دانشکده علوم پایه

عنوان:

حل عددی مسائل حساب تغییرات با مرزهای متحرک

استاد راهنما:

دکتر رضا معمارباشی

استاد مشاور:

دکتر محمد باقر کرامتی

نگارنده:

سارا قادری

اسفندماه ۱۳۸۸

Semnan University

Faculty of Science

Subject:

Numerical solution of variational problems with moving boundaries

Supervisor:

Dr. Reza Memarbashi

Advisor:

Dr. Mohammad Bagher keramati

by:

Sara Ghaderi

2010

چکیده

در این پایان نامه ابتدا مسائل حساب تغییرات با کران های متحرک و مسائل مقید مورد بررسی قرار می گیرند. سپس به حل این مسائل با روش های عددی می پردازیم. به عنوان اولین روش، روش آدومیان را بیان می کنیم که این روش، جواب تقریبی را به صورت یک سری از مؤلفه هایی که به طور بازگشتی محاسبه می شوند، بدست می آورد. محاسبه هر مؤلفه بر اساس مؤلفه های قبلی به عملیات محاسباتی زیادی نیاز داشته و زمان بر است. سپس روش تکرار تغییراتی هی ذکر می شود. این روش معایب روش آدومیان را ندارد. در ادامه روش اختلال هموتوپی را بیان می کنیم. پس از آن ترکیب روش اختلال هموتوپی را با روش تابع گرین ذکر می کنیم که مزیت آن کارایی بیشتر و خطای کمتر نسبت به روش اختلال هموتوپی است. همچنین به بیان روش تداخل تغییراتی هموتوپی می پردازیم که ترکیبی از دو روش اختلال هموتوپی و تکرار تغییراتی است. این روش تمامی فواید روش تکرار تغییراتی را دارد و از سرعت همگرایی بیشتری نسبت به آن برخوردار است. تمامی روش های گفته شده در بالا، برای مسائل خطی و غیرخطی حساب تغییرات کاربرد دارند.

در پایان روش انطباق بیان می شود که حالت خاصی از روش شوتینگ برای مسائل خطی حساب تغییرات است.

واژه های کلیدی: حساب تغییرات – کران متحرک – مسائل مقید – آدومیان – تکرار تغییراتی – اختلال – تابع گرین – انطباق

فهرست مندرجات

فصل ۱

حساب تغییرات

در این فصل مقدماتی برای آشنایی با مسائل حساب تغییرات بیان می شود، سپس به بحث در مورد مسائل حساب تغییرات با مرزهای متغیر و همچنین مسائل مقید می پردازیم. در ادامه به بحث در مورد یافتن معادله اویلر لاگرانژ و شرایطی که روی این معادله اعمال می شود (شرایط مرزی طبیعی و شرایط تقاطعی) می پردازیم.

۱.۱ فضای خطی نرم دار و فضای باناخ

تعریف ۱.۱.۱ فضای خطی نرم دار[۱] فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرم دار نامیم اگر به ازای هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\| x \|$، به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که
۱) به ازای هر x و y در X

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

۲) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، آن گاه

$$\| \alpha x \| = | \alpha | . \| x \|$$

۳) $\| x \| = 0$ تساوی $x = 0$ را ایجاب کند و بالعکس.

تعریف ۲.۱.۱ فضای باناخ [۲] تعریف بالا نشان می دهد که هر فضای خطی نرم دار را می توان یک فضای متری در نظر گرفت (فاصله x و y مساوی $x - y$ است). فضای باناخ یک فضای خطی نرم دار است که با متر تعریف شده به وسیله نرم آن، تام باشد(هر دنباله کشی در آن همگرا باشد). ساده ترین فضای باناخ خود میدان مختلط با نرم $\| x \| = | x |$ می باشد.

۲.۱ مقدمه ای بر حساب تغییرات

تعریف ۱.۲.۱ تابعک [۳] فرض می کنیم Ω فضایی از توابع باشد. تابعک J تناظری است که به هر تابع $y \in \Omega$، یک عدد حقیقی را نسبت می دهد.

