بسم الله الرحمن الرحیم

۱۴۲۶۱۵

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه

جهت اخذ درجه فوق لیسانس ریاضی محض گرایش جبر

موضوع

زیر جبر فراتینی از یک جبر لی

استاد راهنما

جناب آقای دکتر علیرضا سالمکار

استاد مشاور

خانم دکتر نگار شهنی کرمزاده

نگارش

زهرا ریاحی

آبان ماه ۱۳۸۸

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....

دانشگاه شهید بهشتی

«بسمه تعالی»

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شمارهٔ ۱۰۱۴۱/۲۰۰/د مورخ ۸۸/۷/۲۶ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه: **خانم زهرا ریاحی** شماره شناسنامه: **۲۰۵۵** صادره از: **فریدن** متولد: **۱۳۶۲** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد: **ریاضی محض**

با عنوان:

زیر جبر فراتینی از یک جبر لی

به راهنمایی:

آقای دکتر علیرضا سالمکار

طبق دعوت قبلی در تاریخ **۸۸/۸/۲** تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره ۱۸/۷۵ هیجده و هفتاد و پنج صدم درجه مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱- **استاد راهنما:** آقای دکتر علیرضا سالمکار	استادیار	شهید بهشتی	سالمکار
۲- **استاد مشاور:** خانم دکتر نگار شهنی‌کرمزاده	استادیار	شهید بهشتی	
۳- **داور** : آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی	استاد	شهید بهشتی	ابراهیمی
۴- **داور:** آقای دکتر مسعود طوسی	استاد	شهید بهشتی	طوسی
۵- **مدیر گروه:** آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	دانشیار	شهید بهشتی	

ناچیزتر از آن است که تقدیم را شایسته باشد اما به رسم مرسوم تقدیم می‌نمایم
تا شاید قطره‌ای باشد از دریای بیکران محبت هایشان.

تقدیم به خانواده‌ام به خاطر همراهی و همکاری‌های بی‌دریغشان

آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه‌های جاودانی زندگی من است.

تشکر و قدر دانی

خداوندا، سپاس ترا بر آنکه پرده تاریکی شب را به نور صبح شکافتی و ما را از روشنایی روز بهره مند ساختی و به منافع روزی‌ها بینا فرمودی.

پروردگارا، به من توفیق بده تا همواره سخن حق را بگویم، هرچند دشوار باشد و هرگز کورکورانه در علم از روی بی‌اطلاعی سخن نگویم. معبودا، قوی‌ترین نیروهایت را در من به هنگام خستگی قرار ده و مرا به سستی در عبادتت و نابینایی در تشخیص راه تو و انجام عمل خلاف دوستی تو و پیوستن با کسی که از تو جدا شود و جدا شدن از کسی که با تو بپیوندد، دچار نساز.

اینک که با لطف و عنایت پروردگار، توفیقی حاصل شد، بر خود لازم می‌دانم از استاد ارجمند جناب آقای دکتر علیرضا سالمکار که زحمت راهنمایی این پایان نامه را پذیرفته و بدون شک انجام مراحل مختلف این رساله بدون راهنمایی‌های گرانبها و تلاش‌های ارزنده‌ی ایشان ممکن نبود، کمال تشکر و قدردانی نمایم.

از خانم دکتر شهنی کرمزاده که مشاوره‌ی این رساله را بر عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از جناب آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی که وجودشان همواره مایه‌ی دلگرمی من بوده و نیز جناب آقای دکتر مسعود طوسی که راهنمایی‌های ایشان بدون شک بی‌تأثیر در درک بهتر مطالب نبوده است و زحمت داوری این پایان نامه را متحمل شده‌اند سپاسگزارم.

همچنین از جناب آقای دکتر بهروز عدالت‌زاده که همواره بنده را از راهنمایی‌های ارزشمند خود بهره‌مند ساختند و نیز جناب آقای دکتر محمدزاده تشکر می‌کنم .

در پایان جا دارد که از همه‌ی اعضای گروه ریاضی دانشگاه شهید بهشتی به خاطر محبتهای بی‌دریغشان قدردانی کنم.

