بسْمِ اللّهِ الرّحمٰنِ الرّحيمِ

تقدیم به:

آستان حقیقت،

و

پدر و مادرم

که از نگاهشان صلابت، از رفتارشان محبت، و از صبرشان ایستادگی آموختم،

و

برادر و خواهر عزیزم.

سپاسگزاری

سپاس خدایی که انسان را آفرید و او را به فضیلت تعلیم و تعلم بر دیگر مخلوقات برتری بخشید. خداوندا تو را شاکرم که همواره یاری‌رسانم بوده‌ای و دریچه‌های علم و معرفت را فراروی‌م گشوده‌ای و اکنون که این پایان نامه به اتمام رسید، بر خود لازم می دانم از الطاف و عنایت های بی دریغ همه عزیزانی که مرا در این راه راهنمایی کرده اند، سپاسگزاری نمایم.

تشکر و قدردانی بی‌دریغ از پدر و مادر عزیزم که در تمامی مراحل زندگی تا به امروز مشوق و پشتوانه‌ام بوده‌اند و برادر و خواهر نازنینم که همراه همیشگی‌ام بوده و هستند.

سپاس ویژه از جناب آقای دکتر حسام‌الدینی که در طول دوران انجام این پایان‌نامه با حسن اخلاق همیشگی‌شان در به سرانجام رساندن آن کمک شایانی کردند.

از اساتید محترم دکتر جاهدی و دکتر مهدی‌پور که مشاورت این پروژه را به عهده داشتند نیز تشکر می‌نمایم.

سپاس و درود بر دیگر اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه صنعتی شیراز، جناب آقای دکتر فخارزاده جهرمی، جناب آقای دکتر ملکی، جناب آقای دکتر هاشمی، جناب آقای دکتر حاجی شعبانی و جناب آقای دکتر خرمی زاده که در طول این دوره افتخار شاگردی و کسب دانش و معرفت را از ایشان داشتم.

چکیده

بررسی جواب تحلیلی–تقریبی معادله‌ی کلاین–گوردون

بوسیله‌ی:

وحیده حدادبهبهانی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کاربردهای مهمی در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی مانند مکانیک سیالات، ترمودینامیک، انتقال گرما و فیزیک دارند. این معادلات اغلب غیرخطی هستند و یافتن جواب تحلیلی آنها دشوار و در بعضی از موارد غیرممکن است. به‌همین دلیل در سال‌های اخیر تلاش‌های گسترده‌ای به‌منظور توسعه روش‌های تحلیلی و عددی برای حل این معادلات صورت گرفته است. یکی از مهم‌ترین معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که در ریاضیات کاربردی ظاهر می‌شود، معادله‌ی کلاین–گوردون است. معادله‌ی کلاین–گوردون نقش مهمی در فیزیک ریاضی بازی می‌کند.

در این پایان‌نامه به بررسی معادله کلاین–گوردون با استفاده از چند روش تحلیلی–تقریبی مانند روش تبدیل دیفرانسیل، تکرار تغییراتی، تجزیه‌ی آدومین و . . . می‌پردازیم و نتایج عددی به‌دست آمده را با هم مقایسه می کنیم.

