دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

خواص هندسی زیر مجموعه های محدب در فضاهای باناخ مختلط

استادان راهنما

یداله نژاد دهقان و محمد حسن فاروقی

استاد مشاور

ایلدار صادقی

پژوهشگر

رمضان ضرغامی

شهریور ۱۳۸۹

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی راکه سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی همتاست. گواهی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینیم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می بینیم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

همسر صبور و مهربانم،

که همواره شرمنده صبر و مهر او خواهم بود،

و گل بهشتی ام زهرا،

برق امید و شادیم در ظلمت نومیدی ها و غصه ها،

و روح پاک مادرم،

که برایم آیت عشق الهی بود و یادش در دریای ذهنم، غوطه ور شدن در خاطرات خوش است،

و دستان پر تلاش پدرم،

که قوت حلال را ذائقه جسمم و تلاش را ذائقه روحم قرار داد.

بنام خدا

و لَمْ یَشْکُرِ الْمَخلوق لَمْ یَشْکُرِ الْخالِق.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که خانواده ای مذهبی و علم دوست را مهد رشد و پرورش من قرار داد. خدایی که چشمه حیات بخش لطف و احسانش را دمادم در زندگی من جاری ساخته است.

بار الها! لیاقت تقدیم خلوص دلم را به آستان مقدست و اولیای برحقت به خصوص حضرت ولی عصر – منتظَر تشنگان علم و معرفت– و مادر معصوم و ارجمندش –خانم فاطمه زهرا– به من عطا فرما.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از استادان راهنمای خود، جناب آقای دکتر **محمد حسن فاروقی** ، که من مطالب ارزنده ای از کلاس های درس ایشان یادگرفته ام، و جناب آقای دکتر **یداله نژاد دهقان** ، که اولین مشوق من برای ورود به دوره ی دکتری بودند، تشکر کنم. از جناب آقای دکتر **ایلدار صادقی** استاد مشاورم، به واسطه کمك هایشان به ویژه در نوشتن مقالات حاصل از این رساله، تشکر می کنم.

همچنین از رئیس محترم انجمن ریاضی ایران جناب آقای دکتر **علیرضا مدقالچی** و جناب آقای دکتر **محمد صال مصلحیان** استاد بین المللی آنالیز کشورمان، که با دقت رساله را مطالعه و داوری و ویرایش کردند، صمیمانه قدردانی می کنم. همچنین سپاس خود را نسبت به استاد پرتلاشم جناب آقای دکتر **محمد رضا جبارزاده** به عنوان داور داخلی ابراز می دارم.

از تمام دوستان دوران تحصیلم که مایه سرور و دلگرمی من در دوران سخت بودند و مخصوصاً از آقای دکتر مرتضی فغفوری (به خاطر راهنمایی های مفیدشان در شیوه نگارش رساله) صمیمانه تشکر می کنم.

ازکلیه دبیران دوران تحصیلم، استادان گرامی مخصوصاً از آقای دکتر علی‌اکبر مهرورز، دکتر حسین امامعلی‌پور ریاست دانشکده علوم ریاضی، دکتر رضا نقی‌پور معاونت پژوهشی دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی محض و نیز کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

بدون شک، بیشترین و طاقت فرساترین زحمات و کمبودها را همسر فهیم و عزیزم سرکار خانم **بهناز حیدری** متحمل شدند، ضمن تقدیر و تعذیر از ایشان، توفیق جبران از خداوند مهربان را خواستارم.

در تمام لحظات زندگیم، **مادر پاکدل و مهربانم** را که نگاهش پرتوی از عشق الهی بود و دعا و نذر و نیازش پشتیبانم، صمیمانه سپاس می گویم و صد افسوس که شش ماه پیش (دوم اسفند ۱۳۸۸)، با هجرتش به دیار باقی داغدارم کرد و من فرصت مقدس خدمت به ایشان را از دست دادم، روحش شاد**!**

در پایان از **پدر سخت کوش و باایمانم**، پدرزن فرهیخته ام جناب آقای **مهندس محمد تقی حیدری** که همیشه معلم و حامی من بوده اند و **مادرزن مهربانم** که حق مادری بر گردن من دارد و بالاخره از تمامی **برادران** و **خواهرانم** و برادران خانمم و خانواده محترم همه آنها که همواره زندگی را برایم دلپذیر کرده اند، تشکر می کنم.