فهرست مطالب

چکیده

اشتراک تمام زیر جبرهای ماکسیمال از هر جبر لی L را زیر جبر فراتینی نامیده و آن را با $\phi(L)$ نمایش می‌دهیم. در این پایان نامه ابتدا چند ویژگی از زیرجبر فراتینی را معرفی نموده و سپس بررسی می‌کنیم که آیا برخی از نتایج بدست آمده در نظریه‌ی گروه‌ها در رابطه با زیرگروه فراتینی، برای زیرجبر فراتینی نیز صادق است. در ادامه، فرض می‌کنیم $\mathcal{E}$ کلاس تمام جبرهای لی حلپذیر مانند L با چنین خاصیتی است که، اگر H یک زیر جبر از L باشد، آنگاه $\phi(H) \subseteq \phi(L)$. بچتل[۲] گروه‌ها با چنین خاصیتی را $\mathcal{E}$–گروه نامیده است. نشان می‌دهیم کلاس $\mathcal{E}$ شامل تمام جبرهای لی حلپذیر با زیر جبر مشتق پوچ توان است. سرانجام شرط لازم برای زمانی که یک ایدآل مانند J از $L \in \mathcal{E}$ زیر جبر فراتینی باشد، ارائه می‌دهیم.

[۲] Bechtell

پیشگفتار

اولین بار سافوس لی[3] توانست با بررسی گروه‌های تبدیلی ویژه‌ای، گروه‌های لی را معرفی نماید.کارهای وی منجر به کشف جبرهای لی شد. امروزه جبرهای لی و گروه‌های لی از جمله بخش‌های ضروری ریاضیات و فیزیک نظری می‌باشند. تعمیم جبرهای لی نیز موضوع جالبی است که در این پایان نامه به معرفی قسمت کوچکی از آن می‌پردازیم. از آنجایی که در نظریه‌ی گروه‌ها زیر گروه فراتینی را معرفی می‌نماییم، در جبرهای لی نیز علاقه‌مند به معرفی زیر جبر فراتینی می‌باشیم.

در سال (۱۹۶۷) مارشال[4] در [۱۷]، زیر جبر فراتینی از یک جبر لی متناهی بعد و از مشخصه‌ی صفر را مورد بررسی قرار داد. مارشال توانست در چنین شرایطی چند ویژگی از زیر جبر فراتینی را که در رابطه با زیر گروه فراتینی در نظریه‌ی گروه‌ها برقرار می‌باشد را بدست آورد.

در سال (۱۹۷۰) استیت زینگر[5] در [۲۰]، زیر جبر فراتینی از یک جبر لی متناهی بعد را بررسی نمود. وی توانست چندین قضیه‌ی پر کاربرد که در نظریه‌ی گروه‌ها دارای مشابه می‌باشند را در مورد جبرهای لی نیز بیان نماید. وی همچنین تجزیه‌ای برای یک جبر لی $\phi-$ آزاد و چندین شرط معادل برای حلپذیری یک جبر لی با استفاده از زیر جبر و ایدآل فراتینی بدست آورد.

در سال (۱۹۷۳) تاورز[6] در [۲۳]، نظریه‌ی فراتینی برای جبرهای لی را به طور کاملتری ارائه داد. وی با محدود کردن فرض نه تنها ویژگی‌های بیشتری را نسبت به آنچه مارشال در رابطه با زیرجبرهای فراتینی بررسی کرده بود، بدست آورد، بلکه توانست در چندین بخش متفاوت ویژگی‌هایی از تعمیم جبرهای لی را بررسی کند، که از جمله می‌توان به ایدآل فراتینی، جبرهای لی پوچ توان و جبرهای لی $\phi-$ آزاد اشاره نمود.

این پایان نامه شامل سه فصل است. در فصل اول ابتدا جبرهای لی را، که اساس کار سافوس لی