---

[۱] Normed linear space
[۲] Banach space
[۳] Functional

ساده ترین شکل یک مسئله حساب تغییرات به صورت زیر است

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))dx \tag{۱—۱}$$

می خواهیم می نیمم تابعک $J(y)$ را بیابیم. مقدار ماکزیمم یا می نیمم انتگرال فوق، اکسترمم یا مقدار ایستای انتگرال نامیده می شود. منحنی که مقدار انتگرال فوق را اکسترمم می سازد، منحنی اکسترمال نامیده می شود.

تابعک J بوسیله دو نوع از شرایط مرزی می تواند تعریف شود. نوع اول، مسائل با مقدار مرزی ثابت‌اند و تابع قابل قبول $J(y)$ باید در شرایط مرزی زیر صدق کند

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 \tag{۲—۱}$$

در نوع دوم که آن را مسائل با کران های متحرک می نامیم و در مورد آن بحث می کنیم، مسائلی از حساب تغییرات هستند که حداقل یکی از نقاط مرزی قابل قبول تابع در راستای منحنی مرزی قابل حرکت باشد.

مسائل حساب تغییراتی که نقطه شروع و پایان آن ها معین است را اغلب مسائل نقطه ـ نقطه و همچنین مسائل با کران متحرک را مسائل نقطه ـ منحنی، منحنی ـ نقطه و منحنی ـ منحنی می نامند.

مسائل مقید نیز نوعی از مسائل حساب تغییرات با کران های ثابت هستند که تابع قابل قبول $J(y)$ علاوه بر صدق کردن در شرایط مرزی (۱—۲)، می بایست در شرط دیگری نیز صدق کند.

۱.۲.۱ معادله اویلر — لاگرانژ

در مسئله (۱—۱) هدف ما تعیین توابع $y \in C^2[x_0, x_1]$ است که در آن J مقدار اکسترمم خودرا داراست و در آن f تابعی است که به x و y و y' وابسته بوده و حداقل دارای مشتقات جزئی پیوسته از مرتبه دوم است. فرض کنیم

$$S = \{y \in C^2[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}, \tag{۳—۱}$$

و

$$H = \{\eta \in C^{۲}[x_{\circ}, x_{۱}] : \eta(x_{\circ}) = \eta(x_{۱}) = \circ\}. \qquad (۱-۴)$$

اگر فرض کنیم J در y ماکسیمم موضعی داشته باشد، آن گاه $\varepsilon > \circ$ ای وجود دارد به طوری که برای تمام $\hat{y}$ هایی که $\hat{y} \in S$ و $\|\hat{y} - y\| < \varepsilon$ داشته باشیم: $J(\hat{y}) - J(y) \leq \circ$. برای $\hat{y} \in S$، $\eta \in H$ ای وجود دارد به طوری که $\hat{y} = y + \varepsilon\eta$، و برای ε کوچک طبق قضیه تیلور داریم

$$f(x, \hat{y}, \hat{y}') = f(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') = f(x, y, y') + \varepsilon\{\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'}\} + O(\varepsilon^{۲})$$

حال

$$J(\hat{y}) - J(y) = \int_{x_{\circ}}^{x_{۱}} f(x, \hat{y}(x), \hat{y'}(x))dx - \int_{x_{\circ}}^{x_{۱}} f(x, y(x), y'(x))dx$$

$$= \int_{x_{\circ}}^{x_{۱}} \{(f(x, y(x), y'(x)) + \varepsilon\{\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'}\} + o(\varepsilon^{۲})) - f(x, y(x), y'(x))\}dx$$

$$= \varepsilon\int_{x_{\circ}}^{x_{۱}} (\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'})dx + o(\varepsilon^{۲})$$

$$= \varepsilon\delta J(\eta, y) + o(\varepsilon^{۲}). \qquad (۱-۵)$$

که در آن $\delta J(\eta, y) = \int_{x_{\circ}}^{x_{۱}} (\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'})dx$. برای ε کوچک علامت $J(\hat{y}) - J(y)$ با علامت $\delta J(\eta, y)$ تعیین می شود مگر این که برای همه $\eta \in H$ ها $\delta J(\eta, y) = \circ$. برای این که $J(y)$ در S ماکسیمم موضعی داشته باشد $J(\hat{y}) - J(y)$ در $\hat{y} \in S$ که $\|\hat{y} - y\| < \varepsilon$ نباید تغییر علامت دهد. لذا باید برای تمام $\eta \in H$ ها داشته باشیم

$$\delta J(\eta, y) = \circ. \qquad (۱-٦)$$

برای مینیمم موضعی نیز می توان مانند بالا بحث کرد. اگر (۱—٦) برقرار باشد می گوییم که J در y اکسترمال دارد (ممکن است J اکسترمم موضعی نداشته باشد.).
η' در معادله (۱—٦) را می توان به صورت زیر حذف کرد.

