



پایان نامه  
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد  
رشته آمار ریاضی

عنوان

آزمون های نیکویی برازش برای مدل های ارشمیدی توابع مفصل

استاد راهنما

دکتر صدیقه شمس

دانشجو

فاطمه رحمانی

بهمن ۱۳۹۱

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقدیم به

مادر بزرگوارم که با مهر تمام و صبر و بردباری، همواره حامی و پشتیبانم  
در تمام مسیر زندگی ام بوده است.

و پدرم که هر چه تنهائیم گذاشت اما می دانم که بهتر و بیشتر از گذشته با  
من است. (روحش شاد و دلش آرام ان شاء الله)

و همه عزیزانی که با لطف بی دریغ و امید روح افزای خویش روشنی راه و قوت قلم  
بوده اند.

کلیه دستاوردهای این تحقیق متعلق به دانشگاه الزهراء (س) است.

## مشکر و قدردانی

آدمی در مسیر رسیدن جز در سایه‌ی الطاف باری تعالی، گامی نمی‌تواند بردارد و یکی از الطاف پروردگار بی‌مثال، بی‌شک یاری و گذر از ورطه‌ی حوادث است و در این راه هستند انسان‌هایی که با وجود از دشمنان خویش چون چراغی فروزان موجب روشنی راه و گرمی دل اند. آن‌که این نعمت بداد، بر ما سپاس آن را نسیر نهاد. از این روست که جای دارد تلاش‌های بی‌شائبه استاد گرانقدر خویش، سرکار خانم دکتر صدیقه شمس را قدر نهم و از زحمات بی‌دیغشان نهایت سپاس را داشته باشم و همچنین از سرکار خانم دکتر ناهید سجری فارسی پور و سرکار خانم دکتر احترام خوشبین که داورای این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، سپاس فراوان نموده و از همراهی و یاری دوستان شفیق و مهربانم نهایت مشکر را داشته باشم. امید است هر که بر ماستی دارد از جام حقیقت طر فی بردارد.

# چکیده

تابع مفصل یکی از اصلی‌ترین ابزارهای بیان وابستگی است. برای بررسی این که ساختار وابستگی داده‌ها به خوبی توسط تابع مفصل منتخب بیان می‌شود، روش‌های زیادی توصیه شده است. در بسیاری از روش‌ها موضوع چند متغیره ابتدا به یک متغیره کاهش یافته و سپس از آزمون‌های یک متغیره استفاده می‌شود. هم چنین روش‌هایی وجود دارند که از چند متغیره استفاده می‌کنند. در این پایان نامه هر دو دسته از روش‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند. از آن جایی که خانواده مفصل ارشمیدسی کاربرد فراوانی در مدل سازی دارند، آزمون‌های نیکویی برازش خاص این خانواده نیز در این پایان نامه بررسی می‌شوند. با توجه به این که در تحلیل داده‌های به دست آمده از صنعت یا پزشکی، بسیاری از مواقع با داده‌های سانسور شده مواجه هستیم، آزمون‌های نیکویی برازش خانواده مفصل ارشمیدسی در این حالت نیز بیان می‌شود. برای بررسی عملکرد این آزمون‌ها با استفاده از شبیه‌سازی، احتمال خطای نوع اول و نوع دوم آزمون‌ها محاسبه می‌شوند. کلید واژه‌ها : تابع مفصل، تبدیل انتگرالی احتمال، تبدیل لاپلاس، توزیع کندال، خانواده مفصل ارشمیدسی، داده‌های سانسور شده، نیکویی برازش.

