بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش محض

مرکزوار جبرهای لی افاین تعمیم یافته و جبرهای لی مدرج شده توسط سیستم ریشه

استاد راهنما:

دکتر سعید اعظم

استاد مشاور:

دکتر محمد رضا پوریای ولی

پژوهشگر:

محسن کریمی خرمی

۱۳۸۷ /۹/ ۲۳

اسفند ماه ۱۳۸۶

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض آقای محسن کریمی خرمی

تحت عنوان:

مرکز وارجبرهای لی آفین تعمیم یافته جبرهای لی مدرج شده توسط ریشه ها

در تاریخ ...۸۶/۱۲/۸..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......بسیار خوب...... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر سعید اعظم با مرتبه علمی استاد امضاء

۲- استاد مشاور پایان نامه دکتر محمدرضا پوریای ولی با مرتبه علمی دانشیار امضاء

۳- استاد داور داخل گروه دکتر ملیحه یوسف زاده با مرتبه علمی استادیار امضاء

۴- استاد داور خارج گروه دکتر ولی ا.. شاه سنایی با مرتبه علمی استادیار امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

بنام آنکه در یک ذره جان داد   در آن ذره نظم یک جهان داد

تقدیم به ستاره های پر فروغ آسمان زندگیم:

پدر و مادر فداکار،

همسر و فرزند عزیز،

برادران و خواهران دوست داشتنی ام.

بنام خدا

« ستایش خداوندی را سزاست که از نسبت قطر به محیط دایره آگاه است واندازه هر مرکب و بسیط را می شناسد و آفریننده ی زمین و آسمانها و قرار دهنده ی نور در تاریکی است. در آفرینش آحاد یگانه است و در به هم پیوستن اعداد گوناگون بی همتاست. درورد و سلام بر محمد مصطفی که مرکز دایره ی رسا لت و محیط اقطار راهنمایی و دادگری است و بر خاندان و یاران پاک او باد.»[1]

آغاز سخن خدای را شاکرم که توفیقی عطا فرمود تا بتوانم رساله ی حاضر را به انجام برسانم. اما در این راه پر فراز و نشیب اگر حمایت و همفکری عده ای نبود نمی توانستم کار را با رضایتمندی کامل به انجام برسانم :

جا دارد از پدر و مادرم به خاطر هر چه که دارم و برای به دست آوردن آنها تلاش کرده ام تشکر کنم که اگر دعای خیر آنها نبود نمی توانستم قدمی پیش بگذارم. از همسر فداکارم سپاسگذارم که اگر حمایت و همگامی او با من در تمام ساعات و لحظه هایی که کتاب و درس را به با او بودن ترجیح می دادم نبود نمی توانستم معادله ای از این علم زیبا را حل نمایم. از استادانم ستاره های درخشانی که در شب های زندگیم درخشیدند تا راه را پیدا کنم و در ظلمات نادانی و گمراهی غرق نشوم متشکرم. به ویژه از استاد ارجمندم جناب آقای پروفسور سعید اعظم که در این راه فراتر از یک استاد همانند پدری دلسوز در کنارم بوده اند و مرا الفبای آموختن، فهمیدن و دانستن سر مشق داده اند سپاسگذاری می نمایم. مدیون نفسهای مسیحایی او هستم که در کالبد زمینی من روح آسمانی علم و دانش دمید تا بتوانم در این سالها با ریاضی زندگی کنم و این رساله را که حاصل تمام تلاشهاست پیش روی شما تقدیم نمایم.

به درستی می توان گفت زندگی بدون علم ریاضی امری محال و غیر ممکن است و این علم جایگاه اصلی و واقعی خود را در زندگی بشر پیدا کرده است. ریاضی بازتابی از طبیعت و جهان اطراف ما است و احتمالاً بسیاری از پدیده های دنیا را می توان به زبان ریاضی توصیف کرد. ریاضیات زیباست و به لحاظ زیبایی که دارد به زندگی بشر هدف، انگیزه و ایمان بخشیده است. شاید بتوان گفت تکامل هر ایمان در گرو شناخت راز و رمزهای ریاضی وار پدیده های جهان خلقت است.

