان به درگاه حق او که قطره‌ای از اقیانوس بی‌انتهای علم خود را بر ما عنایت فرمود تا پیوسته مشتاق بهره‌گیری از قطره‌ای دیگر باشیم.

تقدیر فراوان از زحمات بی‌دریغ و راهنمایی‌های ارزنده معلم فاضل و استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر محمد موسایی که در تمام مراحل تحصیل از هر جهت راهنمای این جانب بوده، اشتیاق مطالعه را در من برانگیختند و در تهیه و تدوین این پایان‌نامه مرا یاری نموده‌اند.

سپاس فراوان از استاد مشاور گران‌قدر و دلسوزم جناب آقای دکتر حجت‌اله سامع که در طی انجام این پایان‌نامه از راهنمایی‌های ایشان بسیار بهره جستم و همچنین تقدیر و تشکر از جناب آقای دکتر عزیزاله عزیزی و جناب آقای دکتر قربان خلیل زاده رنجبر که زحمت داوری این پایان‌نامه را برعهده داشته‌اند.

بی‌نهایت احساس قدردانی و سپاس را تقدیم می‌دارم به خانواده بی‌همتایم، پدرم، تکیه‌گاه زندگیم، مادرم، اسطوره‌ی عشق و ایثار، مهربان خواهران و برادرانم.

و در آخر تقدیر و تشکر از همه کسانی که مرا در تهیه این پایان‌نامه یاری نموده‌اند به‌ویژه آقای ابراهیم فصاحت، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد گرایش آنالیز، که در طول دوران تحصیل همواره راه‌گشا و راهنمای بنده بوده‌اند.

دانشگاه بوعلی سینا

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی

عنوان: تقریبی از نقاط ثابت برای نیم گروه های میانگین پذیر از نگاشت های غیر انبساطی در فضاهای باناخ

نام نویسنده: عادل احمدی

نام استاد راهنما: دکتر محمد موسایی

نام استاد مشاور: دکتر حجت اله سامع

دانشکده : علوم پایه	**گروه آموزشی:** ریاضی	
رشته تحصیلی: ریاضی محض	**گرایش تحصیلی:** آنالیز	**مقطع تحصیلی:** کارشناسی ارشد
تاریخ تصویب: ۲۵/ ۶/ ۱۳۸۹	**تاریخ دفاع:** ۲۹/ ۶/ ۱۳۹۰	**تعداد صفحات:** ۹۳

چکیده:

فرض کنید S نیم گروه برگشت پذیر چپ و $\mathcal{S}=\{T(s) : s\in S\}$ نمایشی از S، به عنوان نگاشت های غیر انبساطی از C به C باشد، که در آن C زیر مجموعه ناتهی، محدب و فشرده از فضای باناخ هموار E می باشد و همچنین X، زیر فضای میانگین پذیر چپ و $\mathcal{S}$–پایا از $l^{\infty}(S)$ باشد و $\{\alpha_n\}$ دنباله ای در $[0, 1]$ باشد طوری که $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ و همچنین $x\in C$. دراین صورت گزاره های زیر برقرارند:

۱) اگر E به طور یکنواخت محدب و $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$ و $\{\mu_n\}$ دنباله به طور قوی منظم چپ از میانگین ها روی X باشد. قرار دهید $x_1=x\in C$ و $\{x_n\}$ دنباله ای به صورت زیر باشد؛

$$x_{n+1}=\alpha_n x+(1-\alpha_n)T(\mu_n)x_n \quad n=1,2,\ldots$$

در این صورت $\{x_n\}$ به طور قوی به Px همگراست، که P، نگاشت تو کشنده غیر انبساطی آفتابی از C به $F(S)$ می باشد.

۲) اگر $\{\alpha_n\}$ دنباله ای در $(0,1)$ و $\{\mu_n\}$ دنباله به طور مجانبی، پایای چپ از میانگین ها روی X باشد و $\{x_n\}$ دنباله به صورت زیر باشد؛

$$x_n=\alpha_n x+(1-\alpha_n)T(\mu_n)x_n \quad n=1,2,\ldots$$

در این صورت $\{x_n\}$ به طور قوی به Px همگراست، که P، نگاشت تو کشنده غیر انبساطی آفتابی از C به $F(S)$ می باشد.