[3] Sophus lie
[4] Marshall
[5] Stitzinger
[6] Towers

است، معرفی می‌کنیم. سپس به بیان تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند. فصل دوم به معرفی زیرجبر فراتینی و چند ویژگی از آن اختصاص دارد. در این فصل تمام جبرهای لی را متناهی بعد فرض کرده و برخی از نتایجی که در نظریه‌ی گروه‌ها در رابطه با زیر گروه فراتینی برقرار می‌باشد را در مورد زیر جبر فراتینی ثابت می‌کنیم. علاوه بر این زیر جبر کارتان از هر جبر لی را تعریف و چند قضیه‌ی مربوطه را بیان و در برخی موارد اثبات می‌کنیم. در بخش دوم از همین فصل قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که برنساید[۷] در [۱۰] و هابی[۸] در [۱۵]، در نظریه‌ی گروه‌ها بیان کرده‌اند. لازم به ذکر است که در سال (۱۹۶۷) چا او[۹] در [۱۱]، توانست به نتیجه‌ای مشابه در جبر های لی متناهی بعد دست یابد، که ما در اینجا با تغییری جزئی در فرض، به همان نتیجه خواهیم رسید. سرانجام تجزیه‌ای برای هر جبر لی $\phi-$ آزاد ارائه کرده و قضیه‌ای بیان می‌کنیم که در آن شرایطی معادل با حلپذیر بودن هر جبر لی را بررسی نموده‌ایم. این قضیه مشابه است با آنچه که بئر[۱۰] در [۱]، بیان نموده است. در این فصل همچنین ثابت می‌کنیم که هر جبر لی L، با جبر مشتق پوچ توان، حلپذیر است. عکس این قضیه برای هر جبر لی روی میدان دلخواه لزوماً برقرار نمی‌باشد. $\mathcal{E}$ را کلاس تمام جبرهای لی حلپذیر با این ویژگی قرار می‌دهیم که، اگر H یک زیر جبر از L باشد، آنگاه $\phi(H) \subseteq \phi(L)$. بچتل گروه‌ها با چنین خاصیتی را $\mathcal{E}$-گروه نامیده است و ما در اینجا هر جبر لی با این ویژگی را $\mathcal{E}$-جبر می‌نامیم و نشان می‌دهیم که کلاس $\mathcal{E}-$ شامل تمام جبرهای لی حلپذیر با جبر مشتق پوچ توان است. همچنین یک شرط لازم برای این که ایدآلی مانند J از $L \in \mathcal{E}$ زیر جبر فراتینی از L باشد را ارائه می‌دهیم.

مطالب اصلی این پایان نامه بر اساس مقالات [۱۲] و [۲۰] می‌باشد.

---

[۷] Burnside

[۸] Hobby

[۹] Chao

[۱۰] Bear

فصل ۱

تعاریف و قضیه‌های مقدماتی

نظریه‌ی لی ریشه در کارهای سافوس لی[۱] دارد. وی گروه‌های تبدیلی ویژه‌ای را بررسی کرد، که امروزه آن را گروه‌های لی نامیده‌اند. کارهای وی منجر به کشف جبرهای لی شد. هم اکنون جبرهای لی و گروه‌های لی برای بسیاری از بخش‌هایی از ریاضیات و فیزیک نظری لازم شده‌اند. در ضمن جبرهای لی در جایگاه خود موضوع جالبی هستند که تعمیم آنها بسیارمهم است . این فصل به معرفی جبرهای لی و بخشی از تعمیم آن اختصاص دارد. در این فصل همچنین به ارائه‌ی کلیه‌ی تعاریف، مفاهیم و قضیه‌های مقدماتی مورد نیاز در این پایان نامه می‌پردازیم.

۱ Sophus Lie

۱.۱ جبرها

در این بخش جبر لی را معرفی و چند مثال ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم F یک میدان و A فضای برداری روی میدان F است. در این صورت A را، همراه با نگاشت دو خطی

$$A \times A \longrightarrow A; \quad (x, y) \longmapsto xy$$

به ازای هر $x, y \in A$، یک جبر می‌نامیم.

جبر A شرکت پذیر است هرگاه به ازای هر $x, y, z \in A$، $x(yz) = (xy)z$ و یکه دار است هرگاه عضو 1_A در A موجود باشد به قسمی که به ازای هر $x \in A$، $1_A x = x = x 1_A$.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم F میدان و L فضای برداری روی میدان F است . L را، همراه با نگاشت دو خطی $L \times L \longrightarrow L$ با ضابطه $[x, y] \longmapsto (x, y)$، جبر لی روی F می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند

(آ) به ازای هر $x \in L$، $[x, x] = 0$.

(ب) به ازای هر $x, y, z \in L$، $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$ (اتحاد ژاکوبی).