در برابر وجود پر مهر همه عزیزانم زانوی ادب بر زمین می زنم و با دلی سرشار از عشق و ارادت بر دست همه آنها بوسه می زنم.

رمضان ضرغامی

شهریور ۱۳۸۹

نام خانوادگی دانشجو: ضرغامی نام: رمضان

عنوان: خواص هندسی زیر مجموعه های محدب در فضاهای باناخ مختلط

استادان راهنما : یداله نژاد دهقان و محمد حسن فاروقی

استاد مشاور : ایلدار صادقی

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۸۹ تعداد صفحات: ۸۳

کلید واژه‌ها: نقطهٔ و تابعک محمل، نقطهٔ و تابعک اکسپوزد، نقطهٔ و تابعک اکسپوزد قوی، گودپذیری، خاصیت و قضیهٔ بیشاپ-فلپس، خاصیت رادون-نیکودیم، مجموعهٔ تجزیه پذیر، پروکسیمینالی، M- ایده آل، توابعی که نرم خود را می گیرند، توابعی که شعاع عددی خود را می گیرند.

چکیده

مهمترین قضیهٔ در بررسی خواص هندسی زیرمجموعه های محدب ، بسته و کراندار C از فضای باناخ X بدون شک، قضیهٔ بیشاپ-فلپس است که بیان می کند مجموعهٔ نقاط محمل C در مرز آن و مجموعهٔ تابعک های محمل آن در X^* چگالند. دراین رساله با تشریح مقاله ای. بیشاپ و آر . آر . فلپس ([۹]) و بیان نتایج و قضایای آنها، مقدمات بیان و اثبات قضیهٔ بیشاپ-فلپس فراهم می شود. بعد به معرفی برخی مفاهیم هندسی دیگر در گوی واحد مانند نقاط فرین، اکسپوزد، اکسپوزد قوی و ارتباط آنها با یکدیگر پرداخته می شود.
چون خاصیت رادون-نیکودیم، خاصیت بیشاپ-فلپس را -که تعمیمی از قضیهٔ بیشاپ-فلپس است- نتیجه می دهد به بیان تعریف آن و برخی مفاهیم مرتبط یا هم ارز آن پرداخته، قضایای مربوطه را بیان خواهیم کرد.
با ارائهٔ تعریف جدید فلپس از نقطهٔ محمل در فضاهای باناخ مختلط، مثال معروف لومونوسوف را که نشان می دهد با این تعریف، در حالت کلی، قضیهٔ بیشاپ-فلپس در فضاهای مختلط برقرار نیست، تشریح خواهیم کرد.
در فصل دوم ارتباط پروکسیمینال بودن را با قضیهٔ بیشاپ-فلپس بیان کرده و ثابت کرده ایم اگر G یک مجموعهٔ

محمل در فضای باناخ X و $L^1(\Omega, G)$ یک مجموعهٔ تجزیه پذیر باشد آنگاه هر تابع ثابت $L^1(\Omega, G)$ یک نقطهٔ محمل آن است. همچنین اگر زیر فضای ماکسیمال G یک M-ایده آل در فضای باناخ X باشد آنگاه $L^1(\Omega, G)$ در یک زیر فضای ماکسیمال پروکسیمینال $L^1(\Omega, X)$ قرار دارد.

در ادامه، برای برخی مفاهیم هندسی، در فضاهای مختلط تعاریف جدیدی مانند نقطهٔ اکسپوزد مطلق و اکسپوزد مطلق قوی را ارائه می دهیم و با استفاده از آنها ثابت می کنیم اگر C زیرمجموعه ای بسته از گوی واحد باشد و هر زیرمجموعهٔ ناتهی C گودپذیر باشد آنگاه قضیهٔ بیشاپ-فلپس در حالت مختلط برای C برقرار است. همچنین یک شرط لازم و کافی برای وجود نقطه ساپورت زیرمجموعه ای خاص از فضای «بلاخ» را بیان و اثبات می کنیم.