واژه‌های کلیدی: نقطه ثابت، نگاشت های غیر انبساطی، نیم گروه برگشت پذیر چپ، میانگین چپ پایا، نیم گروه های میانگین پذیر،قضایای همگرایی قوی .

فهرست مندرجات

مقدمه ۴

۱ تعاریف اولیه ۸

۱.۱ دنباله و تور ۸

۲.۱ فضاهای خطی ۱۰

۳.۱ نیم‌گروه‌ها ۲۵

۴.۱ گروه موضعاً فشرده ۲۸

۵.۱ توابع به طور تقریبی متناوب ۲۸

۶.۱ فضای یکنواخت ۳۰

۲ میانگین‌پذیری و برخی از نگاشت‌های خاص ۳۳

۱.۲ میانگین‌پذیری نیم‌گروه‌ها ۳۳

۲.۲ میانگین‌پذیری گروه‌ها ۳۷

۳.۲ نگاشت‌های خاص ۳۹

۳ ارتباط بین میانگین‌پذیری نیم‌گروه S و $F(\mathcal{S})$ ۴۶

۴ قضایای همگرایی قوی و برخی از نتایج آن‌ها ٦٦

۱.۴ دنباله میانگین‌های به طور قوی منظم چپ و همگرایی قوی . . ٦٦

۲.۴ دنباله میانگین‌های به طور مجانبی چپ‌پایا و همگرایی قوی . . ۸۰

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۸۷

مقدمه

ریاضیات نه تنها ابزاری بی‌بدیل در شکل‌گیری دقت و استدلال است بلکه نیروی شهود، قدرت، تخیل و روحیه‌ی نقاد را پر و بال می‌دهد. ریاضیات همچنین زبانی مشترک بین ملت‌ها و عنصری پر قدرت در فرهنگ است. اما علاوه براین‌ها، به کمک رابطه‌ی دو جانبه کنش‌ها و واکنش‌ها با سایر علوم، ریاضیات در تکوین مفاهیم و بکارگیری موضوع‌های زندگی روزمره‌ی ما نقشی روز افزون ایفا می‌کند. در میان شاخه‌های مختلف ریاضیات، آنالیز یکی از کاربردی‌ترین مباحث است. امروزه آنالیز ریاضی در علوم مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی و $T : X \longrightarrow X$ یک نگاشت باشد. نقطه‌ی $x \in X$ را یک نقطه ثابت نگاشت T گویند اگر $T(x) = x$. وجود یا فقدان نقطه ثابت خاصیتی است که به نگاشت و دامنه‌ی آن بستگی دارد. مفهوم نقطه ثابت از حدود یکصد سال پیش یکی از ابزارهای مهم در مطالعه‌ی ساختارهای ریاضی می‌باشد که به طور مثال در وجود و منحصربه‌فردی جواب معادلات دیفرانسیل و در حالت کاربردی‌تر در مسائل و مفاهیم اقتصادی و رشته‌های مختلف مهندسی مورد استفاده قرار گرفته است. این مفهوم از وجود نقطه ثابت برای نگاشت‌های پیوسته بر مجموعه‌های فشرده

به‌دست آمده که در حال حاضر به یک موضوع جذاب و جالب در مطالعه خاصیت نقطه ثابت برای زیرمجموعه‌های ناتهی، کران‌دار، بسته و محدب از فضای باناخ است.
در سال‌های اخیر مطالعات قابل توجهی در بررسی ویژگی نقطه ثابت و قضیه‌های مربوط به آن در فضاهای باناخ انجام شده است.
اولین قضیه در رابطه با نقطه ثابت در سال ۱۹۱۲ توسط براور[۱] بیان شد که در آن نشان داد هر تابع پیوسته مانند $f : B \longrightarrow B$ که در آن B گوی واحد بسته در $\mathbb{R}^n$ است، دارای نقطه ثابت است.
در ادامه شودر[۲] در سال ۱۹۳۰ نشان داد که در فضای باناخ X هر نگاشت پیوسته مانند $f : K \longrightarrow K$ که در آن K زیر مجموعه‌ی محدب و فشرده از X است دارای نقطه ثابت می‌باشد و بعدها در حالت کلی‌تر نشان داد اگر K یک زیر مجموعه‌ی محدب، کران‌دار، بسته و ناتهی در فضای نرم‌دار X باشد و $f : K \longrightarrow K$ نگاشتی فشرده باشد، آن‌گاه f دارای نقطه ثابت است.
نگاشت‌های غیرانبساطی، دسته بزرگی از نگاشت‌های پیوسته را تشکیل می‌دهند. فرض کنید C زیر مجموعه‌ی محدب و بسته از فضای باناخ E باشد. براور در سال ۱۹۶۷ طرح تکراری زیر را برای پیدا کردن نقطه ثابت نگاشت غیرانبساطی T روی C معرفی کرد. اگر x نقطه دلخواه در C و $\{\alpha_n\}$ دنباله ای در $(۰, ۱)$ باشد برای هر $n \in \mathbb{N}$، نگاشت $T_n : C \longrightarrow C$ با ضابطه‌ی $T_n(z) = \alpha_n x + (۱ - \alpha_n)T(z)$ تعریف شد.
نگاشت T_n یک نگاشت انقباضی اکید روی C می‌باشد، پس طبق اصل انقباض باناخ، T_n دارای نقطه ثابت منحصر به فرد x_n به صورت