تذکر ۳.۱.۱ (آ) به ازای هر $x, y \in L$، براکت لی $[x, y]$ را معمولاً جابجاگر x و y نیز می‌نامند.

(ب) چون براکت لی $[-, -]$ دو خطی است، داریم

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, y] + [y, x] = [x, y] + [y, x]$$

و لذا به ازای هر $x, y \in L$ $\qquad [x, y] = -[y, x]$.

اگر میدان F از مشخصه ۲ نباشد، آنگاه با قرار دادن $x = y$ می‌توان شرط (آ) از تعریف ۲.۱.۱ را، نتیجه گرفت.

(پ) جبر لی L را متناهی بعد گوییم هرگاه L به عنوان فضای برداری متناهی بعد باشد.

مثال ۴.۱.۱ (آ) فرض کنیم $F = \mathbb{R}$. ضرب برداری $(x, y) \longmapsto x \wedge y$، به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^3$، یک ساختار جبر لی روی $\mathbb{R}^3$ تعریف می‌کند که آن را با $\mathbb{R}^3_\wedge$ نمایش می‌دهیم. به وضوح، اگر $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$، $y = (y_1, y_2, y_3)$، آنگاه

$$x \wedge y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

(ب) هر فضای برداری V همراه با براکت لی تعریف شده به صورت $[x, y] = 0$ به ازای هر $x, y \in V$ ساختار یک جبر لی دارد که آن را جبر لی آبلی می‌نامند.

(پ) فرض کنیم V فضای برداری متناهی بعد روی میدان F است. مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های خطی از V به V را با $gl(V)$ نمایش می‌دهیم که فضای برداری روی میدان F است، $gl(V)$ همراه با براکت لی

$$[x, y] := x \circ y - y \circ x$$

برای هر $x, y \in gl(V)$، یک جبر لی روی F تشکیل می‌دهد. $gl(V)$ را جبرلی عمومی می نامند.

(ت) فرض کنیم F میدان و $gl(n, F)$ فضای برداری تمام ماتریس‌های $n \times n$ روی F باشد.دراین صورت این فضا به همراه براکت لی $[x, y] := xy - yx$ تشکیل یک جبر لی می‌دهد، که در آن xy حاصلضرب ماتریس‌های x و y را نشان می‌دهد.

۲.۱ زیرجبر و ایدآل

در این بخش بعد از تعریف زیرجبر و ایدآل چند مثال بیان و همچنین مرکزساز و نرمال‌ساز از یک جبر لی را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم L جبر لی روی میدان F است.

(آ) زیرفضای برداری K از جبر لی L را، یک زیر جبر می‌نامیم و آن را با نماد $K \leq L$ نشان می‌دهیم، هرگاه به ازای هر $x, y \in K$، $[x, y] \in K$.

(ب) زیرفضای برداری I از L را ایدآل می‌نامیم و می‌نویسیم $I \trianglelefteq L$، هرگاه به ازای هر $x \in L$ و $y \in I$ ، $[x, y] \in I$.

اما در هر جبر لی، $[x, y] = -[y, x]$. لذا تفاوتی بین ایدآل‌های چپ و راست قائل نیستیم.

مثال ۲.۲.۱ فرض کنیم F میدان است.

(آ) فرض کنیم $sl(n, F) = \{A \in gl(n, F) | \ tr(A) = 0\}$. چون به ازای هر $A \in gl(n, F)$ و $B \in sl(n, F)$، $tr[A, B] = tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = 0$، $sl(n, F)$ یک ایدآل از $gl(n, F)$ است. جبرلی $sl(n, F)$ را، جبر خطی خاص می‌نامیم.

(ب) زیرفضای $b(n, F)$، مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های بالا مثلثی با درایه‌های متعلق به F است.به سادگی ملاحظه می‌شود که $b(n, F)$ همراه با براکت لی تعریف شده در $gl(n, F)$، زیر جبری از $gl(n, F)$ است. توجه کنید که $b(n, F)$ ایدآلی از $gl(n, F)$ نیست، زیرا $e_{11} \in b(n, F)$ و $e_{21} \in gl(n, F)$ اما $[e_{21}, e_{11}] = e_{21} \notin b(n, F)$. ($e_{ij}$ ماتریس $n \times n$ ای است که درایه‌ی ij ام آن یک و دیگر درایه‌ها صفر است).