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} dx = \eta \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) dx = - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) dx$$

که در آن از شرط های $\eta(x_0) = 0$ و $\eta(x_1) = 0$ استفاده شده است. لذا معادله (۱−۶) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta \{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'} \} dx = 0. \tag{۱−۷}$$

داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'} y''$$

و تابع f داده شده حداقل دارای دو مشتق پیوسته است. می دانیم برای $y \in \mathbf{C}^2[x_0, x_1]$ ثابت، تابع $E : [x_0, x_1] \to \mathbf{R}$ که به صورت زیر تعریف می شود، در بازه $[x_0, x_1]$ پیوسته است.

$$E(x) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})$$

در این جا برای y داده شده مشتقات جزئی E را در نقطه $(x, y(x), y'(x))$ محاسبه می کنیم. در واقع E را می توان به عنوان عضوی از فضای هیلبرت $L^2[x_0, x_1]$ در نظر گرفت و تا زمانی که $\eta \in H$ هم در $L^2[x_0, x_1]$ باشد، ما با دانستن این که (۱−۷) برای هر $\eta \in H$ با ضرب داخلی زیر معادل است، می توانیم قیاس نزدیک تری را در حالت بعد متناهی انجام دهیم.

$$\langle \eta, E \rangle = \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) E(x) dx = 0 \tag{۱−۸}$$

لم ۲.۲.۱ فرض کنید α و β دو عدد حقیقی باشند به طوری که $\alpha < \beta$. در این صورت تابعی مانند $V \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R})$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in (\alpha, \beta)$، $V(x) > 0$ و برای هر $x \in \mathbf{R} - (\alpha, \beta)$، $V(x) = 0$.

اثبات: فرض کنید

$$V(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^3 (\beta - x)^3, & if x \in (\alpha, \beta) \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

کافی است پیوستگی مشتق دوم V در $x = \alpha$ و $x = \beta$ بررسی شود، چون V دیگر شرایط لم را به وضوح دارا است.

$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{V(x) - V(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \to \alpha^+} \frac{(x-\alpha)^3 (\beta - x)^3 - 0}{x - \alpha} = \lim_{x \to \alpha^+} (x - \alpha)^2 (\beta - x)^3 = 0,$$

و

$$\lim_{x\to\alpha^-}\frac{V(x)-V(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha^-}\frac{۰-۰}{x-\alpha}=۰.$$

بنابراین $V'(\alpha)=۰$. به طور مشابه

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{V'(x)-V'(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha^+}\frac{۳(x-\alpha)^۲(\beta-x)^۲(\beta+\alpha-۲x)-۰}{x-\alpha}$$

$$=\lim_{x\to\alpha^+}۳(x-\alpha)(\beta-x)^۲(\beta+\alpha-۲x)=۰,$$

و

$$\lim_{x\to\alpha^-}\frac{V'(x)-V'(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha^-}\frac{۰-۰}{x-\alpha}=۰.$$

لذا $V''(\alpha)=۰$. مشابه بحث بالا می توان نشان داد که $V''(\beta)=۰$.
مشتق مرتبه دوم هم به صورت زیر است

$$V''(x)=\begin{cases} ٦(x-\alpha)(\beta-x)\{(x-\alpha)^۲(\beta-x)^۲-۳(x-\alpha)(\beta-x)\}, & if x\in(\alpha,\beta)\\ ۰, & otherwise.\end{cases}$$

و واضح است که

$$\lim_{x\to\alpha}V''(x)=V''(\alpha)=۰$$

و

$$\lim_{x\to\beta}V''(x)=V''(\beta)=۰$$

در نتیجه $V\in\mathbf{C}^۲(\mathbf{R})$ است.