---

[1] . رساله محیطیه قیاس الدین جمشید کاشانی

چکیده

هدف از این پایان نامه بررسی مرکزوار جبرهای لی مدرج شده توسط سیستم های ریشه می باشد. دلیل اهمیت این موضوع از تحقیقات روی جبرهای لی افاین تعمیم یافته ناشی می شود. جبرهای لی افاین تعمیم یافته تعمیم طبیعی جبرهای لی افاین و ترویدال می باشند که نقش اساسی در قسمتهای مختلف ریاضی و فیزیک ایفا می کنند. مرکزوارها همچنین به صورت طبیعی در بررسی مشتقهای یک جبر ظاهر می شوند. در واقع تبدیلات خطی مرکزواری در ساختن مشتق های یک جبر استفاده می شوند. هدف از این پژوهش این است که ضمن بررسی نتایج در دسترس، این نتایج را جهت تشخیص مرکزوار خانواده هایی از جبرهای لی که اغلب نامتناهی اند (جبرهای لی افاین تعمیم یافته، جبرهای حلقوی، جبرهای لی مدرج شده توسط سیستم های ریشه ی متناهی و جبرهای لی کز - مودی) به کار بریم .

واژه های کلیدی: مرکزوار، جبرهای لی، جبرهای لی افاین تعمیم یافته، جبرهای لی مدرج شده توسط سیستم های ریشه متناهی.

فهرست مندرجات

ب

مقدمه

مرکزوار یک جبر $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{K}$ که آن را با $Cent_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Cent_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}) = \{T \in End_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}) : T(xy) = T(x)y = xT(y) \quad (\text{برای هر } x, y \in \mathcal{A})\}.$$

به ویژه اگر $\mathcal{L}$ یک جبر لی باشد مرکزوار آن به شکل زیر در می آید

$$Cent_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) = \{T \in End_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) : T[x,y] = [T(x), y] = [x, T(y)] \quad (\text{برای هر } x, y \in \mathcal{L})\}.$$

اهمیت مرکزوار از تحقیقات روی جبرهای لی افاین تعمیم یافته (که تعمیم طبیعی جبرهای لی افاین و ترویدال می‌باشند) ناشی می‌شود. در طبقه بندی جبرهای لی افاین تعمیم یافته عناصر مرکزوار در ساخت قسمتی از جبر که در خارج از هسته قرار دارد ضروری می‌باشند. این قسمت از تباهیده شدن مرکز جبر لی تحت فرم دو خطی پایای متقارن موجود روی جبر جلوگیری می‌کند، بنابراین برای طبقه بندی جبرهای لی افاین تعمیم یافته مرکزوار نقش مهمی دارد. جای دیگری که مرکزوار به صورت طبیعی ظاهر می‌گردد در بررسی مشتق های یک جبر است. اگر T یک عنصر از مرکزوار $\mathcal{L}$ باشد و D یک مشتق $\mathcal{L}$ باشد TD نیز یک مشتق است، بنابراین تبدیلات خطی مرکزواری می‌تواند در ساختن مشتق های یک جبر استفاده گردد.

این پایان نامه در سه فصل تنظیم شده است:

فصل اول با عنوان مرکزوار جبرها در سه بخش ارایه می‌شود. در بخش اول ابتدا مرکزوار یک جبر دلخواه $\mathcal{A}$ روی حلقه‌ی یکدار، جابجایی و شرکت پذیر $\mathbb{K}$ را تعریف نموده و چند لم در مورد آن بیان و اثبات می‌کنیم. در این بخش از مراجع [۱۸]، [۲۰]، [۲۱] و [۲۲] استفاده شده است. بخش دوم به بررسی مرکزوار جبرهای مدرج اختصاص داده شده است. در این بخش ابتدا چند نتیجه و مفهوم از تئوری جبرهای مدرج و مدولهای مدرج یادآوری می‌کنیم و سپس در مورد مرکزوار این نوع جبرها

بحث خواهیم کرد. در این بخش از مراجع [۱۳] و [۲۷] استفاده می‌کنیم. در بخش سوم مرکزوار ضربهای تانسوری و جبرهای پیچشی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این بخش مرکزوار ضرب تانسوری جبرها و ضرب تانسوری مرکزوار جبرها را بیان و ارتباط بین آن ها را به دست می‌آوریم. در این بخش از مراجع [۵]، [۶]، [۷]، [۱۳]، [۱۷]، [۲۲] و [۳۶] استفاده شده است.