فهرست

عنوان **صفحه**

فصل ۱ معادله‌ی کلاین–گوردون و روش تبدیل دیفرانسیل ۱

۱–۱ مقدمه ۲

۱–۲ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۳

۱–۳ معادله‌ی کلاین–گوردون ۴

۱–۳–۱ معادله‌ی کلاین–گوردون برای توصیف انرژی ذره‌ی آزاد . . ۵

۱–۴ روش تبدیل دیفرانسیل ۸

۱–۴–۱ تبدیل دیفرانسیل یک‌بعدی ۹

۱–۴–۲ تبدیل دیفرانسیل دوبعدی ۱۱

۱–۴–۳ مثال ها ۱۲

۱–۵ روش تبدیل دیفرانسیل کاهش‌یافته ۱۸

فصل ۲ کاربرد روش تکرار تغییراتی برای حل معادله‌ی کلاین–گوردون ۲۴

۲–۱ مقدمه ۲۵

۲–۲ ضربگر اساسی لاگرانژ ۲۶

۲–۳ وردش ۲۷

۲–۴ شرایط پایا ۳۰

۲–۵ روش تکرار تغییراتی ۳۱

فصل ۳ روش‌های تحلیلی و تداخلی هموتوپی برای مطالعه‌ی معادله‌ی کلاین–گوردون ۴۶

۳–۱ مقدمه ۴۷

۳–۲ هموتوپی در توپولوژی ۴۷

۳–۳ مقدمه‌ای بر روش تحلیلی هموتوپی ۴۹

۳–۳–۱ خواص مشتق هموتوپی و معادلات دگردیسی ۴۹

۳–۴ روش تحلیلی هموتوپی ۵۵

۳–۴–۱ منحنی–$\hbar$ ۶۴

۳–۵ همگرایی روش تحلیلی هموتوپی ۶۶

۳–۶ روش تداخلی هموتوپی ۶۹

۳–۷ چهارچوب جایگزین برای روش تداخلی هموتوپی ۷۴

۳–۷–۱ مثال عددی ۷۶

فصل ۴ جواب عددی معادله‌ی کلاین–گوردون با استفاده از روش تجزیه‌ی آدومین ۸۰

۴–۱ مقدمه ۸۱

۴–۲ روش تجزیه‌ی آدومین ۸۱

۴–۳ کاربردهایی از روش تجزیه‌ی آدومین ۸۵

۴–۴ پیاده‌سازی روش تجزیه‌ی آدومین روی معادله‌ی کلاین–گوردون یک‌بعدی تعمیم‌یافته ۹۲
۴–۴–۱ نتایج عددی برای معادله‌ی $GODKG$ ۹۵
۴–۵ تقریبی از جواب معادله‌ی کلاین–گوردون با شرایط مرزی ۹۷
فصل ۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادات ۱۰۳
واژه‌نامه فارسی–انگلیسی ۱۰۷
فهرست منابع ۱۰۹

فهرست جدولها

۲–۱ قدر مطلق خطا برای مقادیر مختلف (x,t). ۳۷

۲–۲ نتایج حاصل از روش جدید برای معادله‌ی (۲–۲۲). ۳۹

۲–۳ نتایج حاصل از روش کلاسیک برای معادله‌ی (۲–۲۲). ۴۰

۲–۴ مقایسه‌ی مقادیر جواب دقیق و تقریبی حاصل از روش تکرار تغییراتی. . . . ۴۵

۳–۱ مقایسه‌ی نتایج به‌دست آمده به ازای $x = ۰/۱$ و $\hbar = -۰/۹۸$. ۶۲

۳–۲ مقایسه‌ی مقادیر خطا به ازای $x = ۰/۱$ و $\hbar = -۰/۹۸$. ۶۲

۳–۳ مقایسه‌ی نتایج به‌دست آمده به ازای $x = ۰/۴$ و $\hbar = -۰/۹۸$. ۶۳

۳–۴ مقایسه‌ی مقادیر خطا به ازای $x = ۰/۴$ و $\hbar = -۰/۹۸$. ۶۳

۳–۵ مقادیر عددی معادله‌ی (۳–۵۰) برای $\alpha = ۲/۵$، $\beta = ۱$ و $\gamma = -۱/۵$. . ۷۹

۳–۶ مقادیر عددی معادله‌ی (۳–۵۰) برای $\alpha = ۱$، $\beta = ۰/۵$ و $\gamma = ۰/۵$. . . ۷۹