لم ۳.۲.۱ فرض کنید $g:[x_۰,x_۱]\to\mathbf{R}$ تابعی پیوسته باشد و برای هر $\eta\in H$ داشته باشیم $\langle\eta,g\rangle=۰$. دراین صورت روی بازه $[x_۰,x_۱]$ داریم $g=۰$.
اثبات: فرض کنید برای بعضی $c\in[x_۰,x_۱]$ ها داشته باشیم $g\neq۰$. بدون از دست دادن کلیت

می توان فرض کرد که $c \in (x_0, x_1)$ ای وجود دارد به طوری که $g(c) > 0$. از آن جا که g روی $[x_0, x_1]$ پیوسته است، اعداد α و β ای وجود دارند به طوری که $x_0 < \alpha < c < \beta < x_1$ و برای $x \in (\alpha, \beta)$، $g(x) > 0$ است. لم ۲.۲.۱ نشان می دهد که تابعی مانند $V \in \mathbf{C}^2[x_0, x_1]$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in (\alpha, \beta)$، $V(x) > 0$ و برای هر $x \in [x_0, x_1] - (\alpha, \beta)$، $V(x) = 0$.
بنابراین $V \in H$ و

$$\langle V, g\rangle = \int_{x_0}^{x_1} V(x)g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} V(x)g(x)dx > 0,$$

که با فرض این که برای هر $\eta \in H$ داریم $\langle \eta, g\rangle = 0$ متناقض است. لذا روی (x_0, x_1)، $g = 0$ و با در نظر گرفتن پیوستگی g می توان گفت که روی بازه $[x_0, x_1]$ داریم: $g = 0$.

نتیجه بالا نشان می دهد که اگر y اکسترمال J باشد، آن گاه برای هر $x \in [x_0, x_1]$ داریم $E = 0$.
پس قضیه زیر را داریم.

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنید $J : \mathbf{C}^2[x_0, x_1] \to \mathbf{R}$ تابعکی به فرم زیر باشد

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx$$

که در آن f دارای مشتقات جزئی پیوسته از مرتبه دوم باشد که به x و y و y' وابسته است و $x_0 < x_1$. قرار دهید

$$S = \{y \in \mathbf{C}^2[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$$

که y_0 و y_1 اعداد حقیقی داده شده اند. اگر $y \in S$ اکسترمالی برای J باشد، آن گاه برای هر $x \in [x_0, x_1]$ داریم

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \qquad (۱-۹)$$

معادله (۱–۹) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (معمولاً غیرخطی) است که معادله اویلر – لاگرانژ نامیده می شود.
برای مسئله نقطه ـ نقطه باید معادله اویلر ـ لاگرانژ در شرایط مرزی (۱–۲) صدق کند.
در این جا به بحث در مورد مسائل مقید و مسائل با کران متحرک می پردازیم.

۲.۲.۱ مسائل با کران های متحرک

برای مسائل با کران های متحرک، دو حالت داریم:
حالت اول: به عنوان حالت اول، مسائلی را که حداقل یکی از نقاط مرزی آزادانه در امتداد یک خط موازی با محور y حرکت می کند، بررسی می کنیم. در حقیقت در این نقطه $y(x)$ مشخص نیست. نشان خواهیم داد که در این حالت توابع قابل قبول باید در شرایط مرزی طبیعی(۱—۱۶) و (۱—۱۷) (یا یکی از این دو) صدق کنند.
حالت دوم: برای حالت دوم، به نقاط شروع و پایان (یا فقط یکی از این دو) اجازه می دهیم تا روی منحنی های داده شده $y = \phi(x)$ (و $y = \varphi(x)$) آزادانه حرکت کند. در این حالت تابع قابل قبول $y(x)$ و نقاط a و b (یا یکی از آنها) باید در شرایط لازم (۱—۴۶) صدق کنند که به آن ها شرایط تقاطعی گفته می شود.
فرض کنید $J : C^{۲}[x_{\circ}, x_{۱}] \to R$ یک تابعک به صورت $J(y) = \int_{x_{\circ}}^{x_{۱}} f(x, y(x), y'(x))dx$ باشد که در آن f تابعی هموار است.