$$x_n = \alpha_n x + (۱ - \alpha_n)T(x_n) \quad n = ۱, ۲, .. \qquad (*)$$

در C می‌باشد. سپس او همگرایی قوی دنباله $\{x_n\}$ را برای پیدا کردن نقطه ثابت نگاشت T مورد مطالعه قرار داد.(رجوع شود به [۳])

---
[۱] Browder
[۲] Schauder

ریچ[۳] با قرار دادن $x = x_1 \in C$، دنباله تکراری

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n)T(x_n) \quad n = 1, 2, ... \qquad (**)$$

را برای نگاشت‌های غیرانبساطی مورد مطالعه قرار داد که در آن $\{\alpha_n\}$ دنباله ای در $[0, 1]$ می‌باشد. (رجوع شود به [۱۵])
همچنین ویسمن[۴] نشان داد که اگر $\lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = 0$، $\Sigma_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$ و $\Sigma_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$. در این صورت دنباله تولید شده$(**)$ در یک فضای هیلبرت به طور قوی به نقطه‌ای از $F(T)$(نقاط ثابت نگاشت T) همگراست که نزدیک‌ترین نقطه به x می‌باشد.(رجوع شود به [۲۲])
شیوجی[۵] و تاکاهاشی[۶] در مرجع [۱۹] این نتایج را برای فضاهای باناخ گسترش دادند. شیمیزو[۷] و تاکاهاشی در مراجع[۱۷] و [۱۸] اولین طرح های تکراری را برای پیدا کردن نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای از نگاشت های غیر انبساطی معرفی کردند و قضایای همگرایی را برای این خانواده فراهم کردند. همچنین شیوجی و تاکاهاشی در مرجع [۶] قضایای همگرایی قوی را برای دنباله‌های $(*)$ و $(**)$ در یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب ثابت کردند.
این پایان نامه در چهار فصل تنظیم و تدوین گردیده که به شرح زیر می‌باشد:
فصل اول شامل مفاهیم مقدماتی بوده که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد.
در فصل دوم میانگین‌پذیری نیم گروه‌ها و گروه‌ها و همچنین برخی از نگاشت‌های خاص مورد نیاز فصل‌های بعد معرفی می‌شود.
در فصل سوم قضایای مورد نیاز فصل ۴، بیان و اثبات می‌شود. در این فصل S به