۴–۱ مقایسه‌ی مقادیر به‌دست آمده‌ی u به ازای $t = ۰/۱$. ۸۹

۴–۲ مقایسه‌ی مقادیر به‌دست آمده‌ی u به ازای $t = ۰/۲$. ۹۰

۴–۳ مقایسه‌ی مقادیر به‌دست آمده‌ی u به ازای $t = ۰/۳$. ۹۰

۴–۴ مقادیر عددی $|\phi_N - u|$ برای $p = ۱$. ۹۶

۴–۵ مقادیر عددی $|\phi_N - u|$ برای $p = ۲$. ۹۶

۴–۶ مقادیر عددی $|\phi_N - u|$ برای $p = ۳$. ۹۶

۴–۷ مقادیر عددی $|\phi_N - u|$ برای $p = ۵$. ۹۷

فهرست شکلها

۲–۱ تابع خطای تکرار اول حاصل از روش جدید. ۳۹

۲–۲ تابع خطای تکرار اول حاصل از روش کلاسیک. ۴۰

۳–۱ منحنی $\hbar$– بر اساس ٦ تقریب برای مثال ۱۲.۳. . . . . ٦۴

۳–۲ منحنی $\hbar$– بر اساس ۱۰ تقریب برای مثال ۱۳.۳. . . . . ٦۵

۳–۳ منحنی $\hbar$– بر اساس ۴ و ٦ تقریب برای مثال ۱۴.۳. . . . . ٦۵

فصل ۱

معادله‌ی کلاین–گوردون و روش تبدیل دیفرانسیل

فصل اول

معادله‌ی کلاین–گوردون و روش تبدیل دیفرانسیل

۱–۱ مقدمه

معادله‌ی دیفرانسیل بیانگر رابطه میان یک تابع از یک یا چند متغیر مستقل و مشتقات این تابع نسبت به آنها است. بسیاری از قوانین عمومی در طبیعت مثلاً در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و ستاره‌شناسی طبیعی‌ترین بیان ریاضی خود را در زبان معادلات دیفرانسیل می‌یابند. معادلات دیفرانسیل علاوه بر ریاضیات در مهندسی، اقتصاد و بسیاری از علوم دیگر کاربرد فراوان دارد.

معادلات دیفرانسیل ابزار مناسبی برای فرمول‌بندی بسیاری از پدیده‌ها در جهان واقعی هستند. هر گاه یک رابطه بین چند متغیر و همچنین نرخ تغییرات آنها در حالت‌ها و زمان‌های مختلف موجود باشند، آن پدیده‌ها با معادله‌ی دیفرانسیل بیان می‌شوند. به‌عنوان ساده‌ترین مثال حرکت یک جسم را می‌توان مطرح کرد که به‌وسیله‌ی سرعت و مکان آن در زمان‌های مختلف توصیف می‌شود. معادله‌ی نیوتن رابطه میان مکان، سرعت، شتاب و نیروهای گوناگون وارد شده بر جسم را نشان می‌دهد، در این صورت می‌توانیم حرکت جسم را در قالب یک معادله‌ی دیفرانسیل بیان کنیم که در آن، مکان جسم، تابعی از زمان است.

معادلات دیفرانسیل را به‌طور کلی می‌توان به دو دسته معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات

دیفرانسیل با مشتقات جزئی تقسیم کرد. معادله‌ی دیفرانسیل معمولی معادله‌ای است که تابع فقط شامل یک متغیر مستقل است. در بخش بعد به معرفی معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌پردازیم.

روش حل یک معادله‌ی دیفرانسیل به نوع آن بستگی دارد. هر نوع از این معادلات را می‌توان از دیدگاه خطی یا غیرخطی بودن نیز دسته‌بندی کرد.

۱—۲ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی که به اختصار PDE[۱] نامیده می‌شود، معادله‌ای شامل یک تابع nمتغیره و مشتقات جزئی آن است. به‌طور کلی یک PDE برای تابع $u(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ به‌فرم کلی زیر است:

$$F(x_۱, x_۲, \ldots, x_n, u, u_{x_۱}, u_{x_۲}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_۱x_۱}, u_{x_۱x_۲}, \ldots) = ۰. \qquad (۱—۱)$$

مرتبه معادله‌ی (۱—۱) برابر با بالاترین مرتبه‌ی مشتق موجود در معادله است. معادله‌ی (۱—۱) را خطی گوییم هرگاه نسبت به u و مشتقات آن خطی باشد، در غیر این صورت آنرا غیرخطی می‌نامیم.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را می‌توان برای مدل‌بندی پدیده‌های غیرخطی که در بسیاری از علوم نظیر فیزیک حالت جامد، فیزیک پلاسما و دینامیک سیالات ظاهر می‌شوند، به‌کار برد. از جمله معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی می‌توان معادله‌ی گرما، معادله‌ی موج و معادله‌ی لاپلاس را نام برد.

۱) $u_t = Ku_{xx}$ معادله‌ی گرمای یک‌بعدی است که در آن u نشانگر دمای یک میله‌ی هادی

[۱] Partial Differential Equation

حرارت با قابلیت انتشار گرمایی K است.