در انتهای این فصل با یاد آوری نمایش مجموعه ای فضای $L_p(\Omega, X)$، تحت شرایطی و در قالب یک قضیه ثابت می کنیم اگر f_0 نقطهٔ اکسپوزد قوی در $L_p(\Omega, G)$ باشد آنگاه به ازای هر $t \in \Omega$، $f_0(t)$ اکسپوزد قوی نمایش مجموعه ای آن است.

در ابتدای فصل سوم، شرایط لازم برای چگال بودن عملگرهایی از $L(X, Y)$ که نرم خود را می گیرند، بیان می شود. برای اینکه کار نتیجه بخش شود، آنها به دو دسته تقسیم شده اند. در دسته اول Y را فضای دلخواه می گیریم و گوییم X دارای خاصیت «A» است. برعکس در دسته دوم X را فضای دلخواه می گیریم و گوییم Y دارای خاصیت «B» است. خاصیت «A» در واقع خاصیت بیشاپ-فلپس برای گوی واحد است. برای خاصیت «B» شرط کافی لینت شتراس بنام خاصیت «β» را ثابت می کنیم.

در بخش بعد شعاع عددی را معرفی می کنیم. تقریباً نظایر قضایای بخش قبل، اینجا هم قابل بیان و اثبات هستند و تشابهی خوشایند بین عملگرهایی که نرم خود را می گیرند و آنهایی که شعاع عددی خود را می گیرند، مشاهده می شود.

در ادامه در مورد توابع تمام ریختی که نرم خود را می گیرند و آنهایی که شعاع عددی خود را می گیرند، بحث می شود. سپس برخی نتایج جدید خود را ثابت می کنیم.

در انتها، چند مسئله باز را که در انجام این تحقیق به آنها رسیده ایم بیان می کنیم.

فهرست مطالب

مقدمه

مطالعه ماکسیمم ها و مینیمم ها دارای جایگاه مهمی در علوم مختلف است و یکی از پیوندهای همیشگی علوم ریاضی با سایر علوم، همین شاخه است. شاید یکی از قضایای مهم آنالیز که به خاطر داریم و مکرر استفاده کرده ایم، قضیهٔ ماکسیمم-مینیمم باشد که بیان می کند هر تابع حقیقی پیوسته ماکسیمم و مینیمم خود را روی هر مجموعهٔ فشرده (در اعداد حقیقی یا مختلط، یعنی بسته و کراندار) اختیار می کند. فکر تعمیم این قضیه به فضاهای باناخ، عرصه جدیدی در هندسه فضاهای باناخ گشود. در سال ۱۹۵۸ وی. کلی [۳۵] این پرسش را مطرح کرد که آیا عضوی از یک زیرمجموعهٔ محدب بستهٔ کراندار از یک فضای باناخ می تواند نقطهٔ وقوع سوپریمم (نقطهٔ محمل) یک تابعک ناصفر (تابعک محمل) باشد. بیشاپ و فلپس [۸] در سال ۱۹۶۱ با اثبات حدس کلی در فضاهای باناخ حقیقی، نشان دادند که تابعک های محمل در فضای دوگان نرم-چگالند، که به قضیه ای به نام آنها معروف شد. همچنین ثابت کردند قضیه برای گوی واحد بستهٔ فضاهای باناخ مختلط درست است. بعدها وی. لومونوسوف [۳۷] یک فضای باناخ مختلط و زیر مجموعهٔ بستهٔ محدب کرانداری از آن ساخت که مجموعهٔ نقاط محمل آن تهی بود، یعنی قضیهٔ بیشاپ-فلپس در حالت کلی برای فضاهای باناخ مختلط درست نبود. از آن زمان به بعد این که در چه فضاهای مختلطی و برای چه زیرمجموعه هایی قضیهٔ بیشاپ-فلپس درست است، موضوع خیلی از مقالات شد.