فصل دوم در سه بخش تنظیم شده است. در بخش اول جبرهای لی را روی یک میدان $\mathbb{K}$ در نظر می‌گیریم. در این بخش ابتدا زیرجبر تورال از یک جبر لی را تعریف نموده و ثابت می‌کنیم این زیرجبر همواره آبلی است. در بخش دوم جبرهای لی تعریف شده روی یک میدان $\mathbb{K}$ با مشخصه‌ی صفر را در نظر می‌گیریم. ابتدا تاریخچه‌ی کوتاهی از این نوع جبرها بیان نموده و چند تعریف پایه را می‌آوریم، سپس به بررسی مرکزوار این جبرها می‌پردازیم. در این بخش از مراجع [۱۹] و [۲۳] استفاده می‌کنیم. در بخش سوم ابتدا مقدماتی را در مورد جبرهای لی مدرج شده توسط سیستم‌های ریشه بیان کرده و چند نتیجه مربوط به مرکزوار جبرهای یک زیرکلاس از کلاس جبرهای لی مدرج شده توسط سیستم‌های ریشه را بررسی می‌کنیم، سپس نوع خاصی از این جبرها را که چنبره‌های لی نامیده می‌شوند بررسی نموده و مرکزوار آنها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. دلیل توجه ما به چنبره‌های لی این است که این جبرها در تئوری جبرهای لی افاین تعمیم یافته نقش مهمی را ایفا می‌کنند. در این بخش از مراجع [۷]، [۱۱]، [۱۵]، [۱۸]، [۲۵]، [۳۷] و [۳۸] استفاده شده است.

فصل سوم که با عنوان مرکزوار جبرهای لی افاین تعمیم یافته و هسته‌ی آنها است شامل یک بخش است. در این فصل ثابت می کنیم هسته‌ی یک جبر لی افاین تعمیم یافته رام، مرکزی است و از این طریق مرکزوار آن قابل شناسایی است. در ادامه چند نکته در مورد توسیع‌های مرکزی و ۲-هم دورها یادآوری می‌نماییم. در طول این فصل جبرهای لی را روی یک میدان دلخواه $\mathbb{K}$ در نظر می‌گیریم. در این فصل از مراجع [۱]، [۴]، [۱۶]، [۲۳]، [۲۶] و [۳۹] استفاده می کنیم.

فصل ۱

مرکزوار جبرها

۱—۱ چند نتیجه کلی

ابتدا مقدماتی درمورد مرکزوار[۱] جبرهایی که لزوماً جبر لی، شرکت پذیر و غیره نیستند را بیان می کنیم. در این پایان نامه کلیه‌ی جبرها روی حلقه های یکدار، جابجایی و شرکت پذیر در نظر گرفته می شوند. اثبات نتایج ذکر شده در این بخش عمدتاً ازمرجع [۱۸] برای جبرهای با بعد متناهی و از مرجع [۲۱] در حالت کلی می باشند. در این بخش، $\mathcal{A}$ یک جبر دلخواه روی یک حلقه یکدار، جابجایی و شرکت پذیر $\mathbb{K}$ و $\mathcal{L}$ یک جبر لی روی میدان $\mathbb{F}$ می باشد، مگر اینکه به طور صریح چیز دیگری قید شده باشد.

تعریف ۱.۱ : فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر دلخواه روی یک حلقه‌ی یکدار، جابجایی و شرکت پذیر $\mathbb{K}$ باشد و $End_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ فضای برداری تبدیلات خطی روی $\mathcal{A}$ باشد، دراین صورت مرکزوار $\mathcal{A}$ طبق تعریف عبارت است از :

$$Cent(\mathcal{A}) = \{\mathcal{X} \in End_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}) : \quad \mathcal{X}(ab) = a\mathcal{X}(b) = \mathcal{X}(a)b \qquad (\text{برای هر } a, b \in \mathcal{A})\}.$$

---

[۱] centroid

هر گاه تأکید بر وابستگی به $\mathbb{K}$ مهم باشد به جای $Cent(\mathcal{A})$ می نویسیم $Cent_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ و به جای $End(\mathcal{A})$ می نویسیم $End_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$. برای سه عنصر $a, b, c \in \mathcal{A}$ قرار می دهیم

$$(a, b, c) := (ab)c - a(bc).$$

تعریف ۲.۱ : عنصر $z \in \mathcal{A}$ را مرکزی[۲] گوییم هر گاه برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ در دو شرط $za = az$ و $(a, b, z) = (z, a, b) = (a, z, b) = 0$ صدق کند. مجموعه عناصر مرکزی $\mathcal{A}$ را با $Z(\mathcal{A})$ نشان داده و آن را مرکز[۳] $\mathcal{A}$ می نامیم.