۲) $u_{tt} = C^۲ u_{xx}$ معادله‌ی موج یک‌بعدی است که در آن u نشان‌دهنده جابه‌جایی یک تار مرتعش از وضعیت تعادل است و C نشانگر انتشار موج در تار است.

۳) $u_{tt} + u_{xx} = ۰$ معادله‌ی لاپلاس دوبعدی است که در مسائل وضعیت تعادلی، مسائل انتقال حرارت و در بسیاری از مسائل آنالیز و ریاضی فیزیک پدید می‌آید.

یکی دیگر از معادلات با مشتقات جزئی، معادله‌ی کلاین[۲]–گوردون[۳] است. در بخش بعد به تاریخچه پیدایش و معرفی این معادله می‌پردازیم.

۱–۳ معادله‌ی کلاین–گوردون

معادله‌ی کلاین–گوردون یکی از مهم‌ترین مدل‌های ریاضی در مکانیک کوانتومی و کلاسیک است. این معادله توجه زیادی را در زمینه‌ی مطالعه‌ی فیزیک ماده‌ی چگال، سالیتون و معادله‌ی غیرخطی موج به خود جلب کرده است.

در سال ۱۹۲۷ دو فیزیکدان به نام‌های اسکار کلاین و والتر گوردون معادله‌ای را برای توصیف الکترون نسبیتی پیشنهاد کردند که از آن پس این معادله به اسم ایشان نام‌گذاری شد. معادله‌ی کلاین–گوردون حالت نسبیتی معادله شرودینگر[۴] است و برای توجیه ذرات کوانتومی با اسپین صفر به‌کار می‌رود.

در واقع معادله‌ی کلاین–گوردون اولین بار توسط شرودینگر در طی تحقیقاتش برای یافتن

---

[۲] Klein
[۳] Gordon
[۴] Schrodinger

معادله‌ای جهت توصیف موج‌های بروگلی[۵] به‌عنوان یک معادله‌ی موج کوانتومی کشف شد. این معادله بعد از سال ۱۹۲۵ در دفترچه یادداشتش پیدا شد. او دست نوشته‌ای را آماده کرده بود که کاربرد این معادله را در اتم هیدروژن نشان می‌داد. بدون محاسبه‌ی اسپین الکترون، معادله‌ی کلاین–گوردون ساختار اتم هیدروژن را به‌طور نادرستی پیش‌بینی می‌کند. در ژانویه ۱۹۲۶ شرودینگر به‌جای معادله‌ی خود (معادله‌ی کلاین–گوردون) یک تقریب غیرنسبیتی را منتشر کرد که سطح انرژی بور[۶] اتم هیدروژن را بدون در نظر گرفتن ساختار آن پیش‌بینی می‌کرد و از آن پس این معادله به اسم شرودینگر نام‌گذاری شد. پس از مطرح شدن معادله‌ی شرودینگر، ولادیمیر فوک[۷] مقاله‌ای درباره تعمیم معادله‌ی کلاین–گوردون برای میدان‌های مغناطیسی نوشت که در آن نیروها وابسته به سرعت و مستقل از مشتق این معادله بودند. فوک همچنین نظریه پیمانه‌ای را برای معادله‌ی موج پیشنهاد کرد. معادله‌ی کلاین–گوردون برای یک ذره آزاد جواب موج تخت را نتیجه می‌دهد[۵۸، ۵۷].

۱–۳–۱ معادله‌ی کلاین–گوردون برای توصیف انرژی ذره‌ی آزاد

در مکانیک غیر نسبیتی، انرژی برای یک ذره‌ی آزاد از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$E = \frac{P^2}{2m},$$

که در آن m جرم ذره، $P = mv$ عملگر گشتاور و v سرعت ذره است. برای مکانیک کوانتومی، جایگزینی زیر انجام می‌شود:

$$\imath\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to E, \qquad -\imath\hbar\nabla \to P,$$

[۵] Broglie
[۶] Bohr
[۷] Fock

که در آن $\hbar = ۶.۶ \times ۱۰^{-۳۴}$ ثابت پلانک[۸] است. لذا معادله‌ی شرودینگر برای ذره‌ی آزاد به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$-\frac{\hbar^۲}{۲m}\nabla^۲\psi = \imath\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