---
[۳] Reich
[۴] Wittmann
[۵] Shioji
[۶] Takahashi
[۷] Shimizu

عنوان نیم‌گروه برگشت‌پذیر چپ و $\mathcal{S} = \{T(s) : s \in S\}$ نمایشی از S به عنوان نگاشت‌های غیر انبساطی از C به C می‌باشد که در آن C زیر مجموعه ناتهی، محدب و به طور ضعیف فشرده از فضای باناخ E می‌باشد. همچنین X به عنوان زیر فضای بسته از $l^{\infty}(S)$ در نظر گرفته می‌شود. در این فصل اگر μ میانگین چپ پایا روی X باشد، رابطه بین مجموعه $F(T(\mu))$(نقاط ثابت نگاشت $T(\mu)$) و $F(\mathcal{S})$(مجموعه نقاط ثابت مشترک $\{T(s) : s \in S\}$) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل چهار شامل دو بخش است، که در آن قضایای همگرایی قوی $F(\mathcal{S})$ و نتایج آن بیان می‌شود. در قضایای ۱.۱.۴ و ۱.۲.۴، دنباله $\{\alpha_n\}$ در $[۰,۱]$ و $x \in C$ می‌باشد. با استفاده از دنباله $\{\mu_n\}$، دنباله $\{x_n\}$ مشابه دنباله‌های $(*)$ و $(**)$ تعریف می‌شود، طوری که $\{x_n\}$ به طور قوی به Px همگرا می‌شود، که در آن P نگاشت توکشنده غیرانبساطی و آفتابی از C به $F(\mathcal{S})$ می‌باشد. در بخش اول این فصل، $\{\mu_n\}$ دنباله‌ای از میانگین‌های به طور قوی منظم چپ، از میانگین‌هاست و در بخش دوم $\{\mu_n\}$ دنباله‌ای از میانگین‌های به طور مجانبی چپ پایا، از میانگین‌هاست.

فصل ۱

تعاریف اولیه

از آن جایی که برخی مفاهیم این فصل از اساسی‌ترین ابزار لازم در بررسی و مطالعه‌ی قضایا و تعاریف فصل‌های دیگر است، بنابراین در این فصل به طور خلاصه به بیان مفاهیم و تعاریف مقدماتی می‌پردازیم. در سراسر این پایان‌نامه $\mathbb{N}$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی، $\mathbb{C}$ مجموعه‌ی اعداد مختلط، $\mathbb{Q}$ مجموعه‌ی اعداد گویا، $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی و $\mathbb{T}$ دایره واحد را نشان می‌دهد. اگر X, Y دو مجموعه باشند و نیز $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد، اگر $x \in X$، در برخی موارد به جای نماد $f(x)$ از نماد $\langle f, x\rangle$ یا $\langle x, f\rangle$ استفاده می‌شود.

۱.۱ دنباله و تور

تعریف ۱.۱.۱ دنباله: هر تابع از مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ به مجموعه‌ی دلخواه X، یک دنباله در X نامیده شده و با نماد $\{x_n\}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱ همگرایی دنباله : فرض کنید (X, d) یک فضای متریک[۱] و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در آن باشد. دنباله $\{x_n\}$ را همگرا به x گویند هرگاه:

$$\forall \ \ \varepsilon > 0 \ \ \exists \, N \in \mathbb{N} \ \ s.t \ \ \forall \ \ n \geq N \ \ d(x_n, x) < \varepsilon$$

تعریف ۳.۱.۱ مفهوم همگرایی دنباله توسط همسایگی‌های باز : دنباله $\{x_n\}$ را همگرا به x گویند هرگاه به ازای هر همسایگی باز حول x مانند $N_\varepsilon(x)(0 < \varepsilon)$، عدد طبیعی مانند n_ε باشد که به ازای هر $n \geq n_\varepsilon(n \in \mathbb{N})$، داشته باشیم $x_n \in N_\varepsilon(x)$.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد، رابطه $\preceq$ را یک رابطه ترتیب جزئی روی X گویند هرگاه بازگشتی، پادمتقارن و متعدی باشد. در این صورت $(X, \preceq)$ را یک مجموعه مرتب جزئی گویند. هرگاه رابطه $\preceq$ روی X، بازگشتی و متعدی باشد و همچنین برای هر $x, y \in X$، عنصری در X مانند z موجود باشد به طوری که $z \succeq x$ و $z \succeq y$، در این صورت $(X, \preceq)$، یک مجموعه جهت‌دار[۲] است. به عنوان مثال $(\mathbb{N}, \geq)$، یک مجموعه‌ی جهت‌دار است.

تعریف ۵.۱.۱ تور : فرض کنید $(\Lambda, \preceq)$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار و X مجموعه‌ای دلخواه باشد. در این صورت هر تابع $x : \Lambda \longrightarrow X$ را یک تور در X می‌نامند که آن با نماد $\{x(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ یا $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ نشان داده می‌شود. در حالت خاص اگر $\Lambda = \mathbb{N}$ باشد، تور $\{x_\lambda\}$، همان دنباله $\{x_\lambda\}$ است.