مسائل با کران متحرک حالت اول

مسئله ما تعیین توابع $y \epsilon C^{۲}[x_{\circ}, x_{۱}]$ است که در آن J مقدار اکسترمم خود را داراست. هیچ شرط مرزی برقرار نیست. فرض کنید که J در y اکسترمم دارد. می توانیم با بررسی مقدار J دریک تابع نزدیک، مانند$\hat{y}$ پیش رویم. قراردهید: $\hat{y} = y + \varepsilon\eta$ به طوری که ε پارامتری با مقدار کوچک است و $\eta \in C^{۲}[x_{\circ}, x_{۱}]$. وقتی هیچ شرط مرزی اعمال نشود ممکن است η در نقاط انتهایی صفر نشود. بنابرآنچه که در قسمت قبل ذکر شد، $J(\hat{y}) - J(y)$ از مرتبه $\varepsilon^{۲}$ است به طوری که $\varepsilon \to \circ$. لذا داریم

$$\int_{x_{\circ}}^{x_{۱}} (\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'})dx = \circ \qquad (۱—۱۰)$$

با انتگرال گیری جزء به جزء جمله شامل η'، شرط زیر بوجود می آید

$$(\eta\frac{\partial f}{\partial y'})_{x_{\circ}}^{x_{۱}} + \int_{x_{\circ}}^{x_{۱}} \eta(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'})dx = \circ \qquad (۱—۱۱)$$

برای مسئله با نقاط انتهایی ثابت، جمله $\eta\frac{\partial f}{\partial y'}$ درنقاط انتهایی صفر می‌شود زیرا

$$\eta(x_{\circ}) = \eta(x_{۱}) = \circ$$

برای این مسئله، این جمله برای همهη های تحت بررسی صفر نخواهد شد. با وجود این معادله (۱$-$۱۱) باید برای همه $\eta \in C^{۲}[x_{۰}, x_{۱}]$ برقرار باشد مخصوصاً، درزیر ردهH از توابعی که در نقاط پایانی صفر می شوند. لذا طبق آنچه که در ۱.۲.۱ گفته شد برای هرy ای که J درآن دارای اکسترمم است داریم

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = ۰ \qquad (۱۲-۱)$$

معادله (۱$-$۱۱) می بایست برای همه $\eta \epsilon C^{۲}[x_{۰}, x_{۱}]$ برقرار باشد هرچند که این شامل توابعی است که در نقاط انتهایی صفر نمی شوند. در نتیجه معادلات (۱$-$۱۱) و (۱$-$۱۲) بر این دلالت دارند که برای همه $\eta \epsilon C^{۲}[x_{۰}, x_{۱}]$ داریم

$$(\eta\frac{\partial f}{\partial y'})_{x_{۱}} - (\eta\frac{\partial f}{\partial y'})_{x_{۰}} = ۰ \qquad (۱۳-۱)$$

همیشه می توان توابعی را در $C^{۲}[x_{۰}, x_{۱}]$ یافت که در$x_{۰}$ صفر شده ولی در $x_{۱}$ صفر نمی‌شوند. پس باید داشته باشیم

$$(\frac{\partial f}{\partial y'})_{x_{۱}} = ۰ \qquad (۱۴-۱)$$

به طور مشابه می توانیم توابعی را بیابیم که در $x_{۱}$ صفر می شوند ولی در $x_{۰}$ صفر نمی شوند. لذا شرط زیر نتیجه می شود

$$(\frac{\partial f}{\partial y'})_{x_{۰}} = ۰ \qquad (۱۵-۱)$$

به طور خلاصه، اگر J در $y \in C^{۲}[x_{۰}, x_{۱}]$ اکسترممی داشته باشد که شرایط مرزی ای برآن اعمال نشده باشد، آن گاه y باید در معادله اویلر $-$لاگرانژ همراه با معادلات (۱$-$۱۴) و (۱$-$۱۵) صدق کند. معادلات (۱$-$۱۴) و (۱$-$۱۵) روابطی شامل y ومشتقات آن در نقاط انتهایی هستند یعنی آنها شرایط مرزی اند. معادلات (۱$-$۱۴) و (۱$-$۱۵) را شرایط مرزی طبیعی نامیم.
پس قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۵.۲.۱ فرض کنید تابع $y_{۰} \in C^{۱}[a, b]$ یک مینیمم نسبی تابعک (۱$-$۱) باشد در صورتی که $y(a) = y_a$ داده شده باشد و $y(b)$ دلخواه باشد (نقطه پایانی آزاد باشد) یا $y(b)$ و $y(a)$ دلخواه