در فصل اول این رساله، مقدمات لازم برای اثبات قضیهٔ اصلی (قضیهٔ ۱۰.۱.۱) که بیشاپ و فلپس در [۹]، بیان کرده اند، به زبان ساده تر شرح داده، اثبات بعضی از قضایا و نتایج مهم را آورده ایم. در ادامه بعضی مفاهیم هندسی مهم کرهٔ واحد رابیان کرده ایم. چون خاصیت رادون-نیکودیم، خاصیت بیشاپ-فلپس و آن هم قضیهٔ بیشاپ-فلپس را نتیجه می دهد، بیان تعریف کامل این دو خاصیت و خاصیت گود پذیری، از دیگر مطالب این فصل می باشد. در انتها، مثال نقض معروف وی. لومونوسوف شرح داده شده است.

در فصل دوم، نتایج و کاربردهایی جدید از قضیهٔ بیشاپ-فلپس از جمله رابطهٔ آن با مفهوم پروکسیمینالی، گود پذیری، برقراری یا عدم برقراری آن برای دو مجموعهٔ خاص در فضاهای «بلاخ» و $H(D)$ را بیان و ثابت کرده ایم. در آخر فصل نمایش مجموعه ای فضای $L_p(\Omega, X)$ و نقاط اکسپوزد را همراه با چند نتیجهٔ مرتبط شرح داده ایم.

فصل سوم با معرفی عملگرهایی که نرم خود را می گیرند شروع می شود. بیشاپ و فلپس [۸]، مسئله تعمیم قضیه خود را به این صورت مطرح کردند که اگر X و Y فضاهای باناخ باشند، آیا مجموعهٔ عملگرهایی از $L(X,Y)$ که نرم خود را می گیرند، در $L(X,Y)$ چگال است؟ اما این سؤال خیلی کلی بود و غیر قابل حل می نمود. جی. لینت شتراس، جهت پاسخ به آن، مسئله را دو قسمت کرد، اگر فضای اول یعنی X ثابت و فضای دوم یعنی Y دلخواه و جواب سؤال مذکور مثبت بود آنگاه X را دارای خاصیت «A» بر عکس اگر Y ثابت و X دلخواه بود، Y را دارای خاصیت «B» نامید. او ثابت کرد هر فضای باناخی دارای خاصیت «A» نیست. همچنین شرایط لازمی را برای خاصیت «B» ثابت کرد که این شرایط خاصیت «β» نام گرفت. علاوه بر مطالب فوق، ضمن قضایایی، برخی فضاهای باناخ و رده ای از عملگرها که دارای خواص «A» یا «B» هستند، مشخص شده اند. در بخش دوم به جای نرم کمیت دیگری به نام شعاع عددی ابزار کار قرار می گیرد و نظیر خیلی از قضایا و مثالهای بخش قبل، در اینجا هم بیان و اثبات می شوند. در بخش بعد آمیخته ای از مطالب دو بخش قبل برای توابع تمام ریخت بیان می شود و نتایج جدیدی به آنها اضافه می شود. در انتهای این فصل بعضی مسائل باز مهم موضوعات تحقیقاتی این رساله، فهرست شده است.

در این رساله مرجع اثبات تمام قضایا، لم ها، نتیجه ها و تبصره ها بیان شده است. در عین حال اثبات برخی مطالب مهم را با توضیح بیشتر که قابل فهم برای خواننده باشد، آورده ایم. لم ۴.۳.۱ و تمام مطالب فصل دوم، بعد از قضیه ۱۰.۱.۲ و بخش ۵.۳ از فصل سوم (به استثنای مواردی که ارجاع داده شده) مهمترین نتایجی است که خودمان ثابت کرده ایم. از این رساله دو مقاله با عناوین زیر تهیه شده که شالوده مطالب فصل دوم بر اساس آنها است:

1. R. Zarghami, Application of Bishop-Phelps theorem in the approximation theory. The J. Nonlinear Science and Applications, **3**(2010), no. 2, 155–158.