(پ) زیرفضای $n(n, F)$ از فضای برداری $gl(n, F)$، شامل تمام ماتریس‌های به طور اکید بالا مثلثی همراه با براکت لی تعریف شده در $gl(n, F)$، جبر لی است. به آسانی بررسی می‌شود که $n(n, F)$ ایدآلی در $b(n, F)$ می‌باشد.

زیر جبرهای $gl(V)$ را، جبر لی خطی می‌نامیم.

(ت) $\{\circ\}$ و L ایدآل‌های بدیهی در L هستند.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنیم L جبر لی روی میدان F است. تعریف می‌کنیم

$$Z(L) := \{x \in L | \ \forall y \in L, \ [x, y] = \circ\}$$

در این صورت $Z(L)$ را، مرکز جبر لی می‌نامیم. به آسانی بررسی می‌شود که $Z(L)$ ایدآلی در L است و بدیهی است که $L = Z(L)$ اگر و تنها اگر L آبلی باشد.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای از L است. در این صورت اشتراک تمام زیرجبرهای L که شامل S هستند را، زیر جبر پدید آمده توسط S می‌نامیم و آن را با نماد $< S >$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنیم L جبر لی روی میدان F است.در این صورت زیر جبر

$$L' := \langle\{[x, y] | \ x, y \in L\}\rangle$$

را، جبر مشتق یا جبر جابجا گر L می‌نامیم. به آسانی بررسی می‌شود که L' ایدآلی در L است.

مثال ۶.۲.۱ فرض کنیم $L = sl(۲, \mathbb{C})$. در این صورت $L' = sl(۲, \mathbb{C})$.

لم ۷.۲.۱ فرض کنیم I و J دو ایدآل در جبر لی L هستند. در این صورت $I \cap J$، $I + J := \{x + y | \ x \in I, y \in J\}$ و $[I, J] := \langle\{[x, y] | \ x \in I, y \in J\}\rangle$ ایدآل‌هایی در L هستند.

برهان. چون I و J ایدآل هستند، $[I \cap J, L] \subseteq I$ و $[I \cap J, L] \subseteq J$. همچنین به ازای هر $x \in I$، $y \in J$ و $l \in L$، داریم $[x + y, l] = [x, l] + [y, l]$ و لذا $I \cap J$ و $I + J$ ایدآلی در L است. سرانجام با توجه به اتحاد ژاکوبی در جبرهای لی برای $x \in I$، $y \in J$ و $l \in L$ داریم

$$[l, [x, y]] = -[y, [l, x]] - [x, [y, l]] \in [I, J].$$

از این رو $[I, J]$ ایدآلی در L است.

لم ۸.۲.۱ فرض کنیم A و B دو زیر جبر از جبر لی L هستند به قسمی که $A \subseteq Z(L)$ و $L' \subseteq B$. در این صورت A و B ایدآل‌هایی در L می‌باشند.

برهان. $[B, L] \subseteq [L, L] = L' \subseteq B$ و $[A, L] \subseteq [Z(L), L] = 0 \in A$.

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنیم L جبر لی روی میدان F و S زیرمجموعه‌ای از L است. در این صورت مجموعه‌ی

$$Z_L(S) = \{x \in L |\ \forall s \in S,\ [x, s] = 0\}$$

را، مرکز ساز S در L می‌نامیم. به آسانی بررسی می‌شود که $Z_L(S)$ زیر جبری از L است (مرکز ساز S در L را با نماد $C_L(S)$ نیز نشان می‌دهند).

اگر A و B دو زیر جبر از جبر لی L باشند، آنگاه به وضوح $Z_A(B) = Z(B) \cap A$.

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنیم L جبر لی و V زیرفضایی از L است. در این صورت مجموعه‌ی

$$N_L(V) = \{x \in L |\ \forall v \in V,\ [x, v] \in V\}$$

را، نرمال ساز V در L می‌نامیم. به آسانی بررسی می‌شود که $N_L(V)$ زیر جبری از L است و نیز اگر V زیر جبری از L باشد آنگاه V ایدآلی در جبر لی $N_L(V)$ است. در این حالت $N_L(V)$ بزرگترین زیر جبر از جبر لی L است که V در آن ایدآل می‌باشد.