باشند (نقاط انتهایی آزادند.) در این صورت $y_\circ(x)$ به ترتیب در شرایط مرزی زیر صدق می کند

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(b, y_\circ(b), y'_\circ(b)) = \circ \qquad (۱—۱٦)$$

(در فرمول بالا نقطه پایانی آزاد است.)
یا

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(a, y_\circ(a), y'_\circ(a)) = \circ = \frac{\partial f}{\partial y'}(b, y_\circ(b)' y'_\circ(b)) \qquad (۱—۱۷)$$

(در فرمول بالا نقاط انتهایی آزادند.)

مسائل با کران متحرک حالت دوم

حال یک شکل تعمیم یافته از مسئله را مورد بررسی قرار می دهیم و به نقاط انتهایی اجازه می دهیم که بر روی منحنی های مشخصی حرکت کنند. در این روش ما به دنبال یک تابع $y(x)$ هستیم بطوریکه در $x = a$ روی منحنی $y = \psi(x)$ شروع شده و در $x = b$ روی منحنی $y = \varphi(x)$ خاتمه یافته و تابعک را مینیمم می سازد.
هم چنین در این مسئله نقاط a و b شناخته شده نیستند. این نقاط می بایست در شرایط لازمی که شرایط تقاطعی نامیده می شود صدق کنند، که در زیر توضیح داده خواهد شد:
فرض کنید $y : [x_\circ, x_1] \to \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد که توصیف کننده منحنی γ با نقاط انتهایی $P_\circ = (x_\circ, y_\circ)$ و $P_1 = (x_1, y_1)$ است، هم چنین $\hat{y} : [\hat{x}_\circ, \hat{x}_1] \to \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد که توصیف کننده منحنی $\hat{\gamma}$ با نقاط انتهایی $\hat{P}_\circ = (\hat{x}_\circ, \hat{y}_\circ)$ و $\hat{P}_1 = (\hat{x}_1, \hat{y}_1)$ است.
می خواهیم منحنی هایی را با هم مقایسه کنیم که به هم نزدیکند. اگرچه توابع y و $\hat{y}$ لزوماً بر روی یک بازه تعریف نمی شوند، اما می توانیم توابع y و $\hat{y}$ را طوری بسط دهیم که روی یک بازه تعریف شوند. فاصلهٔ میان y و $\hat{y}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$d(y, \hat{y}) = \|y - \hat{y}\| + |P_\circ - \hat{P}_\circ| + |P_1 - \hat{P}_1| \qquad (۱—۱۸)$$

که در آن

$$|P_k - \hat{P}_k| = \sqrt{(x_k - \hat{x}_k)^۲ + (y_k - \hat{y}_k)^۲} \qquad (۱—۱۹)$$

در اینجا $\|.\|$ نرمی است که به اقتضای مسئلهٔ مورد بررسی به صورت

$$\|y\| = \sup|y(x)|,\ x \in [\hat{x}_۰, \hat{x}_۱] \qquad (۱-۲۰)$$

یا

$$\|y\| = \sup|y(x)| + \sup|y'(x)|,\ x \in [\hat{x}_۰, \hat{x}_۱] \qquad (۱-۲۱)$$

تعریف می شود.

J را تابعکی به فرم زیر قرار دهید

$$J(y) = \int_{x_۰}^{x_۱} f(x, y, y')dx \qquad (۱-۲۲)$$

به طوری که f تابعی از x و y و y' باشد. حدود انتگرال گیری برای این تابعک به انتخاب تابع بستگی دارد. فرض کنید که J در y ایستا باشد. مختصراً این بدان معناست که $J(\hat{y}) - J(y) = o(\varepsilon^۲)$ هرگاه که $d(\hat{y}, y) = o(\varepsilon)$ که $\varepsilon \to ۰$.