2. I. Sadeqi, R. Zarghami, Y. N. Dehgan, Remarks on Bishop-Phelps theorem in some complex Banach spaces. (To appear in the The J. Nonlinear Science and Applications.)

فصل ۱

پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی

مقدمه

فصل نخست رساله مروری بر منابع ذکر شده در بخش بررسی منابع پیشنهاده و بیان مفاهیم پایه و مورد نیاز در فصل های آتی می‌باشد. البته هندسه فضاهای باناخ مختلط دارای تعاریف و مفاهیم متعدد و عمیق است و منابع و مقالات زیادی در زمینه آن وجود دارد که در اینجا فقط به مواردی اشاره می شود که پایهٔ مطالب فصل های بعد هستند. شاید جامع ترین آنها کتاب «هندسه فضاهای باناخ» جی. دیستال [۲۲] باشد که در خیلی از مقالات به عنوان منبع معرفی شده و شامل تعاریف وقضایای مختلف، و مقالات فراوان در مورد ارتباط آنها با یکدیگر است.

۱.۱ تابعک های محمل یک مجموعهٔ محدب

تبصره ۱.۱.۱. *اگر چه تمام قضایا و نتایج این بخش برای تابعک ها و فضاهای حقیقی بیان و ثابت شده اند، با تعاریفی که بعداً می آیند، با تحدید اسکالرها به اسکالرهای حقیقی در فضای مختلط و در نظر گرفتن قسمت حقیقی تابعک ها، قابل تعمیم به فضاهای مختلط هستند ([۹]). نظیر این تعمیم ها را در مورد قضیهٔ جداسازی، می توان در [۲۳] یافت.*

در تمام این رساله، دوگان، گوی واحد و کرهٔ واحد فضای E را به ترتیب با E^*، B_E و S_E نشان خواهیم داد. یعنی:

$$B_E = \{x \in E;\ \|x\| \leq ۱\} \qquad , \qquad S_E = \{x \in E;\ \|x\| = ۱\},$$

و همچنین نرم هر $f \in E^*$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|f\| = \sup f(B_E).$$

ابتدا قضیهٔ جداسازی را که در واقع یک صورت هندسی از قضیهٔ هان-باناخ است و پایه و اساس تعاریف

و قضایای این قسمت است بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۱.۱. *فرض کنید A و B زیر مجموعه های محدب از فضای برداری توپولوژیک هاسدورف حقیقی E باشند و $B^\circ \neq \emptyset$ و $B^\circ \cap A = \emptyset$ آنگاه می‌توان A و B را به وسیله یک ابر صفحه از هم جدا کرد، یعنی یک تابعک خطی پیوسته $f \neq ۰$ روی E وجود دارد به طوری که $\sup f(A) \leq \inf f(B)$.*

برهان. رجوع شود به مرجع [۲۳]. $\square$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید C زیرمجموعه ای از فضای باناخ X باشد و $x \in C$. اگر تابعک ناصفر $f \in X^*$ موجود باشد به طوری که

$$Re\ f(x) = \sup_{y \in C} Re\ f(y)$$

آنگاه x را **نقطهٔ محمل** و f را **تابعک محمل** گوییم.

اگر f یک تابعک محمل باشد هر مضرب مثبت f نیز تابعک محمل است.

قضیهٔ محمل نتیجهٔ مستقیم از قضیهٔ جداسازی است:

قضیه ۴.۱.۱. *اگر C زیر مجموعه ای محدب از فضای برداری توپولوژیک هاسدورف حقیقی E باشد و $C^\circ \neq \emptyset$ و $x \in \partial C$، آنگاه ابر صفحه ای موجود است که x یک نقطهٔ محمل C است، یعنی یک تابعک خطی پیوسته $f \neq ۰$ روی E وجود دارد به طوری که*

$$\sup f(C) = f(x).$$

فرض اینکه C نقاط درونی دارد، یک فرض قوی است، ولی شرطی لازم برای قضیهٔ محمل است. بعلاوه وی. کلی [۳۵] نشان داده است که یک زیرمجموعهٔ محدب بستهٔ کراندار از یک زیر فضای چگال یک فضای هیلبرت وجود دارد که نقطهٔ محملی ندارد. وی در همان مقاله پرسش معروف خود را مطرح کرد که آیا هر مجموعهٔ محدب بستهٔ کراندار در فضای باناخ حداقل یک نقطهٔ محمل دارد؟

ای. بیشاپ و آر. آر. فلپس [۹] در سال ۱۹۶۳ به سؤال کلی پاسخ مثبت دادند و حتی نشان دادند شرط کرانداری لازم نیست.