گزاره ۱۱.۲.۱ فرض کنیم L جبر لی است و $H \leq L$ و $K \trianglelefteq L$. در این صورت $H + K$ زیر جبری از L است.

برهان. به ازای هر $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in K$، داریم

$$[h_1 + k_1, h_2 + k_2] = [h_1, h_2] + [k_1, k_2] + [h_1, k_2] + [k_1, h_2]$$

حال نتیجه به راحتی حاصل می‌شود.

لم ۱۲.۲.۱ فرض کنیم L جبر لی، $A, B \trianglelefteq L$. در این صورت $[A, B] \subseteq A \cap B$.

برهان. با توجه به تعریف ایدآل، نتیجه به راحتی حاصل می‌شود.

لم ۱۳.۲.۱ فرض کنیم L جبر لی و $K, M, H \leq L$ به قسمی که $H \subseteq M$. در این صورت

$$M \cap (H + K) = H + (M \cap K)$$

برهان. با توجه به فرض کافی است نشان دهیم که $M \cap (H + K) \subseteq H + (M \cap K)$. فرض کنیم $x \in M \cap (H + K)$. در این صورت عناصری مانند $h \in H$ و $k \in K$ وجود دارند به قسمی که $x = h + k$. چون $h + k \in M$ و با توجه به فرض $h \in M$، $x = h + k \in H + (M \cap K)$.

۳.۱ همریختی‌ها

در این بخش، مفهوم همریختی بین دو جبر لی را تعریف خواهیم کرد. در ادامه مفهوم یکریختی بین دو جبر لی را ارائه داده و قضایای اساسی یکریختی جبرهای لی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم L_1 و L_2 دو جبر لی روی میدان F هستند. نگاشت $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ را همریختی جبرهای لی می‌نامیم، هرگاه

(آ) φ نگاشت خطی باشد.

(ب) به ازای هر $x, y \in L_1$، $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$.

در این حالت اگر φ نگاشتی پوشا(یک به یک) باشد، آنگاه φ یک بروریختی(تکریختی) جبرهای لی نامیده می‌شود. همچنین، یک همریختی از جبرهای لی را یکریختی می‌نامیم هرگاه یک به یک و پوشا باشد. در حالت خاص، یکریختی از جبر لی به روی خودش را خودریختی می‌نامند.

لم ۲.۳.۱ فرض کنیم L_1 و L_2 دو جبر لی و $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ یک همریختی است. در این صورت هسته‌ی φ، $ker\varphi$، ایدآلی در جبر لی L_1 و تصویر φ، $Im\varphi$، زیر جبری از جبر لی L_2 است.

مثال ۳.۳.۱ فرض کنیم L جبر لی روی میدان F است. نگاشت $ad : L \longrightarrow gl(L)$ را با ضابطه‌ی $(adx)(y) = [x, y]$ در نظر بگیرید، به‌سادگی خطی بودن این نگاشت از دو خطی بودن براکت لی و همریختی بودن آن، با بررسی تساوی زیر حاصل می‌شود.

$$ad([x, y]) = adxady - adyadx = [adx, ady]$$

همریختی ad را همریختی الحاقی می‌نامیم. همچنین به‌سادگی ملاحظه می‌شود که $ker(ad) = Z(L)$.

تعریف ۴.۳.۱ فرض کنیم L جبر لی روی میدان F و I ایدآلی در L است. فضای برداری $\frac{L}{I} = \{l + I| \; l \in I\}$ را فضای برداری خارج قسمتی می‌نامیم.
به ازای هر $x, y \in L$، براکت لی را روی $\frac{L}{I}$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$[x + I, y + I] := [x, y] + I$$

به راحتی بررسی می‌شود که عمل تعریف شده فوق دو خطی است و $\frac{L}{I}$ همراه با این عمل جبر لی است.
جبر لی $\frac{L}{I}$ را جبر لی خارج قسمتی می‌نامیم.

گزاره ۵.۳.۱ فرض کنیم L جبر لی روی میدان F و I ایدآلی در L است. در این صورت نگاشت $\pi : L \longrightarrow \frac{L}{I}$ با ضابطه $\pi(l) = l + I$، همریختی پوشا از جبرهای لی است که آن را برریختی طبیعی می‌نامند.