تعریف ۳.۱ : اگر $\mathcal{A}$ یک جبر روی $\mathbb{K}$ و $\mathcal{S}$ زیر فضایی از آن باشد، مرکزساز[۴] $\mathcal{S}$ در $\mathcal{A}$ متشکل از عناصری از $\mathcal{A}$ است که با تمام عناصر $\mathcal{S}$ جابجا می شوند. مرکزساز $\mathcal{S}$ در $\mathcal{A}$ را با $C_{\mathcal{A}}(\mathcal{S})$ نشان می دهیم.

فرض کنیم $Mult(\mathcal{A})$ زیر جبری یکدار از $End_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ است که توسط $\{1, a_L, a_R : a \in \mathcal{A}\}$ تولید می شود که در آن a_L و a_R به ترتیب تبدیلات خطی به دست آمده بوسیله‌ی ضرب از راست و چپ توسط عنصر a است، در این صورت لم زیر را خواهیم داشت.

لم ۱.۱ : $Cent(\mathcal{A})$ برابر با مرکز ساز جبر $Mult(\mathcal{A})$ در$End(\mathcal{A})$ می باشد. یا به عبارتی

$$Cent(\mathcal{A}) = C_{End(\mathcal{A})}(Mult(\mathcal{A})).$$

اثبات: ابتدا ثابت می کنیم هر عضو $Cent(\mathcal{A})$ با هر عضو از $Mult(\mathcal{A})$ جابجا می شود. فرض کنیم $a, b \in \mathcal{A}$ و $\mathcal{X} \in Cent(\mathcal{A})$ عناصر دلخواهی باشند، دراین صورت داریم

$$(\mathcal{X}a_L)(b) = \mathcal{X}(a_L(b)) = \mathcal{X}(ab) = a\mathcal{X}(b) = (a_L\mathcal{X})(b),$$

[۲] central

[۳] centre

[۴] centralizer

پس $a_L\mathcal{X} = \mathcal{X}a_L$ و بطور مشابه $a_R\mathcal{X} = \mathcal{X}a_R$، در نتیجه هر عنصر $Cent(\mathcal{A})$ در مرکز ساز $Mult(\mathcal{A})$ قرار دارد. حال فرض کنیم $\mathcal{X}$ عضو دلخواهی از $C_{End(\mathcal{A})}(Mult(\mathcal{A}))$ باشد و $a, b \in \mathcal{A}$ دلخواه باشند، دراین صورت داریم $(\mathcal{X}a_L)(b) = (a_L\mathcal{X})(b)$ یعنی $\mathcal{X}(ab) = a\mathcal{X}(b)$ و بطور مشابه ثابت می شود $\mathcal{X}(ab) = \mathcal{X}(a)b$. این نشان می دهد که $\mathcal{X} \in Cent(\mathcal{A})$ و اثبات کامل می شود. ■

به ویژه این لم نشان می دهد که $Cent(\mathcal{A})$ یک زیر جبر از جبر شرکت پذیر $End(\mathcal{A})$ می باشد.

لم ۲.۱ : $Z(\mathcal{A})$ یک زیر جبر جابجایی و شرکت پذیر از $\mathcal{A}$ می باشد.

اثبات: می دانیم $Z(\mathcal{A})$ یک زیر جبر از $\mathcal{A}$ می باشد جابجایی و شرکت پذیر بودن آن به سادگی از تعریف $Z(\mathcal{A})$ بدست می آید. ■

لم ۳.۱ : اگر $\mathcal{A}$ یکانی باشد آن گاه $Cent(\mathcal{A}) \cong Z(\mathcal{A})$.

اثبات: نگاشت $\phi : Cent(\mathcal{A}) \longrightarrow Z(\mathcal{A})$ با ضابطه $\mathcal{X} \longmapsto \mathcal{X}(۱)$ را در نظر می گیریم. ثابت می کنیم این نگاشت یک یکریختی جبری بین مرکز $\mathcal{A}$ و مرکزوار $\mathcal{A}$ می باشد. فرض کنیم $\mathcal{X} \in Cent(\mathcal{A})$، دراین صورت برای عناصر $a, b \in \mathcal{A}$ داریم