# فهرست مطالب

۱	معرفی توابع مفصل و مدل‌های ارشمیدسی این توابع	۱
۲	۱.۱ تعریف تابع مفصل	۲
۴	۱.۱.۱ ویژگی‌های توابع مفصل	۴
۹	۲.۱ خانواده‌هایی از توابع مفصل	۹
۱۵	۳.۱ توابع مفصل ارشمیدسی	۱۵
۱۵	۱.۳.۱ توابع مفصل ارشمیدسی و اندازه کندال	۱۵
۱۶	۲.۳.۱ خواص خانواده مفصل ارشمیدسی	۱۶
۱۷	۳.۳.۱ خانواده‌هایی از توابع مفصل ارشمیدسی	۱۷
۲۲	۴.۱ معرفی چند توزیع پارامتریک مهم	۲۲
۲۶	۲ داده‌های سانسور شده	۲۶
۲۶	۱.۲ تعریف داده‌های سانسور شده	۲۶
۲۷	۲.۲ انواع داده‌های سانسور شده	۲۷
۳۰	۳.۲ تابع درست‌نمایی در حضور داده‌های سانسور شده	۳۰
۳۰	۱.۳.۲ برآورد درست‌نمایی ماکزیمم با داده‌های کامل و سانسور شده از راست	۳۰
۳۲	۲.۳.۲ برآورد درست‌نمایی ماکزیمم با داده‌های کامل و سانسور شده از چپ	۳۲
۴۰	۴.۲ برآورد ناپارامتری با داده‌های سانسور شده	۴۰
۴۰	۱.۴.۲ برآوردگر کاپلان مایر	۴۰
۴۱	۲.۴.۲ برآوردگر کاپلان مایر برای تابع بقا با داده‌های سانسور شده از چپ	۴۱
۴۳	۳ مروری بر آزمون‌های نیکویی برازش توابع مفصل	۴۳
۴۴	۱.۳ تبدیل انتگرال احتمال	۴۴
۴۴	۱.۱.۳ تعریف تبدیل انتگرال احتمال	۴۴
۴۵	۲.۳ آماره‌های آزمون نیکویی برازش یک متغیره	۴۵

۴۵	آماره‌های آزمون تابع توزیع	۱.۲.۳
۴۷	آماره‌های آزمون تابع چگالی احتمال	۲.۲.۳
۴۸	آزمون نیکویی برازش توابع مفصل	۳.۳
۴۹	روش‌های کاهش بعد متغیرها	۴.۳
۴۹	روش اول	۱.۴.۳
۵۰	روش دوم	۲.۴.۳
۵۲	روش سوم	۳.۴.۳
۵۷	روش چند متغیره با بعد کامل	۵.۳
۵۸	فرآیند آزمون با استفاده از روش‌های کاهش بعد متغیرها و چند متغیره کامل	۶.۳
۵۹	الگوریتم نخست : فرآیند آزمون برای روش‌های کاهش بعد	۱.۶.۳
۵۹	الگوریتم دوم : فرآیند آزمون برای روش چند متغیره کامل	۲.۶.۳
۵۹	نتایج و مقایسه روش‌ها	۷.۳

#### ۴ آزمون‌های نیکویی برازش برای مدل‌های ارشمیدسی توابع مفصل با داده‌های کامل و

۶۶	سانسور شده	
۶۸	یک آزمون ساده برای داده‌های غیر سانسور شده (کامل)	۱.۴
۷۰	آزمونی برای داده‌های سانسور شده	۲.۴
۷۶	کاربرد عملی با داده‌های شبیه سازی شده	۳.۴
۷۶	آزمون برای داده‌های کامل با استفاده از روش شبیه سازی	۱.۳.۴
۷۷	آزمون برای داده‌های سانسور شده با استفاده از روش شبیه سازی	۲.۳.۴
۸۱	نتیجه گیری	۴.۴

#### ۸۲ کتاب نامه

#### ۸۷ الف شبیه سازی با کد $R$

#### ۹۹ ب واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

#### ۱۰۱ پ واژه‌نامه انگلیسی به فارسی



# لیست جداول

۲۱	خانواده توابع مفصل ارشمیدسی و تابع مولد آن‌ها	۱.۱
۷۷	روابط ضریب همبستگی کندال با پارامتر مجهول مفصل‌های ارشمیدسی	۱.۴
۷۷	تابع مولد گشتاور و معکوس تابع مولد گشتاور هر یک از توابع ارشمیدسی مفصل	۲.۴
۷۸	نتایج حاصل از آزمون برای داده‌های کامل با اندازه نمونه $N = ۱۰۰$	۳.۴
۷۸	نتایج حاصل از آزمون برای داده‌های کامل با اندازه نمونه $N = ۳۰۰$	۴.۴
۷۹	نتایج حاصل از آزمون برای داده‌های سانسور شده با اندازه نمونه $N = ۱۰۰$	۵.۴
۸۰	نتایج حاصل از آزمون برای داده‌های سانسور شده با اندازه نمونه $N = ۳۰۰$	۶.۴