تعریف ۶.۱.۱ همگرایی تور : فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک و $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ یک تور در آن باشد. تور $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ را همگرا به $x(x \in X)$ گویند هرگاه به ازای هر همسایگی U از x، عنصری از Λ مانند λ_0 موجود باشد به طوری که برای هر $\lambda \geq \lambda_0$، $x_\lambda \in U$.

---

[۱] Metric space

[۲] Directed set

لم ۷.۱.۱ فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد، در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) X فشرده است؛

ب) اگر $A=\{F_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های بسته X باشند که خاصیت اشتراک متناهی داشته باشد، آن‌گاه $\cap_{i\in I}F_i\neq\varnothing$.

اثبات: [۱، قضیه‌ی ۱۶ − ۱ − ۱]■

۲.۱ فضاهای خطی

در این بخش فضاهای خطی را روی میدان $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید X یک فضای خطی باشد. یک نیم نرم روی X تابع $p:X\longrightarrow[0,\infty)$ است که شرایط زیر را داشته باشد:

الف) برای هر $x,y\in X$، $p(x+y)\leq p(x)+p(y)$؛

ب) برای هر $x\in X$ و $\alpha\in\mathbb{C}$، $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$.

نیم نرم p روی فضای خطی X، یک نرم نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x\in X$ که $p(x)=0$ باشد آن‌گاه $x=0$. نرم روی X را با $\|\ \|$ نشان می‌دهند که در این صورت $p(x)=\|x\|$. فضای خطی X، همراه با نرم $\|\ \|$ را یک فضای نرم‌دار[3] می‌نامند و با نماد $(X,\|\ \|)$ نشان می‌دهند.

---

[3] Normed space

تعریف ۲.۲.۱ فضای نرم‌دار X، باناخ[۴] نامیده می‌شود هرگاه با متر القا شده از نرم، فضای متریک کامل باشد.

مثال ۳.۲.۱ فرض کنید X فضای فشرده موضعی و هاوسدورف باشد. $C(X)$ فضای توابع پیوسته، کراندار و مختلط مقدار روی X است که با جمع و ضرب اسکالر معمولی تشکیل یک فضای برداری می‌دهد. و با نرم $\|f\|_u = \sup\{|f(x)| \;:\; x \in X\}$ تشکیل یک فضای باناخ می‌دهد که آن را فضای یکنواخت[۵] می‌گویند.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید X یک فضای خطی روی $\mathbb{F}$ و τ توپولوژی هاوسدورف روی X باشد. اگر نگاشت‌های $\phi : X \times X \longrightarrow X$ با ضابطه‌ی $\phi(x,y) = x + y$ و $\psi : \mathbb{F} \times X \longrightarrow X$ با ضابطه‌ی $\psi(\alpha,x) = \alpha x$ پیوسته باشند، آنگاه (X,τ)، فضای توپولوژیک خطی است.

مثال ۵.۲.۱ هر فضای نرم‌دار، فضای توپولوژیک خطی است.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید X فضای خطی و P خانواده‌ای از نیم‌نرم‌ها روی X باشد. خانواده P نقاط X را جدا می‌کند هرگاه برای هر $x \in X - \{0\}$، $p \in P$ وجود داشته باشد به طوری که $p(x) \neq 0$.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید X فضای توپولوژیک خطی که توپولوژی آن توسط خانواده‌ای از نیم‌نرم‌های P تولید می‌شود. اگر $\{0\} = \{0 = \cap_{p\in P}\{x \;:\; p(x)$، آنگاه X را فضای محدب موضعی[۶] می‌نامند.

---

[۴] Banach

[۵] uniformed space

[۶] locally convex space

مثال ۸.۲.۱ هر فضای نرم دار، فضای محدب موضعی می‌باشد.

تعریف ۹.۲.۱ اگر H فضای خطی باشد. نگاشت $\langle\ ,\ \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ ضرب داخلی روی H نامیده می‌شود، هرگاه:

الف) برای هر $x, y \in H$، $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$؛

ب) برای هر $x, y, z \in H$ و $a, b \in \mathbb{C}$، $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$؛

ج) برای هر $x \in H - \{0\}$، $\langle x, x\rangle \in (0, \infty)$.

اگر H فضای خطی مجهز به ضرب داخلی $\langle\ ,\ \rangle$ باشد، برای هر $x \in H$ نگاشت با ضابطه $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ یک نرم روی H است که آن را نرم تولید شده توسط ضرب داخلی می‌نامند. اگر H نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی، یک فضای باناخ باشد آن‌گاه H را فضای هیلبرت[۷] نامند.