$$a\mathcal{X}(۱) = \mathcal{X}(a۱) = \mathcal{X}(۱a) = \mathcal{X}(۱)a,$$

همچنین به سادگی دیده می شود که

$$(a, b, \mathcal{X}(۱)) = (a, \mathcal{X}(۱), b) = (\mathcal{X}(۱), a, b)$$

و این نشان می دهد $\mathcal{X}(۱) \in Z(\mathcal{A})$، لذانگاشت ϕ خوش تعریف می باشد. حال فرض کنیم $\mathcal{X}_۱, \mathcal{X}_۲ \in Cent(\mathcal{A})$ و $k \in \mathbb{K}$ عناصر دلخواهی باشند. به سادگی دیده می شود ϕ یک تبدیل خطی است و به علاوه

$$\phi(\mathcal{X}_۱ \circ \mathcal{X}_۲) = (\mathcal{X}_۱ \circ \mathcal{X}_۲)(۱) = \mathcal{X}_۱(\mathcal{X}_۲(۱)) = \mathcal{X}_۱(۱.\mathcal{X}_۲(۱))$$

$$= \mathcal{X}_1(1)\mathcal{X}_2(1) = \phi(\mathcal{X}_1)\phi(\mathcal{X}_2),$$

لذا ϕ یک همریختی جبری می باشد. حال فرض کنیم $\mathcal{X} \in Cent(\mathcal{A})$ و $\phi(\mathcal{X}) = 0$، دراین صورت

$$\mathcal{X}(1) = \phi(\mathcal{X}) = 0,$$

بنابراین برای هر عنصر دلخواه $a \in \mathcal{A}$ داریم

$$\mathcal{X}(a) = \mathcal{X}(1a) = \mathcal{X}(1)a = 0,$$

پس ϕ یک به یک می باشد. چون $a_L \in Cent(\mathcal{A})$ و $\phi(a_L) = a_L(1) = a$، پس ϕ پوشا نیز هست و این حکم را کامل می کند. ■

تعریف ۴.۱ : زیرفضای $\mathcal{A}^{(1)}$ از $\mathcal{A}$، تولید شده توسط تمام حاصل ضرب های ab برای $a, b \in \mathcal{A}$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\mathcal{A}^{(1)} = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq n\}.$$

چنانچه $\mathcal{A}\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}$، گوییم $\mathcal{A}$ یک جبر کامل[5] است.

لم ۴.۱ : هرگاه $\mathcal{A}$ یک جبر کامل باشد مرکزوار آن جابجایی است.

اثبات: فرض کنید $\mathcal{X}, \psi \in Cent(\mathcal{A})$ و $c \in \mathcal{A}$. چون $\mathcal{A}$ کامل است بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود می توان فرض کرد $c = ab$ جایی که $a, b \in \mathcal{A}$. حال داریم

$$\mathcal{X}\psi(c) = \mathcal{X}\psi(ab) = \mathcal{X}(\psi(ab)) = \mathcal{X}(\psi(a)b) = \psi(a)\mathcal{X}(b)$$

$$= \psi(a\mathcal{X}(b)) = \psi(\mathcal{X}(ab)) = (\psi\mathcal{X})(ab) = \psi\mathcal{X}(c)$$

و این حکم را کامل می کند. ■

[5] perfect

لم ۵.۱ : اگر $\mathcal{A}$ کامل باشد آن گاه $\mathcal{A}$ یک جبر روی $Cent(\mathcal{A})$ است.

اثبات: چون $\mathcal{A}$ کامل است با توجه به لم بالا $Cent(\mathcal{A})$ جابجایی است. از طرفی می دانیم $Cent(\mathcal{A})$ یکدار می باشد، لذا به وضوح $\mathcal{A}$ همراه با ساختار گروه آبلی‌اش و ضرب تعریف شده توسط

$$Cent(\mathcal{A}) \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$(\mathcal{X}, a) \longmapsto \mathcal{X}(a) \qquad (a \in \mathcal{A}, \mathcal{X} \in Cent(\mathcal{A}))$$

یک $Cent(\mathcal{A})-$ مدول یکانی می باشد. از طرفی رابطه

$$\mathcal{X}(ab) = (\mathcal{X}(a))b = a(\mathcal{X}(b)) \qquad (a, b \in \mathcal{A}, \mathcal{X} \in Cent(\mathcal{A}))$$

نشان می دهد که $\mathcal{A}$ یک جبر روی $Cent(\mathcal{A})$ می باشد. ■

تعریف ۵.۱ : $\mathcal{A}$ را یک جبر اول[۶] می گوییم، اگر برای هر دو ایدآل I و J از $\mathcal{A}$ داشته باشیم،

$$IJ = 0 \implies I = 0 \text{ یا } J = 0.$$

تعریف ۶.۱ : $\mathcal{A}$ را یک جبر ساده[۷] می گوییم، هرگاه $\mathcal{A}^{(1)} \neq 0$ و هر ایدآلی از $\mathcal{A}$ ایدآل صفر باشد یا خود $\mathcal{A}$.