# لیست تصاویر

۴	.....	۱.۱	$H$ -حجم
۶	.....	۲.۱	تابع مفصل $c$ -حجم
۶	.....	۳.۱	تابع مفصل مستقل
۸	.....	۴.۱	شکل (الف) مفصل کران پایین فرشه و شکل (ب) مفصل بالای فرشه می باشد.
۸	.....	۵.۱	کران بندی تابع مفصل
۱۸	.....	۶.۱	تابع مفصل کلایتون
۱۹	.....	۷.۱	تابع مفصل فرانک
۲۰	.....	۸.۱	تابع مفصل گامبل
۲۵	.....	۹.۱	نمودارهای تابع چگالی و تابع احتمال توزیع لاگ نرمال
۲۷	.....	۱.۲	انواع داده‌های آماری و داده‌های سانسور شده
۲۸	.....	۲.۲	داده‌های سانسور شده فاصله‌ای
۳۲	.....	۳.۲	نمودار احتمال توزیع نمایی با کران‌های اطمینان هم‌زمان ۹۵ درصدی
	.....	۴.۲	نمودار احتمال نمایی داده‌های زمان بهبودی با برآوردهای ماکزیمم درست‌نمایی و
۳۳	.....		فواصل اطمینان نقطه‌ای ۹۵ درصدی برای تابع توزیع
	.....	۵.۲	نمودار احتمال لاگ نرمال زمان‌های بهبودی با برآوردهای درست‌نمایی ماکزیمم
۳۳	.....		و فواصل اطمینان هم‌زمان ۹۵ درصد برای تابع توزیع
۳۴	.....	۶.۲	نسبت درست‌نمایی برای داده‌های مثال زمان بهبودی و توزیع لاگ نرمال
۳۴	.....	۷.۲	نواحی اطمینان توام پارامتر توزیع لاگ نرمال برای داده‌های زمان بهبودی
	.....	۸.۲	نمودار احتمال لاگ نرمال زمان‌های بهبودی با برآوردهای درست‌نمایی ماکزیمم
۳۵	.....		و فواصل اطمینان ۹۵ درصد برای تابع توزیع
۳۶	.....	۹.۲	۱۰۷ داده برای نسبت گداختگی اشعه $X$
	.....	۱۰.۲	نمودار احتمال وایبل برای داده‌های نسبت گداختگی $X$ با برآوردهای نسبت
۳۶	.....		درست‌نمایی و نواحی اطمینان تقریبی ۹۵ درصدی برای تابع توزیع تجمعی