لم ۶.۳.۱ فرض کنیم $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ برریختی از جبرهای لی است. در این صورت

(آ) $\varphi(L'_1) = L'_2$ (ب) $\varphi(Z(L_1)) \subseteq Z(L_2)$

برهان. با توجه به برریختی بودن φ و عضو گیری نتیجه به آسانی حاصل می‌شود.

لم ۷.۳.۱ فرض کنیم $f : L \longrightarrow L'$ همریختی جبرهای لی و I ایدآلی در L' است. در این صورت $f^{-1}(I)$ ایدآلی در L است.

برهان. به ازای هر عضو از $y \in L$ و $x \in f^{-1}(I)$، $f(x) \in I$ و $f(y) \in L'$. اما I ایدآلی در L' است لذا $[f(x), f(y)] \in I$. پس $f([x,y]) \in I$ و از این رو $[x,y] \in f^{-1}(I)$.

قضیه ۸.۳.۱

(آ) فرض کنیم $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ همریختی از جبرهای لی است. در این صورت، $L_1/ker\varphi \cong Im\varphi$. به‌ویژه، اگر φ برریختی باشد، آنگاه $L_1/ker\varphi \cong L_2$.

(ب) فرض کنیم I و J دو ایدآل از جبر لی L هستند. در این صورت

$$(I + J)/J \cong I/(I \cap J).$$

(پ) فرض کنیم L جبر لی و I و J ایدآل‌هایی در آن باشند به‌قسمی که $I \subseteq J$. در این صورت J/I ایدآلی در L/I است و $(L/I)/(J/I) \cong L/J$.

برهان. [۱۳، گزاره‌ی ۱.۸.۲].

لم ۹.۳.۱ برای هر جبر لی L، جبر خارج قسمت $L/Z(L)$ با زیر جبری از $gl(L)$ یکریخت است.

برهان. با توجه به قضیه‌ی بالا و مثال ۳.۳.۱، نتیجه به آسانی حاصل می‌شود.

قضیه ۱۰.۳.۱ (قضیه‌ی تناظر)

فرض کنیم $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ برو‌ریختی از جبرهای لی است. در این صورت تناظری دو سویی بین ایدآل هایی از L_1 که شامل $ker\varphi$ هستند با ایدآل هایی از L_2 وجود دارد.

برهان. [۱۴، ۲.۳].

قضیه ۱۱.۳.۱ فرض کنیم L_1 و L_2 دو جبر لی روی میدان F هستند. در این صورت همریختی دلخواه $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ با $ker\varphi = K$، یکریختی $\varphi' : \frac{L_1}{K} \longrightarrow \varphi(L_1)$ با ضابطه‌ی $\varphi'(l+K) = \varphi(l)$ را القا می‌کند.

برهان. [۱۴، ۲.۳].

مثال ۱۲.۳.۱ فرض کنیم L جبر لی و I ایدآلی در L باشد به قسمی که $\frac{L}{I}$ آبلی است. در این صورت ایدآل‌های $\frac{L}{I}$ به طور دقیق زیر فضاهای $\frac{L}{I}$ هستند. لذا با توجه به قضیه‌ی بالا، ایدآل‌های L شامل I به طور دقیق زیر فضاهای L شامل I هستند.

لم ۱۳.۳.۱ فرض کنیم L_1 و L_2 دو جبر لی متناهی بعد، A_1 و A_2 به ترتیب ایدآل هایی در L_1 و L_2 باشند به قسمی که $L_1/A_1 \cong L_2/A_2$ و $A_1 \cong A_2$ و $L_1 \subseteq L_2$. در این صورت $L_1 \cong L_2$.

برهان. با توجه به قضیه‌ی بعد در فضاهای برداری، واین که $dim(L_1/A_1) = dim(L_2/A_2)$، $dimA_1 = dimA_2$، داریم $L_1 \cong L_2$.

تعریف ۱۴.۳.۱ فرض کنیم L_1 و L_2 دو جبر لی و $L := \{(x_1, x_2) |\ x_i \in L_i;\ i = 1, 2\}$ جمع مستقیم فضاهای برداری L_1 و L_2 باشد. در این صورت L همراه با عمل تعریف شده‌ی زیر تشکیل