لم ۶.۱ : اگر جبر $\mathcal{A}$ اول باشد، آنگاه $Cent(\mathcal{A})$ دامنه صحیح است و $\mathcal{A}$ یک $Cent(\mathcal{A})-$ مدول آزاد از تاب خواهد بود. همچنین اگر جبر $\mathcal{A}$ ساده باشد، آنگاه $Cent(\mathcal{A})$ یک میدان است.

اثبات: به بند (۳) از قضیه‌ی ۳.۶.۱ از قسمت ۲ مرجع [۲۱] مراجعه شود. ■

تعریف ۷.۱ : هرگاه مرکزوار جبر $\mathcal{A}$ بر حلقه‌ی پایه $\mathbb{K}$ منطبق باشد یا به عبارتی داشته باشیم

$$Cent(\mathcal{A}) \cong \{kid : k \in \mathbb{K}\} \cong \mathbb{K}$$

---

[۶] prime

[۷] simple

آنگاه جبر $\mathcal{A}$ را مرکزی [۸] می گوییم و به علاوه اگر جبر $\mathcal{A}$ ساده باشد آن را ساده‌ی مرکزی [۹] می نامیم. هر جبر ساده را می توان به عنوان یک جبر ساده‌ی مرکزی روی مرکزوار خود در نظر گرفت.

تعریف ۸.۱ : برای هر زیرمجموعه‌ی $\mathcal{B}$ از جبر $\mathcal{A}$ پوچ ساز[۱۰] $\mathcal{B}$ در $\mathcal{A}$ را به شکل زیر تعریف می کنیم

$$Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) := \{z \in \mathcal{A} : z\mathcal{B} = \{\circ\} = \mathcal{B}z\}.$$

لم ۷.۱ : هر $\mathbb{K}-$ زیر مدول $\mathcal{A}$ که شامل $\mathcal{A}^{(1)}$ باشد یا مشمول در $Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ باشد یک ایدآل از $\mathcal{A}$ است.

اثبات: فرض کنیم $\mathcal{B}$ یک $\mathbb{K}-$ زیرمدول $\mathcal{A}$ باشد، پس یک زیر گروه جمعی از $\mathcal{A}$ خواهد بود و لذا برای $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ داریم $b_1 + b_2 \in \mathcal{B}$. حال فرض کنیم $\mathcal{B}$ شامل $\mathcal{A}^{(1)}$ باشد، دراین صورت برای $a \in \mathcal{A}$ و $b \in \mathcal{B}$ داریم $ab \in \mathcal{A}^{(1)}$، پس $ab \in \mathcal{B}$ و این نشان می دهد $\mathcal{B}$ یک ایدآل از $\mathcal{A}$ است. درحالت دوم فرض کنیم $\mathcal{B}$ مشمول در $Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ باشد. برای $a \in \mathcal{A}$ و $b \in \mathcal{B}$ داریم $ab = \circ \in \mathcal{B}$ و این حکم را کامل می کند. ■

اگر $\mathcal{A}$ یک جبرلی باشد و $a, b \in \mathcal{A}$، ازنماد $[a, b]$ برای حاصل ضرب a, b استفاده می کنیم. دراین حالت $Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ همان مرکزساز $\mathcal{B}$ در $\mathcal{A}$ خواهد بود، یعنی

$$Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = C_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \{z \in (\mathcal{A}) : [z, \mathcal{B}] = \{\circ\}\}.$$

به ویژه $Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ همان مرکز معمولی است، به شرط این که $\mathbb{K} \ni ۱/۲$.

اگر $\mathbb{K}$ یک حلقه‌ی یکدار، جابجایی و شرکت پذیر و $\mathcal{A}$ یک جبر روی $\mathbb{K}$ و $\mathcal{B}$ ایدآلی از $\mathcal{A}$ باشد، $Hom_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}(\mathcal{A}/\mathcal{B}, Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}))$ مجموعه ای است از $\mathbb{K}-$ نگاشت های خطی $f : \mathcal{A}/\mathcal{B} \longrightarrow Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$

central[۸]

central simple[۹]

annihilator[۱۰]

که شرط $f(xy) = f(x)y = xf(y)$ را برای هر $x, y \in \mathcal{A}/\mathcal{B}$ برآورده می سازد، جایی که $\mathcal{A}/\mathcal{B} \times Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{A}$ بوسیله $(a+\mathcal{B})z = az$ تعریف می شود و $Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \times \mathcal{A}/\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ نیز به طور مشابه تعریف می شود.