- ۱۱.۲ نمودار احتمال لاگ نرمال برای داده‌های نسبت گداز اشعه  $X$  با برآوردهای درست‌نمایی  
 ۳۷ ماکزیمم و فواصل اطمینان تقریبی ۹۵ درصدی برای تابع تجمعی . . . . .
- ۱۲.۲ نسبت درست‌نمایی برای داده‌های اشعه  $X$  با توزیع وایبل . . . . . ۳۸
- ۱۳.۲ نمودار احتمال توزیع وایبل و لاگ نرمال برای داده‌های اشعه ایکس و برآوردهای  
 درست‌نمایی ماکزیمم و فواصل اطمینان ۹۵ درصدی برای توزیع تجمعی وایبل . . . ۳۹
- ۱۴.۲ مقایسه نمایش درست‌نمایی برای میانگین داده‌های نسبت گداختگی اشعه  $X$  با  
 استفاده از توزیع‌های وایبل و لاگ نرمال . . . . . ۳۹
- ۱۵.۲ نمودار برآورد کاپلان مایر برای مثال . . . . . ۴۱
- ۱.۳  $F_K(w)$  برای مفصل گامبل . . . . . ۵۵
- ۲.۳ نمودارهای توان برای تمام روشهای نیکویی برازش مفصل با مفروضات  $d =$   
 $(2, 5, 10)$ ،  $n = (500, 2500)$ ،  $C^{Alt} = C^{St}$  برای روش‌های  $G, B, M$  آماره  
 $AD$  مورد استفاده قرار گرفته است. بر روی محور  $x$  پارامتر آمیخته  $\beta$  مشاهده  
 می‌شود و محور  $y$  ها بخش بندی زمان‌های مفصل نرمال تحت فرض صفر است  
 که در سطح ۵ درصد رد می‌شود. . . . . ۶۱
- ۳.۳ نمودارهای توان برای تمام روشهای نیکویی برازش مفصل با مفروضات  $d =$   
 $(2, 5, 10)$ ،  $n = (500, 2500)$ ،  $C^{Alt} = C^{Cl}$  برای روش‌های  $G, B, M$  آماره  
 $AD$  مورد استفاده قرار گرفته است. بر روی محور  $x$  پارامتر آمیخته  $\beta$  مشاهده  
 می‌شود و محور  $y$  ها بخش بندی زمان‌های مفصل نرمال تحت فرض صفر است که  
 در سطح ۵ درصد رد می‌شود. . . . . ۶۲
- ۴.۳ نمودارهای توان برای تمام روشهای نیکویی برازش مفصل با مفروضات  $d =$   
 $(2, 5, 10)$ ،  $n = (500, 2500)$ ،  $C^{Alt} = C^{sCl}$  برای روش‌های  $G, B, M$  آماره  
 $AD$  مورد استفاده قرار گرفته است. بر روی محور  $x$  پارامتر آمیخته  $\beta$  مشاهده  
 است و محور  $y$  ها بخش بندی زمان‌های مفصل نرمال تحت فرض صفر است که  
 در سطح ۵ درصد رد می‌شود. . . . . ۶۳

## فصل ۱

# معرفی توابع مفصل و مدل‌های ارشمیدسی این توابع

### مقدمه و پیشینه مطالعه توابع مفصل

تابع مفصل و کاربردهای آن در آمار از جمله مباحث مهم و نسبتاً جدید می‌باشد. نظریه مفصل اولین بار توسط اسکالر در سال ۱۹۵۹ مطرح شد و اصطلاح تابع مفصل را به این توابع اختصاص داد. [۴۵] این نظریه به دنبال پاسخ به چگونگی ارتباط یک تابع توزیع چند متغیره با توزیع‌های حاشیه‌ای یک بعدی که توسط فرشه مطرح شده بود، به وجود آمد. اولین مقاله مرتبط با توابع مفصل که مطالعه‌ای در زمینه وابستگی بین متغیرهای تصادفی بود، در سال ۱۹۸۱ توسط اسپیوایزر و ولف ارائه شد و در سال ۱۹۹۷، جو و در سال ۱۹۹۹، نلسن در جهت شناخت و معرفی توابع مفصل کتاب و مقالاتی ارائه کردند. [۳۳] هم‌اکنون دپارتمان‌های علمی زیادی بر روی چگونگی و کاربرد توابع مفصل در مدیریت ریسک مطالعه و بررسی‌های علمی و کاربردی انجام می‌دهند. بین سال‌های ۱۹۵۹ تا ۱۹۷۶ بیشتر نتایج و مطالعات به دست آمده در مورد توابع مفصل به وسیله فضاهای احتمال متریک نشان داده شده و توسعه یافتند. [۸] ساختار وابستگی بین متغیرهای تصادفی یکی از گسترده‌ترین موضوعات مورد مطالعه در احتمال و آمار است.

در مورد ضرورت مطالعه توابع مفصل دلایل متعددی وجود دارد که مهم‌ترین آن مفید بودن این توابع در ساخت و بررسی توزیع‌های چند متغیره است. ساخت توزیع‌های توأم و بررسی ویژگی‌های آن‌ها با توزیع‌های حاشیه‌ای معلوم در صورت عدم استقلال متغیرها کار پیچیده‌ای است. تابع مفصل برای ساخت یا بررسی توزیع‌های چند متغیره وقتی که توزیع‌های حاشیه‌ای یک متغیره و ساختار وابستگی آن‌ها داده شده است، بسیار مفید است. تابع مفصل ابزار مفیدی برای ساختار وابستگی می‌باشد.