تعریف ۵.۱.۱. زیر مجموعهٔ K از فضای نرمدار E را یک مخروط محدب گوییم هرگاه K یک مجموعهٔ محدب باشد و اگر $y \in K$ و $\lambda \geq 0$، آنگاه $\lambda y \in K$.

حال فرض کنید مخروط محدب K درون ناتهی داشته باشد و C یک مجموعهٔ محدب شامل نقطهٔ x_0 باشد و $(K + x_0) \cap (C - \{x_0\}) = \emptyset$، $(K + x_0)$، C را در x_0 حمل کند.) آنگاه بنابر قضیهٔ جداسازی، $g \neq 0$ در E^* موجود است به طوری که

$$\sup g(C) \leq \inf g(K + x_0).$$

چون x_0 هم عضو C است و هم عضو $K + x_0$، لذا داریم

$$g(x_0) \leq \sup g(C) \leq \inf g(K + x_0) \leq g(x_0).$$

یعنی x_0 نقطه محمل C، توسط g است. پس برای نشان دادن وجود نقاط و تابعک های محمل C ، کافی است مخروط های محمل C را که نقاط درونی دارند پیدا کنیم. برای اثبات قضیهٔ اصلی لم زیر نیاز است. برای بیان آن، مجموعهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$K(f, k) = \{x \in E : \|x\| \leq kf(x); k > 0, f \in S_{E^*}\}$$

واضح است که $K(f, k)$ یک مخروط محدب بسته است و اگر $k > 1$، درون آن ناتهی است.

لم ۶.۱.۱. *فرض کنید C یک زیر مجموعهٔ کامل از فضای خطی نرمدار E باشد و $f \in S_{E^*}$ ، روی C کراندار باشد. اگر $z \in C$ و $k > 0$، نقطهٔ $x_0 \in C$ موجود است به طوری که $x_0 \in K(f, k) + z$ و $K(f, k) + x_0$ ، C را در x_0 حمل می‌کند.*

برهان. رجوع شود به مرجع [۹]. □

قضیه ۷.۱.۱. *اگر C یک مجموعهٔ محدب بسته از فضای باناخ X باشد آنگاه نقاط محمل C در مرز C چگالند.*

برهان. اگر z یک نقطهٔ از مرز C باشد و $\epsilon > 0$ ، y را در $E\backslash C$ طوری انتخاب کنید که $\|y - z\| < \frac{\epsilon}{2}$. با به کار گرفتن قضیهٔ جداسازی برای هر همسایگی محدب y که از مجموعهٔ بستهٔ C جدا است، $f \in S_{E^*}$ چنان موجود است به طوری که

$$\sup f(C) \leq f(y).$$

بنابر لم ۶.۱.۱، x_0 ای در C هست که $x_0 \in K(f, 2) + z$ و $K(f, 2) + x_0$، C را در x_0 حمل می کند. یعنی x_0 نقطهٔ محمل برای C است. بعلاوه چون $x_0 - z \in K(f, 2)$ و $x_0 \in C$، داریم

$$\|x_0 - z\| \leq 2[f(x_0) - f(z)] \leq 2[f(y) - f(z)] \leq 2\|y - z\| < \epsilon,$$

و این اثبات را کامل می کند. □

حال مقدمات اثبات چگال بودن تابعک های محمل را با بیان دو لم زیر و اثبات قضیهٔ اصلی فراهم می کنیم.