مثال ۱۰.۲.۱ $\mathbb{C}^n(n \in \mathbb{N})$، مرکب از n−تایی های مختلط $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ در صورتی که جمع وضرب اسکالر مولفه به مولفه تعریف شوند با ضرب داخلی

$$\langle x, y\rangle = \Sigma_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i} \qquad (x = \xi_1, ..., \xi_n, y = \eta_1, ..., \eta_n)$$

فضای هیلبرت می‌باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار و $L(X, Y)$ مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های خطی از X به Y باشد. $T \in L(X, Y)$ را نگاشت خطی کراندار از X به Y گویند، هرگاه عدد مثبتی مانند M باشد، به طوری که برای هر $x \in X$، $\|Tx\| \leq M\|x\|$.

مجموعه‌ی نگاشت‌های خطی کراندار از X به Y را با نماد $B(X, Y)$ نشان می‌دهند.

---

[۷] Hilbert space

چنانچه $X = Y$ باشد، به جای $L(X, Y)$ و $B(X, Y)$ از نمادهای $L(X)$ و $B(X)$ و چنانچه $Y = \mathbb{C}$ باشد، به جای $B(X, \mathbb{C})$ و $B(X^*, \mathbb{C})$ به ترتیب از نمادهای X^* و X^{**} استفاده می‌شود که آن‌ها را به ترتیب دوگان و دوگان دوم X می‌نامند.

نکته ۱.۲.۱۲ فرض کنید X, Y فضاهای نرم‌دار باشند، در این صورت:

الف) $L(X, Y)$، با جمع و ضرب اسکالر نقطه‌وار، یک فضای برداری است؛

ب) $B(X, Y)$ زیر فضایی از $L(X, Y)$ می‌باشد؛

ج) اگر $T \in B(X, Y)$، نرم T با نماد $\|T\|$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \ : \ x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

آنگاه $\|\ \|$ یک نرم روی $B(X, Y)$ است.

قضیه ۱.۲.۱۳ اگر Y یک فضای باناخ باشد، آنگاه $(B(X, Y), \|\ \|)$ نیز فضای باناخ می‌باشد.

اثبات: [۱۶، قضیه‌ی ۴–۱]. ■

نتیجه ۱.۲.۱۴ اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، آنگاه X^* و X^{**} فضاهای باناخ می‌باشند.

اثبات: [۱۶، قضیه‌ی ۴–۵]. ■

تعریف ۱.۲.۱۵ فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد. نگاشت خطی $\phi : X \longrightarrow X^{**}$ برای هر $x \in X$ و $x^* \in X^*$ با ضابطه‌ی $\phi(x)(x^*) = x^*(x)$ نگاشت جادهی نامیده می‌شود. اگر ϕ پوشا باشد، X را یک فضای انعکاسی[۸] (بازتابی) می‌نامند. لازم به ذکر است، نگاشت جادهی ایزومتری است یعنی برای هر $x \in X$، $\|\phi(x)\| = \|x\|$.

---

[۸] Reflexive

تبصره ۱.۲.۱۶ اگر H یک فضای هیلبرت باشد، برخی از توپولوژی‌های روی $B(H)$ عبارتند از:

الف) توپولوژی نرم؛

ب) برای هر $h \in H$، $p_h : B(H) \longrightarrow [0,\infty)$ با ضابطه‌ی $p_h(u) = \|u(h)\|$ یک نیم‌نرم روی $B(H)$ است. در این صورت توپولوژی که توسط خانواده نیم‌نرم‌های $P = \{p_h \;:\; h \in H\}$ تولید می‌شود، توپولوژی عملگری قوی (SOT) روی $B(H)$ نامیده می‌شود؛

ج) برای هر $h, k \in H$، $p_{h,k} : B(H) \longrightarrow [0,\infty)$ با ضابطه‌ی $p_{h,k}(u) = |\langle uh, k\rangle|$ یک نیم‌نرم روی $B(H)$ است. در این صورت توپولوژی که توسط خانواده نیم‌نرم‌های $P = \{p_{h,k} \;:\; h, k \in H\}$ تولید می‌شود، توپولوژی عملگری ضعیف (WOT) روی $B(H)$ نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۲.۱۷ فرض کنید H فضای هیلبرت باشد، $\{u_\alpha\} \subseteq B(H)$ و $u \in B(H)$ در این صورت:

الف) برای هر $h \in H$، $\|u_\alpha h - uh\| \longrightarrow 0$ اگر و تنها اگر $u_\alpha \xrightarrow{SOT} u$؛

ب) برای هر $h, k \in H$، $\langle u_\alpha h, k\rangle \longrightarrow \langle uh, k\rangle$ اگر و تنها اگر $u_\alpha \xrightarrow{WOT} u$

اثبات: [۵، گزاره‌ی ۳ − ۱].■

تعریف ۱.۲.۱۸ فرض کنید X فضای خطی باشد. مجموعه‌ی E در X را محدب گویند هرگاه برای هر $x, y \in E$ و $0 \leq \lambda \leq 1$، $z_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)y$ نیز در E باشد. لازم به ذکر است مجموعه‌های محدب تحت انتقال پایا هستند یعنی اگر E محدب باشد مجموعه‌ی $E + x = \{y + x \;:\; y \in E\}$ نیز محدب می‌باشد.

مثال ۱۹.۲.۱ مجموعه‌ی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$، محدب می‌باشد.

تعریف ۲۰.۲.۱ فرض کنید X فضای خطی باشد. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع محدب گویند، هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in [0, 1]$، داشته باشیم $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. برای مثال تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x^2$ محدب می‌باشد.

تعریف ۲۱.۲.۱ فرض کنید A زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیک خطی X باشد. غلاف A را با $co(A)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$co(A) = \{\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ : \ x_i \in A, \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}$$

به عبارت دیگر غلاف محدب A، اشتراک تمام زیر مجموعه‌های محدب شامل A است. پس غلاف محدب A کوچک‌ترین مجموعه‌ی محدب شامل A است.

تعریف ۲۲.۲.۱ فرض کنید A زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیک خطی X باشد. غلاف بسته A را با $\overline{co}(A)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{co}(A) = \overline{\{\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ : \ x_i \in A, \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}}$$

به عبارت دیگر غلاف محدب بسته A، اشتراک تمام زیر مجموعه‌های محدب و بسته شامل A است. پس غلاف محدب بسته A کوچک‌ترین مجموعه‌ی محدب و بسته شامل A است.

به وضوح بستار غلاف محدب A، همان غلاف محدب بسته A است یعنی $\overline{co(A)} = \overline{co}(A)$.

تعریف ۲۳.۲.۱ اگر X یک فضای خطی باشد، $q : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی زیر خطی نامیده می‌شود هر گاه برای هر $x, y \in X$، $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ و همچنین برای هر $x \in X$ و $\alpha \geq ۰$ داشته باشیم $q(\alpha x) = \alpha q(x)$.

قضیه ۲۴.۲.۱ هان – باناخ[۹] : فرض کنید X یک فضای خطی روی $\mathbb{R}$ و M زیر فضای خطی از X و q تابعی زیر خطی روی X باشد. در این صورت هر تابعک خطی $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ به طوری که برای هر $x \in M$، $f(x) \leq q(x)$ باشد، دارای یک توسیع $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که به ازای هر $x \in X$ داریم:

$$F(x) \leq q(x)$$

اثبات: [۵، گزاره‌ی ۲–۶–۳]. ■

نتیجه ۲۵.۲.۱ اگر X یک فضای نرم‌دار و M زیر فضای خطی از X باشد و همچنین $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی خطی کراندار باشد، آنگاه $F \in X^*$ وجود دارد به طوری که $F|_M = f$ و $\|F\| = \|f\|$.

اثبات: [۵، نتیجه‌ی ۵–۶–۳]. ■

نتیجه ۲۶.۲.۱ اگر X یک فضای نرم‌دار باشد و $x \in X$، آنگاه:

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| \ : \ f \in X^*, \|f\| \leq ۱\}$$

اثبات: [۵، گزاره‌ی ۷–۶–۳]. ■

نتیجه ۲۷.۲.۱ فرض کنید X یک فضای نرم‌دار و M زیر فضای بسته از X باشد و همچنین $x_۰ \in X - M$ و $d = dist(x_۰, M)$، در این صورت $f \in X^*$ وجود دارد به

[۹] Han-Banach