## ۱.۱ تعریف تابع مفصل

تابع مفصل ابزاری است که ارتباط بین یک تابع توزیع چند متغیره با توزیع‌های حاشیه‌ای یک بعدی آن و ساختار وابستگی آن را نشان می‌دهد. در بیشتر مقالات و کتاب‌های آماری دو نوع تعریف برای تابع مفصل ارائه شده است هر دو تعریف برای حالت دو متغیره بیان می‌شود، یک تابع مفصل دو متغیره تابع توزیع بر روی  $[0, 1] \times [0, 1]$  با توزیع‌های حاشیه‌ای یکنواخت می‌باشد این تعریف ساده و غیر رسمی از توزیع و تابع مفصل است.

اگر  $(X, Y)$  یک جفت متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع توأم  $H(X, Y)$  و توزیع‌های حاشیه‌ای  $F_X(x)$  و  $F_Y(y)$  باشد. با توجه به این که  $V = F_Y(y) \sim U(0, 1)$  و  $U = F_X(x) \sim U(0, 1)$ ، در این صورت تابع توزیع  $C(u, v)$  تعریف شده به صورت زیر است:

$$C(u, v) = p(U \leq u, V \leq v) = p(X \leq F_X^{-1}(u), Y \leq F_Y^{-1}(v))$$

$$C(u, v) = H(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v))$$

این یک تعریف غیر رسمی ولی متعارف تابع مفصل می‌باشد.

### تعریف رسمی تابع مفصل

$C$  مفصل است اگر:  $C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  با شرایط ذیل:

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0 \quad ۱.$$

$$C(u, 1) = u, C(1, v) = v \quad ۲.$$

۳. اگر  $u_2 \geq u_1, v_2 \geq v_1$  آن‌گاه

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

که شرط سوم نشان می‌دهد تابع مفصل تابعی غیر نزولی است.

### تابع مفصل برای حالت $n$ متغیره

تعریف: یک تابع مفصل چند بعدی  $C$  با شرایط و مشخصات زیر تعریف می‌شود:

$$C: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$$

به شرطی که:

۱. برای هر  $u = (u_1, \dots, u_n)$  از  $[0, 1]^n$ ،  $C(u) = 0$  اگر حداقل یکی از  $u_i$  ها صفر باشد وقتی  $i = 1, 2, \dots, n$ .

۲.  $C$  یک تابع صعودی است یعنی برای هر  $\underline{u}$  از  $[0, 1]^n$  و  $\underline{v}$  از  $[0, 1]^n$  به طوری که  $\underline{u} \leq \underline{v}$ ، آن گاه حجم فضای  $[\underline{u}, \underline{v}]$  از جعبه  $[\underline{u}, \underline{v}]$  نامنفی باشد.

۳. برای هر  $u_i \in [0, 1]$  به ازای  $i = 1, \dots, n$ ،  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ ،  $i = 1, \dots, n$  برقرار است.

### یک تعریف غیر رسمی برای تابع مفصل چند متغیره

فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع توزیع توأم  $H(x_1, \dots, x_n)$  و توزیع‌های حاشیه‌ای  $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$  برای هر یک از متغیرهای تصادفی  $X_1, \dots, X_n$  به ترتیب می‌باشد. برای هر داده  $(x_1, \dots, x_n)$  از  $(-\infty, 1]^n$  نقطه‌ای در  $[0, 1]^{n+1}$  وجود دارد که  $(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n), H(x_1, \dots, x_n))$  که این تابعی از  $[0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  است و به آن تابع چند متغیره مفصل<sup>۱</sup> می‌گویند. هر دو تعریف رسمی و غیر رسمی تابع مفصل براساس قضیه مهم اسکالر به هم ارتباط پیدا می‌کند. این قضیه چگونگی ارتباط بین تابع توزیع چند متغیره با توزیع‌های حاشیه‌ای یک بعدی را نشان می‌دهد.