لم ۸.۱.۱. *فرض کنید $\epsilon > 0$ و $\|g\| = 1 = \|f\|$ و در صورتی که $f(x) = 0$ و $\|x\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ داشته باشیم $|g(x)| \leq 1$، آنگاه یا $\|f + g\| \leq \epsilon$ و یا $\|f - g\| \leq \epsilon$.*

برهان. رجوع شود به مرجع [۹]. □

لم ۹.۱.۱. *فرض کنید $1 > \epsilon > 0$ و $\|g\| = 1 = \|f\|$ و $k > 1 + \frac{2}{\epsilon}$، اگر g روی $K(f, k)$ نامنفی باشد آنگاه $\|f - g\| \leq \epsilon$.*

برهان. رجوع شود به مرجع [۹]. □

قضیه ۱۰.۱.۱. *فرض کنید C زیرمجموعهٔ محدب و بسته و X یک زیرمجموعهٔ کراندار و ناتهی از فضای باناخ E باشند. اگر $\epsilon > 0$ و $f \in S_{E^*}$ ، چنان که*

$$\sup f(C) < \inf f(X),$$

آنگاه $g \in S_{E^*}$ و $x_\circ \in C$ چنان موجود است که

$$\|f - g\| \leq \epsilon,$$

و

$$g(x_\circ) = \sup g(C) < \inf g(X).$$

برهان. با فرض $\sup f(C) = r$ و $\inf f(X) = \delta$ ، β را طوری انتخاب کنید که $r < \beta < \delta$. همسایگی V از X را با تعریف $V = X + (\delta - \beta)B_E$، در نظر بگیرید. این یک مجموعهٔ کراندار است و چون $\inf f(B_E) = -۱$ ، لذا داریم:

$$\inf f(V) = \inf f(X) - (\delta - \beta) = \beta$$

فرض کنید $\alpha = ۱ + \frac{۲}{\epsilon}$ و z را در C طوری انتخاب کنید که

$$r - f(z) < (۲\alpha)^{-۱}(\beta - r).$$

M را بزرگتر از $۲^{-۱}(\beta - r)$ و $\sup\{\|y - z\|;\ y \in V\}$ در نظر بگیرید و قرار دهید $k = ۲\alpha M(\beta - r)^{-۱}$ (در این صورت $k > \alpha > ۱$ خواهد بود.)

بنابر لم ۶.۱.۱، (چون C یک زیرمجموعهٔ کامل از E است) می توان نقطهٔ $x_\circ$ را در C طوری انتخاب کرد که $K(f,k) + x_\circ$ ، C را در $x_\circ$ محمل کند و $x_\circ - z \in K(f,k)$. نشان می دهیم که $V \subset K(f,k) + x_\circ$.

اگر $y \in V$ آنگاه

$$\begin{aligned}
\|y - x_\circ\| &\leq \|y - z\| + \|x_\circ - z\| \\
&< M + \|x_\circ - z\| \\
&\leq M + f(x_\circ - z) \\
&\leq M + k[r - f(z)] \\
&< M + k(۲\alpha)^{-۱}(\beta - r) = ۲M \\
&< ۲\alpha M = k(\beta - r) \\
&\leq kf(y - x_\circ).
\end{aligned}$$

بنابر قضیهٔ جداسازی $g \in S_{E^*}$ موجود است به طوری که

$$\begin{aligned}
\sup g(C) &= g(x_\circ) \\
&\leq \inf g(K(f,k) + x_\circ) \\
&= \inf g(V) = \inf g(X) - (\delta - \beta).
\end{aligned}$$

چون $\inf g(K(f,k)) \geq ۰$ و $k > ۱ + \frac{۲}{\epsilon}$، از لم ۹.۱.۱ نتیجه می شود $\|f - g\| \leq \epsilon$. □

یک حالت (نتیجهٔ) معروف از قضیهٔ جداسازی به صورت زیر است که در آن فشردگی جایگزین داشتن درون ناتهی شده است.