معادله‌ی شرودینگر مشمول قوانین نسبیتی نمی‌شود؛ به این معنی که نسبیت خاص انیشتین[۹] را در بر نمی‌گیرد، بنابراین از معادله‌ی انرژی برای یک ذره‌ی آزاد در مکانیک نسبیتی استفاده می‌شود که از نسبیت خاص گرفته شده است:

$$E = \sqrt{P^۲C^۲ + m^۲C^۴},$$

که در آن $C = ۳ \times ۱۰^۸$ سرعت نور است. با قرار دادن عملگر گشتاور مکانیک کوانتومی، معادله موج ذره آزاد به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\sqrt{\left(-\imath\hbar\nabla\right)^۲ C^۲ + m^۲C^۴}\psi = \imath\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

کار کردن با این عبارت دشوار است، زیرا جمله‌ی شامل ریشه‌ی دوم ابهام ایجاد می‌کند. به‌علاوه این معادله غیرموضعی است و در بعضی از شرایط مورد نیاز نسبیت خاص صدق نمی‌کند. کلاین و گوردون با مربع این معادله یعنی معادله‌ی زیر کار کردند:

$$\left(\Box^۲ + \mu^۲\right)\psi = ۰,$$

که در آن $\mu = \frac{mC}{\hbar}$ و $\Box^۲ = \frac{۱}{C^۲}\frac{\partial^۲}{t^۲} - \nabla^۲$. عملگر $\Box$، عملگر d—آلمبرت[۱۰] نامیده می‌شود. امروزه این فرم از معادله‌ی کلاین—گوردون به‌عنوان معادله‌ی میدان نسبیتی برای یک ذره‌ی اسکالر (با اسپین صفر) تفسیر می‌شود[۵۸].

[۸] Plank
[۹] Einstein
[۱۰] Alembert

در این پایان‌نامه به بررسی معادله‌ی کلاین–گوردون به‌فرم زیر می‌پردازیم:

$$\left(\frac{\partial^۲}{\partial t^۲}+\alpha\sum_{j=۱}^{n}\frac{\partial^۲}{\partial x_j^۲}+b_۱\right)u+b_۲\,g(u)=f(X,t),$$

که همراه با شرایط اولیه‌ی زیر است:

$$u\left(X,۰\right)=a_۰\left(X\right),\qquad u_t\left(X,۰\right)=a_۱\left(X\right),$$

که در آن $X=(x_۱,x_۲,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$، $t\in\mathbb{R}^+$، u تابعی از X و t، g تابعی غیرخطی از u، α، $b_۱$ و $b_۲$ اعدادی حقیقی و f یک تابع تحلیلی داده است. لازم به‌ذکر است که در بخش ۴–۴ معادله‌ی کلاین–گوردون همراه با شرایط مرزی را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در سال‌های اخیر تلاش‌های بسیاری برای یافتن جواب‌های تحلیلی و تقریبی این معادله صورت گرفته است؛ عباس‌بندی[۱۱] [۲]، شاکری[۱۲] و دهقان[۱۳] [۵۸]، یوسوفگلو[۱۴] [۶۴] و بتیها[۱۵] [۱۶] روش تکرار تغییراتی را برای حل معادله‌ی کلاین–گوردون به‌کار برده اند.

ال‌عمری[۱۶]، نورانی[۱۷] و محمدنظر[۱۸] [۱۲]، جعفری[۱۹]، سعیدی[۲۰] و عرب‌فیروزجایی[۲۱] [۳۷] روش تحلیلی هموتوپی و چودری[۲۲] و هاشم[۲۳] [۲۲] و مومانی[۲۴] و اودیبت[۲۵] [۵۳] روش تداخلی هموتوپی را برای حل معادله‌ی کلاین–گوردون استفاده کردند.

[۱۱] Abbasbandy
[۱۲] Shakeri
[۱۳] Dehghan
[۱۴] Yusufoglo
[۱۵] Batiha
[۱۶] Alomari
[۱۷] Noorani
[۱۸] Mohamd nazar
[۱۹] Jafari
[۲۰] Saeidy
[۲۱] Firoozjaee
[۲۲] Chowdhury
[۲۳] Hashim
[۲۴] Momani
[۲۵] Odibat

دیبا[۲۶] و خوری[۲۷][۲۳]، السید[۲۸][۲۴]، کایا[۲۹] و السید[۴۰] روش تجزیه‌ی آدومین و وازواز[۳۰][۶۳] روش تجزیه‌ی اصلاح شده را برای حل معادله‌ی کلاین–گوردون به‌کار بردند.