**قضیه اسکالر:** فرض کنید  $H$  تابع توزیع  $n$  بعدی با حاشیه‌های  $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$  باشد و هم چنین یک تابع مفصل  $n$  متغیره به نام  $C$  وجود دارد که برای همه  $(x_1, \dots, x_n)$  بر روی  $(-\infty, 1]^n$  داشته باشیم:

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)) \quad (1.1)$$

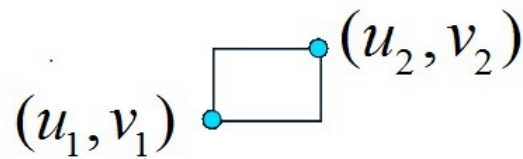
بنابراین اگر  $C$  یک تابع مفصل  $n$  بعدی و  $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$  تابع توزیع‌ها باشند و تابع  $H$  با (۱.۱) تعریف شده باشد، آن گاه  $H$  یک تابع توزیع با حاشیه‌ای‌های  $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$  است اگر این توزیع‌های حاشیه‌ای پیوسته باشند،  $C$  یکتاست در غیر این صورت  $C$  به طور یکنواخت بر روی  $\text{Rank} F_{X_1} \times \dots \times \text{Rank} F_{X_n}$  تعیین شده است.

تابع مفصل یکی از ابزارهای بسیار مهم و مفید برای کاهش ابعاد توزیع‌های چند متغیره به حاشیه‌های یکنواخت شناخته شده است.

یک تابع توزیع توأم مانند  $H$  با تابع توزیع حاشیه‌های پیوسته  $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$  طبق قضیه اسکالر به سادگی تبدیل به ساختار تابع مفصل می‌شود. در واقع اگر  $C$  تابع مفصل باشد داریم:

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_n}^{-1}(u_n))$$

<sup>۱</sup>nCopula

شکل ۱.۱:  $H$ -حجم

که  $F_{X_i}^{-1}$  تابع معکوس تابع توزیع  $F_{X_i}$  است و داریم:

$$F_{X_i}^{-1}(u_i) = \sup \left\{ x_i \mid F_{X_i}(x_i) \leq u_i \right\} \quad i = 1, \dots, n$$

توجه داشته باشید اگر  $X_1, \dots, X_n$  همه متغیرهای پیوسته تصادفی با تابع توزیع فوق باشند آن گاه  $C$  تابع توزیع توأم برای متغیرهای تصادفی  $U_i = F_{X_i}(x_i)$  (که  $U_i$  ها دارای توزیع یکنواخت هستند) می‌باشد. این براساس یک قضیه برای متغیرهای تصادفی پیوسته که در احتمال ثابت شده است، بیان می‌شود.

### ۱.۱.۱ ویژگی‌های توابع مفصل

قبل از معرفی ویژگی‌ها بعضی مفاهیم تعریف می‌شود؛ در تعاریف زیر  $S_1, S_2$  زیر مجموعه‌های ناتهی از  $R = (-\infty, \infty)$  هستند.

۱. تابع دو بعدی حقیقی  $H$ ، تابعی است که دامنه‌اش زیر مجموعه‌ی  $R^2$  و برد آن زیر مجموعه  $R$  باشد.

$$H : R^2 = R \times R \rightarrow R = [-\infty, \infty]$$

۲.  $H$  حجم: اگر  $H$  تابع دو بعدی حقیقی با دامنه  $S_1 \times S_2$  و  $B$  یک مستطیل به صورت  $B = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$  باشد که رئوس آن در دامنه‌ی  $H$  قرار دارد،  $H$ -حجم  $B$  با نماد  $V_H(B)$  نشان داده شده و به صورت

$$V_H(B) = H(u_1, v_2) - H(u_1, v_1) + H(u_2, v_2)$$

تعریف می‌شود. (شکل ۱.۱)

۳. تابع دو بعدی حقیقی  $H$  تابع دو صعودی<sup>۲</sup> نامیده می‌شود. اگر به ازای هر مستطیل مانند  $B$  که رئوس آن در دامنه  $H$  قرار دارد، آن گاه  $V_H(B) \geq 0$  باشد.