نتیجه ۱۱.۱.۱. *اگر B و C زیرمجموعه های محدب جدا از فضای موضعاً محدب E باشند و نیز B فشرده و C بسته باشد، آنگاه $f \in E^*$ ای وجود دارد به طوری که*

$$\sup f(C) < \inf f(B).$$

برهان. رجوع شود به مرجع [۳۴]. □

حال اگر E فضای باناخ باشد، از قضیهٔ ۱۰.۱.۱ ، نتیجهٔ بهتری هم حاصل می شود.

نتیجه ۱۲.۱.۱. *اگر B و C زیرمجموعه های محدب جدا از فضای باناخ E باشند و نیز B فشرده و C بسته باشد، آنگاه $x_\circ \in C$ و $f \in E^*$ وجود دارد به طوری که*

$$f(x_\circ) = \sup f(C) < \inf f(B)$$

برهان. رجوع شود به مرجع [۳۴]. □

یک نتیجهٔ واضح از حالت اخیر قضیهٔ جداسازی، بیان می کند که زیرمجموعهٔ محدب بستهٔ C از یک فضای موضعاً محدب E، اشتراک تمام نیم فضاهای بسته ای است که شامل آن است. زیرا اگر $x \notin C$ آنگاه با فرض $B = \{x\}$، $f \in E^*$ موجود است که

$$\sup f(C) < f(x).$$

لذا به ازای عددی حقیقی مانند r ، نیم فضای $H_x = \{y;\ f(y) \leq r\}$ شامل C است ولی شامل x نیست.

تعریف ۱۳.۱.۱. نیم فضای $H = \{y;\ f(y) \leq r\}$ را محمل C گوییم هرگاه $C \subseteq H$ و به ازای y ای در C، $f(y) = r$.

نتیجه ۱۴.۱.۱. *اگر C یک زیرمجموعهٔ محدب بسته از فضای باناخ E باشد، آنگاه C اشتراک تمام نیم فضاهای بسته ای است که محمل آن هستند.*

برهان. با توجه به توضیحات بالا $C \subseteq \bigcap_{x \notin C} H_x$. همچنین داریم:

$$x \notin C \Rightarrow \exists H_x \qquad s.t. \qquad x \notin H_x.$$

یعنی $C \subseteq \bigcap_{x\notin C} H_x$. □

نتیجه ۱۵.۱.۱. *اگر C یک زیرمجموعهٔ محدب بسته از فضای باناخ جدایی پذیر E باشد، آنگاه C اشتراک تعداد شمارا نیم فضاهای بستهٔ محمل آن است.*

برهان. فرض کنید $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ (زیر مجموعه های باز هر فضای جدایی پذیر، جدایی پذیر است.) زیرمجموعهٔ چگال $E \setminus C$ و d_n فاصله x_n تا C باشد. با به کار بردن قضیهٔ جداسازی (۲.۱.۱) برای دو زیرمجموعهٔ از هم جدای C و $\{x_n + d_n B_E\}$ و سپس با استفاده از قضیهٔ ۱۰.۱.۱ برای C و $\{x_n + ۲^{-۱} d_n B_E\}$ می توان $g_n \in E^*$ و $t_n \in C$ را طوری یافت که

$$r_n = g_n(t_n) = \sup g_n(C) < \inf g_n(x_n + ۲^{-۱} d_n B_E)\ ;\ (n = ۱, ۲, ...). \qquad (۱.۱)$$

حال فرض کنید $x \in E \setminus C$ و d فاصله x تا C باشد. x_n را طوری انتخاب کنید که $\|x - x_n\| < ۳^{-۱} d$ باشد، آنگاه برای $y \in C$ داریم:

$$\|y - x_n\| \geq \|y - x\| - \|x - x_n\| > d - ۳^{-۱} d = \frac{۲}{۳} d.$$

بنابراین $d_n \geq \frac{۲}{۳} d$ ، ودر نتیجه $\|x_n - x\| < ۲^{-۱} d_n$، و بنابر (۱.۱) خواهیم داشت:

$$r_n = \sup g_n(C) < g_n(x).$$

پس اگر $x \notin C$ آنگاه n ای هست که

$$x \notin g_n^{-۱}((-\infty, r_n])$$