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر روی حلقه‌ی $\mathbb{K}$ و $a, b, c \in \mathcal{A}$. فرم $\mathbb{K}-$ دوخطی $(. \mid .)$ روی $\mathcal{A}$ را پایا[11] می گوییم هر گاه $(ab \mid c) = (a \mid bc)$ و $f \in End(\mathcal{A})$ را نسبت به فرم $(. \mid .)$ متقارن می گوییم هر گاه $(f(a) \mid b) = (a \mid f(b))$.

تعریف ۹.۱ : فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر روی حلقه‌ی $\mathbb{K}$ باشد، در این صورت $d \in End_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ را یک مشتق[12] از $\mathcal{A}$ می نامیم اگر برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$d(ab) = d(a)b + ad(b).$$

جبر متشکل از مشتق های $\mathbb{K}-$ خطی از $\mathcal{A}$ را با $Der_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ نشان می دهیم.

قضیه ۱.۱ : فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر روی حلقه‌ی یکدار، جابجایی و شرکت پذیر $\mathbb{K}$ دراین صورت

الف) اگر $\mathcal{B}$ یک زیر مجموعه از $\mathcal{A}$ باشد، $Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ و هر اید آل کامل از $\mathcal{A}$ تحت $Cent(\mathcal{A})$ پایاست.

ب) برای هرایدآل غیر صفر $\mathcal{B}$ از $\mathcal{A}$ که تحت $Cent(\mathcal{A})$ پایاست، اید آل فرار[13] $\mathcal{B}$

$$\mathcal{V}(\mathcal{B}) = \{\mathcal{X} \in Cent(\mathcal{A}) : \mathcal{X}(\mathcal{B}) = 0\}$$

با $Hom_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}(\mathcal{A}/\mathcal{B}, Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}))$ ایزومورف است.

پ) اگر $Cent(\mathcal{B}) = \mathbb{K}id$، آنگاه $Cent(\mathcal{A}) = \mathbb{K}id \oplus \mathcal{V}(\mathcal{B})$.

ج)
$$Cent(\mathcal{A}) \cap Der(\mathcal{A}) = \{\psi \in End(\mathcal{A}) : \mathcal{A}^{(1)} \subseteq Ker\psi, Img\psi \subseteq Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\}$$
$$= \{\psi \in Cent(\mathcal{A}) : \mathcal{A}^{(1)} \subseteq Ker\psi\} = \mathcal{V}(\mathcal{A}^{(1)})$$

[11] invariant

[12] derivation

[13] vanishing ideal

$$= \{\psi \in Der(\mathcal{A}) : Img\psi \subseteq Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\}$$

$$\cong Hom_{\mathcal{A}/\mathcal{A}^{(1)}}(\mathcal{A}/\mathcal{A}^{(1)}, Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}))$$

$$\cong Hom_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}/\mathcal{A}^{(1)}, Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})).$$

د) $\mathcal{A}$ تجزیه ناپذیر است ($\mathcal{A}$ را نمی توان به صورت مجموع مستقیمی از دو اید آل نا بدیهی ازخودش نوشت.) اگر و تنها اگر، $Cent(\mathcal{A})$ شامل عنصر ناصفر، خودتوان و غیر همانی نباشد.

ه) فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک $mult(\mathcal{A})$ ـمدول غیر قابل تجزیه و از طول متناهی n باشد و رادیکال جیکوبسن مرکزوار را با $radCent(\mathcal{A})$ نمایش دهیم، دراین صورت $Cent(\mathcal{A})$ یک حلقه‌ی موضعی می باشد (یعنی $Cent(\mathcal{A})/(radCent(\mathcal{A}))$ یک حلقه‌ی بخشی است) و $(radCent(\mathcal{A}))^n = 0$، بنابراین $radCent(\mathcal{A})$ پوچ توان و منطبق با مجموعه تبدیلات خطی پوچ توان در$Cent(\mathcal{A})$ است. به ویژه اگر $\mathcal{A}$ یک جبر با بعد متناهی و تجزیه ناپذیر روی میدان $\mathbb{K}$ باشد، یک جبر بخشی $\mathcal{D}$ روی $\mathbb{K}$ موجود است به قسمی که

$$\mathcal{D}id \oplus radCent(\mathcal{A}) = Cent(\mathcal{A}).$$

ی) اگر $\mathcal{A}$ یک جبر کامل باشد، هر $\mathcal{X} \in Cent(\mathcal{A})$ نسبت به هر فرم پایا روی $\mathcal{A}$ متقارن است.