فرض کنید $\hat{y} = y + \varepsilon\eta$ به طوری که $\eta \in C^۲[\tilde{x}_۰, \tilde{x}_۱]$

جدا از این شرط همواری، هیچ شرطی بر روی η قرار داده نشده است. ولی شرط $d(\hat{y}, y) = o(\varepsilon)$ نیازمند این است که مقادیر $\hat{y}_k - y_k$ و $\hat{x}_k - x_k$ از مرتبه ε باشد.

فرض کنید

$$\hat{x}_k = x_k + \varepsilon X_k\ ,\ k = ۰, ۱$$

$$\hat{y}_k = y_k + \varepsilon Y_k\ ,\ k = ۰, ۱ \qquad (۱-۲۳)$$

پس

$$J(\hat{y}) - J(y) = \int_{\hat{x}_۰}^{\hat{x}_۱} f(x, \hat{y}, \hat{y}')dx - \int_{x_۰}^{x_۱} f(x, y, y')dx = \int_{x_۰+\varepsilon X_۰}^{x_۱+\varepsilon X_۱} f(x, \hat{y}, \hat{y}')dx - \int_{x_۰}^{x_۱} f(x, y, y')dx$$

$$= \int_{x_۰}^{x_۱} (f(x, \hat{y}, \hat{y}') - f(x, y, y\prime))dx + \int_{x_۱}^{x_۱+\epsilon X_۱} f(x, \hat{y}, \hat{y}')dx - \int_{x_۰}^{x_۰+\varepsilon X_۰} f(x, \hat{y}, \hat{y}')dx \qquad (۱-۲۴)$$

اما

$$\int_{x_\circ}^{x_۱}(f(x,\hat{y},\hat{y}')-f(x,y,y'))dx=\varepsilon\{\eta\frac{\partial f}{\partial y'}|_{x_\circ}^{x_۱}+\int_{x_\circ}^{x_۱}\eta(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'})dx\}+o(\varepsilon^۲)$$

$$\int_{x_۱}^{x_۱+\varepsilon X_۱}(f(x,\hat{y},\hat{y}')dx=\varepsilon X_۱\ f(x,y,y')|_{x_۱}+o(\varepsilon^۲)$$

$$\int_{x_\circ}^{x_\circ+\varepsilon X_\circ} f(x,\hat{y},\hat{y}')dx=\varepsilon X_\circ\ f(x,y,y')|_{x_\circ}+o(\varepsilon^۲)$$

(۱—۲۵)

بنابراین داریم

$$J(\hat{y})-J(y)=\varepsilon\{\eta\frac{\partial f}{\partial y'}|_{x_\circ}^{x_۱}+\int_{x_\circ}^{x_۱}\eta(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'})dx\}+X_۱ f(x,y,y')|_{x_۱}-X_\circ f(x,y,y')|_{x_\circ}\}$$

$$+o(\varepsilon^۲) \qquad (۱—۲۶)$$

تغییرات در نقطه انتهایی $(x_\circ,y_\circ)$ باید در شرط سازگاری زیر صدق کند

$$\hat{y}=y(\hat{x}_\circ)=y(x_\circ+\varepsilon X_\circ)+\varepsilon\eta(x_\circ+\varepsilon X_\circ)=y_\circ+\varepsilon Y_\circ \qquad (۱—۲۷)$$

چون

$$y(x_\circ+\varepsilon X_\circ)+\varepsilon\eta(x_\circ+\varepsilon X_\circ)=y(x_\circ)+\varepsilon X_\circ y'(x_\circ)+\varepsilon\eta(x_\circ)+o(\varepsilon^۲) \qquad (۱—۲۸)$$

داریم

$$\eta(x_\circ)=Y_\circ-X_\circ\ y'(x_\circ)+o(\varepsilon) \qquad (۱—۲۹)$$

به طور مشابه در نقطه انتهایی دیگر

$$\eta(x_۱)=Y_۱-X_۱\ y'(x_۱)+o(\varepsilon) \qquad (۱—۳۰)$$

با جایگذاری روابط (۱—۲۹) و (۱—۳۰) در (۱—۲۶) داریم

$$J(\hat{y})-J(y)=\varepsilon\{\eta\tfrac{\partial f}{\partial y'}|_{x_\circ}^{x_۱}+\int_{x_\circ}^{x_۱}\eta(\tfrac{\partial f}{\partial y}-\tfrac{d}{dx}\tfrac{\partial f}{\partial y'})dx+Y_۱\tfrac{\partial f}{\partial y'}|_{x_۱}-Y_\circ\tfrac{\partial f}{\partial y'}|_{x_\circ}+X_۱(f-y'\tfrac{\partial f}{\partial y'})|_{x_۱}$$

$$-X_\circ(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'})|_{x_\circ}\}+o(\varepsilon^۲) \qquad (۱—۳۱)$$