در ادامه این فصل به معرفی روش تبدیل دیفرانسیل، روش تبدیل دیفرانسیل کاهش‌یافته و پیاده‌سازی این دو روش برای حل معادله‌ی کلاین–گوردون می‌پردازیم. روش تبدیل دیفرانسیل توسط راوی کنت[۳۱] و آرونا [۳۲][۵۵] برای حل معادله‌ی خطی و غیرخطی کلاین–گوردون به‌کار گرفته شده است. پس از آن کسکین[۳۳] ، سروی[۳۴] و اوچک[۳۵][۴۳] از روش تبدیل دیفرانسیل کاهش‌یافته برای بررسی این معادله استفاده کردند.

۱–۴ روش تبدیل دیفرانسیل

تبدیل‌های انتگرالی، مانند تبدیل لاپلاس و فوریه معمولا برای حل معادلات دیفرانسیل در مسائل مهندسی به‌کار گرفته می‌شوند. این روش‌ها به این دلیل سودمند هستند که معادلات دیفرانسیل را به معادلات جبری تبدیل می‌کنند تا به‌سادگی و به‌صورت قانونمند قابل حل باشند. با این وجود استفاده از تبدیل‌های انتگرالی در مسائل غیرخطی باعث پیچیده‌تر شدن این مسائل می‌شود. برای غلبه بر این مشکل، روش‌های عددی به‌کار گرفته می‌شوند که می‌توانند جواب تقریبی را به‌جای جواب تحلیلی ارائه دهند. روش تبدیل دیفرانسیل یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل است.

---

[۲۶] Deeba
[۲۷] Khuri
[۲۸] El-Sayed
[۲۹] Kaya
[۳۰] Wazwaz
[۳۱] Ravi Kanth
[۳۲] Aruna
[۳۳] Keskin
[۳۴] Servi
[۳۵] Oturanc

مفهوم تبدیل دیفرانسیل یک‌بعدی اولین بار در سال ۱۹۸٦ توسط ژو[۳٦] برای حل مسائل مقدار اولیه‌ی خطی و غیرخطی در آنالیز مدار الکتریکی به‌کار گرفته شد[٦۵]. پس از آن چن[۳۷] و هو[۳۸] با ستفاده از تبدیل دیفرانسیل یک‌بعدی روشی را برای حل مسائل مقدار ویژه پیشنهاد کردند[۲۰]. در سال‌های بعد این روش به‌طور موفقیت‌آمیزی برای حل PDEها گسترش پیدا کرد و محققان بسیاری با استفاده از آن توانستند فرم بسته‌ی سری جواب را برای مسائل خطی یا غیرخطی به‌دست آورند [۴۴، ۳۸، ۲۱، ۱۳، ۴، ۳].

در روش تبدیل دیفرانسیل، جواب معادله‌ی دیفرانسیل به‌صورت یک چندجمله‌ای در نظر گرفته می‌شود که فرم بسته‌ی سری جواب یا جواب تقریبی را نتیجه می‌دهد. با استفاده از این روش معادله‌ی دیفرانسیل داده شده و شرایط مرزی یا اولیه‌ی مربوط به آن به روابط بازگشتی تبدیل می‌شوند که جواب‌های این سیستم از معادلات جبری، ضرایب سری توانی جواب هستند. به‌دلیل دارا بودن این ویژگی، در این روش به خطی‌سازی مسائل غیرخطی و در نتیجه به کار محاسباتی طولانی و گرد کردن خطاها نیازی نیست. در ادامه به‌طور خلاصه به توصیف روش تبدیل دیفرانسیل می‌پردازیم[۳۸ ،۳].