اثبات: الف) فرض کنیم $\mathcal{X} \in Cent(\mathcal{A})$ و $a \in Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$، در این صورت برای هر $b \in \mathcal{B}$ داریم

$$\mathcal{X}(a)b = \mathcal{X}(ab) = \mathcal{X}(0) = 0,$$

بنابراین $\mathcal{X}(a) \in Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$.

حال فرض کنیم I یک اید آل کامل از$\mathcal{A}$، $\mathcal{X} \in Cent(\mathcal{A})$ و$a \in I$ باشد. چون I کامل است بدون کاسته شدن از کلیت می توان فرض کرد $a = a_1a_2$ جایی که $a_1, a_2 \in I$، در این صورت

$$\mathcal{X}(a) = \mathcal{X}(a_1a_2) = a_1\mathcal{X}(a_2) \in I,$$

پس (الف) برقرار است.

ب) فرض کنیم $\mathcal{B}$ یک ایدال پایا تحت $Cent(\mathcal{A})$ باشد و $\mathcal{X} \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$، در این صورت $\mathcal{X} \in Cent(\mathcal{A})$ و $\mathcal{X} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ یک نگاشت خطی است. حال اگر $a \in \mathcal{A}$ و $b \in \mathcal{B}$، داریم $\mathcal{X}(a)b = a(\mathcal{X}(b)) = 0$ و $b\mathcal{X}(a) = (\mathcal{X}(b))a = 0$، بنابراین $\mathcal{X}(a) \in Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ و لذا $\mathcal{X} : \mathcal{A} \longrightarrow Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$. از طرفی $\mathcal{X}(\mathcal{B}) = 0$، یعنی $\mathcal{B} \subseteq Ker\mathcal{X}$، پس طبق قضایای یکریختی یک نگاشت به شکل زیر القا می گردد.

$$\bar{\mathcal{X}}: \mathcal{A}/\mathcal{B} \longrightarrow Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$$

$$a + \mathcal{B} \longmapsto \mathcal{X}(a)$$

و به ازای هر $x = x_1 + \mathcal{B}$ و $y = y_1 + \mathcal{B}$ در $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ داریم

$$\bar{\mathcal{X}}\ (xy) = \bar{\mathcal{X}}\ ((x_1 + \mathcal{B})(y_1 + \mathcal{B})) = \bar{\mathcal{X}}\ ((x_1 y_1) + \mathcal{B}) = \mathcal{X}(x_1 y_1) = x_1 \mathcal{X}(y_1)$$

$$= (x_1 + \mathcal{B})\ \bar{\mathcal{X}}\ (y_1 + \mathcal{B}) = x\ \bar{\mathcal{X}}\ (y),$$

بنابراین $\bar{\mathcal{X}} \in Hom_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}(\mathcal{A}/\mathcal{B}, Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}))$. حال تعریف می کنیم

$$\phi : \mathcal{V}(\mathcal{B}) \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}(\mathcal{A}/\mathcal{B}, Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})).$$

$$\mathcal{X} \longmapsto \bar{\mathcal{X}}$$

کافیست ثابت کنیم ϕ یک به یک و پوشا می باشد. فرض کنیم $\mathcal{X} \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$ و $\bar{\mathcal{X}} = \phi(\mathcal{X}) = 0$، در این صورت برای $a \in \mathcal{A}$ داریم

$$\mathcal{X}(a) = \bar{\mathcal{X}}\ (a + \mathcal{B}) = 0$$

و لذا $\mathcal{X} = 0$، پس ϕ یک به یک می باشد.

فرض کنیم $\bar{\mathcal{X}} \in Hom_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}(\mathcal{A}/\mathcal{B}, Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}))$ لذا $\bar{\mathcal{X}}: \mathcal{A}/\mathcal{B} \longrightarrow Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ یک نگاشت $\mathbb{K}$− خطی است که خاصیت زیر را دارد

$$\bar{\mathcal{X}}\ (xy) = x\ \bar{\mathcal{X}}\ (y) \qquad (x, y \in \mathcal{A}/\mathcal{B}).$$