تابعک J در y ایستا است (در بخش ۳.۳ در این مورد بیشتر توضیح داده خواهد شد.) و بدین منظور جملات مرتبه ε باید برای همه تغییرات در عبارت بالا صفر باشند. برای حصول این منظور می توان تغییراتی نظیر $X_k = Y_k = 0$ را انتخاب کرد (یعنی تغییرات نقاط پایانی ثابت).
در مجموع y باید در شرط نقطه انتهایی زیر برقرار باشد

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (۱-۳۲)$$

بعلاوه y باید در شرط نقاط انتهایی زیر صدق کند

$$P\delta y - H\delta x|_{x_0}^{x_1} = 0 \qquad (۱-۳۳)$$

که در آن

$$P = \frac{\partial f}{\partial y'},\ H = y'P - f$$

و برای $k = 0, 1$ توابع δx و δy را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\delta y(x_k) = Y_k, \delta x(x_k) = X_k$$

مسائل حساب تغییرات همراه با روابطی به فرم زیر می آیند

$$g_k(x_j, y_j) = 0,\quad j = 1, 2 \qquad (۱-۳۴)$$

در نتیجه تغییرات نقطه انتهایی (x_0, y_0) به تغییرات (x_1, y_1) وابسته نیست. در این حالت، همیشه می توانیم تغییراتی را به حساب آوریم که یک نقطه انتهایی را ثابت نگه دارد و این موضوع شرایط زیر را نتیجه می دهد

$$P\delta y - H\delta x|_{x_0} = 0,\ P\delta y - H\delta x|_{x_1} = 0 \qquad (۱-۳۵)$$

از نظر هندسی در چنین روابطی نقطهٔ انتهایی (x_k, y_k) روی منحنی ای که بوسیلهٔ معادلهٔ ضمنی $g(x_k, y_k)$ تعریف شده است، قرار می گیرد.
باید به یاد داشته باشیم که به طور کلی، برخی روابط باید میان نقاط پایانی برقرار شوند تا با شرایط مرزی سازگار شوند.

فرض کنید که هیچ رابطه ای روی نقاط پایانی اعمال نشده است. قطعاً معادلات (۱—۳۵) برقرار شده اند ولی چون δx و δy در هر نقطهٔ انتهایی مستقل و دلخواه‌اند، آن گاه در هر نقطه انتهایی خواهیم داشت

$$H = 0,\ P = 0$$

از این رو شرایط مرزی زیر را داریم

$$f = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \qquad (۱—۳۶)$$

که باید در هر نقطه انتهایی برقرار شوند. وقتی اکسترمالی در معادلهٔ اویلر—لاگرانژ و شرط مرزی (۱—۳۶) صدق کند، بر این دلالت دارد که

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y} dx = 0 \qquad (۱—۳۷)$$

بعلاوه می دانیم که

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x}$$

از این رو شرایط مرزی (۱—۳۶) رابطهٔ زیر را خواهد داد

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x} dx = 0 \qquad (۱—۳۸)$$

معادلات (۱—۳۷) و (۱—۳۸) محدودیت های اضافی را مطرح می کنند که عموماً با معادلات اویلر—لاگرانژ سازگار نیستند. مثلاً فرض کنید که f صریحاً به x وابسته نیست. پس می دانیم که در هر اکسترمالی H ثابت است.

وقتی H در نقاط انتهایی برابر صفر باشد، آنگاه برای همه x ها داریم $H = 0$ از این رو

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = 0 \qquad (۱—۳۹)$$

رابطه بالا بیان می کند که f باید به فرم $f(y, y') = A(y)y'$ باشد. در نهایت باید به یاد داشته باشیم که مباحث بالا می توانند برای اعمال بر تابعک هایی که به متغیرهای وابسته مختلفی بستگی دارند،