۱—۴—۱ تبدیل دیفرانسیل یک‌بعدی

در این بخش به معرفی تعاریف اصلی تبدیل دیفرانسیل یک‌بعدی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱: فرض کنید $u(t)$ تابع تحلیلی در دامنه‌ی T باشد؛ یعنی نسبت به t به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد. به‌علاوه فرض کنید $\phi(t,k)$ به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\phi(t,k) = \frac{d^k u(t)}{dt^k}, \quad \forall t \in T. \qquad (۲-۱)$$

---

[۳٦] Zhou
[۳۷] Chen
[۳۸] Ho

در این صورت برای $t = t_i$، رابطه‌ی $\phi(t,k) = \phi(t_i,k)$ برقرار است که در آن k متعلق به دامنه‌ی K، زیر مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی است. رابطه‌ی (۱—۲) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$U(k) = \phi(t_i,k) = \left[\frac{d^k u(t)}{dt^k}\right]_{t=t_i}, \qquad (۱—۳)$$

که در آن $U(k)$ طیف $u(t)$ در $t = t_i$ نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱: اگر $u(t)$ را بتوان به‌صورت سری تیلور بیان کرد، آنگاه آن را می‌توان به‌فرم زیر نشان داد:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(t-t_i)^k}{k!}\right] U(k). \qquad (۱—۴)$$

معادله‌ی (۱—۴) معکوس $u(t)$ نامیده می‌شود. اگر D نشان‌دهنده‌ی فرآیند تبدیل دیفرانسیل باشد، با ترکیب (۱—۳) و (۱—۴) خواهیم داشت:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(t-t_i)^k}{k!}\right] U(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_i)^k}{k!} \left[\frac{d^k u(t)}{dt^k}\right]_{t=t_i} = D^{-1}U(k).$$

با به‌کار بردن روش تبدیل دیفرانسیل، یک معادله‌ی دیفرانسیل در یک دامنه‌ی خاص، به یک معادله‌ی جبری با دامنه‌ی K تبدیل می‌شود و $u(t)$ را می‌توان توسط سری تیلور با جملات محدود به اضافه‌ی یک باقی‌مانده به‌فرم زیر به‌دست آورد:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{(t-t_i)^k}{k!}\right] U(k) + R_{n+1}(t).$$

برای بالا بردن سرعت همگرایی و دقت محاسبات، دامنه t را باید به چند زیردامنه تقسیم کرد.

۱—۴—۲ تبدیل دیفرانسیل دوبعدی

تعاریف پایه‌ای و عمل‌های اصلی تبدیل دیفرانسیل دوبعدی به‌شرح زیر است[۵۵].

تابع دومتغیره‌ی $w(x,y)$ را در نظر بگیرید که در دامنه ی K تحلیلی است و فرض کنید $(x,y)=(x_\circ,y_\circ)$ متعلق به این دامنه باشد. بنابراین تابع $w(x,y)$ به‌صورت یک سری توانی حول نقطه‌ی $(x,y)=(x_\circ,y_\circ)$ نمایش داده می شود. تبدیل دیفرانسیل تابع $w(x,t)$ به‌فرم زیر است:

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}w(x,y)}{\partial x^k\partial y^h}\right]_{(x_\circ,y_\circ)}, \qquad (۵—۱)$$

که در آن $w(x,y)$ تابع اصلی و $W(k,h)$ تابع تبدیل ($T-Function$[۳۹]) هستند. تبدیل معکوس دیفرانسیل $W(k,h)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w(x,y)=\sum_{k=\circ}^{\infty}\sum_{h=\circ}^{\infty}W(k,h)(x-x_\circ)^k(y-y_\circ)^h. \qquad (۶—۱)$$

با ترکیب (۱—۵) و (۱—۶) خواهیم داشت:

$$w(x,y)=\sum_{k=\circ}^{\infty}\sum_{h=\circ}^{\infty}\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}w(x,y)}{\partial x^k\partial y^h}\right]_{(x_\circ,y_\circ)}(x-x_\circ)^k(y-y_\circ)^h.$$

در موارد کاربردی، زمانی که $(x_\circ,y_\circ)$، $(\circ,\circ)$ در نظر گرفته شود، $w(x,y)$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$w(x,y)=\sum_{k=\circ}^{\infty}\sum_{h=\circ}^{\infty}\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}w(x,y)}{\partial x^k\partial y^h}\right]_{(\circ,\circ)}x^ky^h.$$

عمل‌های اصلی برای تبدیل دیفرانسیل دوبعدی به‌قرار زیر است:

۱) اگر $w(x,y)=u(x,y)\pm v(x,y)$، آنگاه $W(k,h)=U(k,h)\pm V(k,h)$.

[۳۹] Transformed Function