لم ۱.۱.۱. اگر  $H$  تابع ۲-صعودی روی  $S_1 \times S_2$  باشد به ازای

$$\begin{cases} u_1, u_2 \in S_1, & u_1 \leq u_2 \\ v_1, v_2 \in S_2, & v_1 \leq v_2 \end{cases}$$

آن گاه تابع

$$t \rightarrow H(t, v_2) - H(t, v_1)$$

روی  $S_1$  و تابع

$$t \rightarrow H(t, u_2) - H(t, u_1)$$

روی  $S_2$  غیر نزولی هستند. این لم با توجه به این که تابع  $H$  یک تابع ۲-صعودی است واضح است. [۳۳]

تابع مفصل یک  $C$  -حجم در محدوده  $[0, u] \times [0, v]$  می‌باشد. طبق تعریف می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$C(u, v) = V_c([0, u] \times [0, v])$$

در واقع تابع مفصل عددی در مستطیل  $[0, 1] \times [0, 1]$  و نامنفی است.

$$C(u, v) = V_c([0, u], [0, v]) = V_c(A) + V_c(B) + V_c(C) + V_c(D)$$

مثال ۲.۱.۱. تابع مفصل مستقل که به صورت زیر می‌باشد.

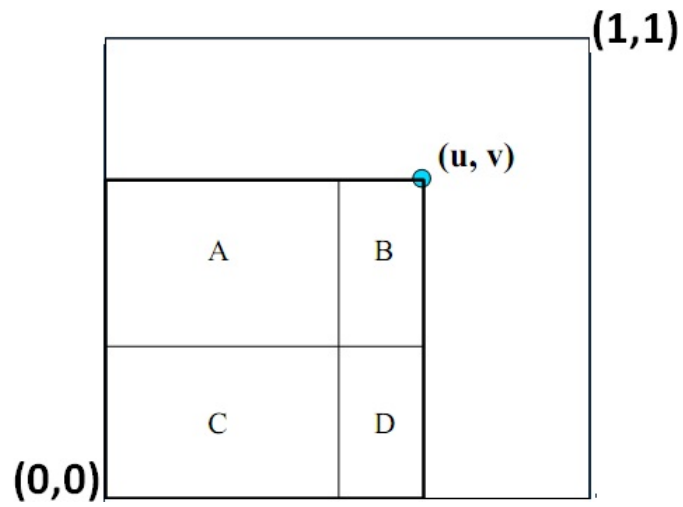
$$C(u, v) = u \times v, \quad u \in [0, 1]^2$$

و با توجه به شکل تابع مفصل مستقل، به این مفصل، مفصل ضربی هم می‌گویند. (شکل ۳.۱)

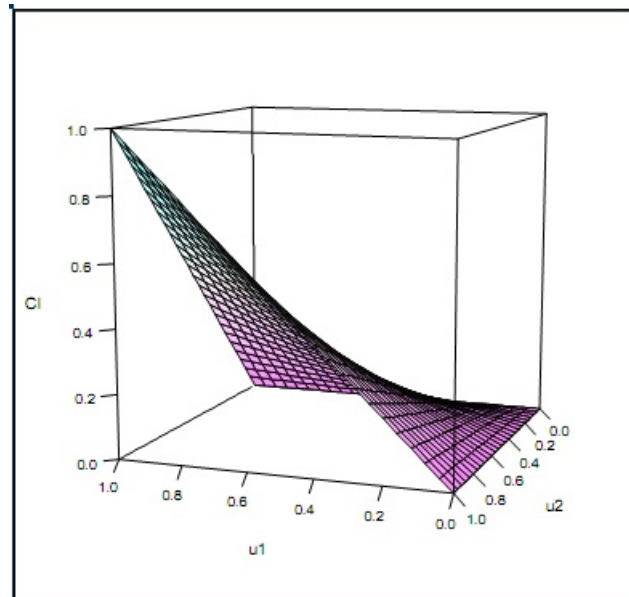
قضیه ۳.۱.۱. یک مفصل دو بعدی مانند  $C$  تابعی از  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  با ویژگی‌های زیر است:

<sup>۲</sup>2-increasing





شکل ۲.۱: تابع مفصل  $c$ -حجم



شکل ۳.۱: تابع مفصل مستقل

(۱) (شرط کرانداری) برای هر  $u$ ،  $z$  در  $[0, 1]$  رابطه زیر برقرار باشد:

$$C(u, 0) = C(0, z) = 0, \quad C(u, 1) = u, \quad C(1, z) = z$$

(۲) (شرط یکنوایی) برای هر مستطیل  $[u_1, u_2] \times [z_1, z_2]$  در  $[0, 1]$  که  $u_1 \leq u_2$  و  $z_1 \leq z_2$  رابطه زیر برقرار باشد:

$$C(u_2, z_2) - C(u_2, z_1) - C(u_1, z_2) + C(u_1, z_1) \geq 0$$

□ برهان. به کتاب نلسن<sup>۳</sup> (۱۹۹۹) مراجعه شود. [۳۳]

قضیه ۴.۱.۱. توابع مفصل در نامساوی زیر صدق می‌کنند:

$$W(u, z) = \max(u + z - 1, 0) \leq C(u, z) \leq \min(u, z) = M(u, z)$$

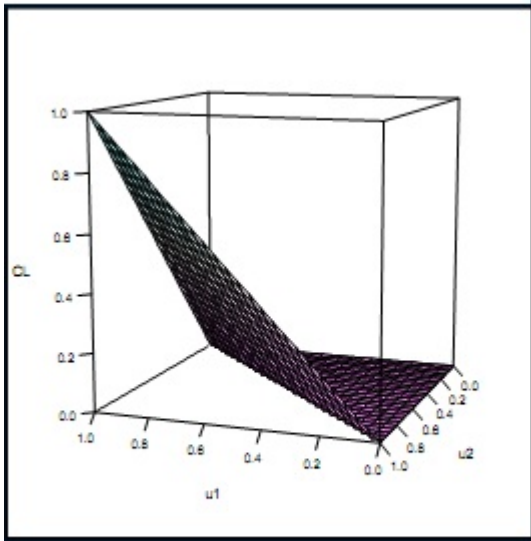
برای هر  $(u, z) \in [0, 1]$ . این قضیه برای توابع مفصل  $k$  بعدی هم قابل تعمیم می‌باشد. کران پایین نامساوی فوق را با  $C^-$  و کران بالا را با  $C^+$  نشان می‌دهند.

□ برهان. به کتاب نلسن مراجعه شود. [۳۳]

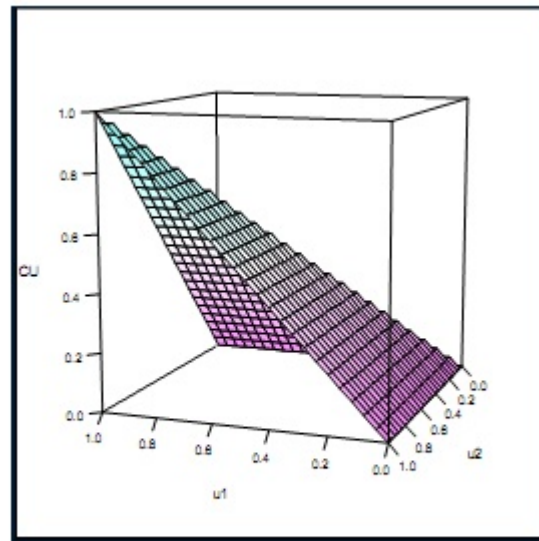
به این کران‌های تابع مفصل کران پایین فرشه  $C_L$  و کران بالای فرشه  $C_U$  نیز گفته می‌شود. که در نمودارهای زیر نشان داده می‌شود. (شکل ۴.۱ الف و ب) هر تابع مفصل را می‌توان با استفاده از مفصل‌های کران بالا و پایین فرشه، به صورت زیر کران بندی کرد:

$$C_L(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq C_U(u_1, u_2), \quad \forall u \in [0, 1]^2$$

<sup>۳</sup>Nelsen

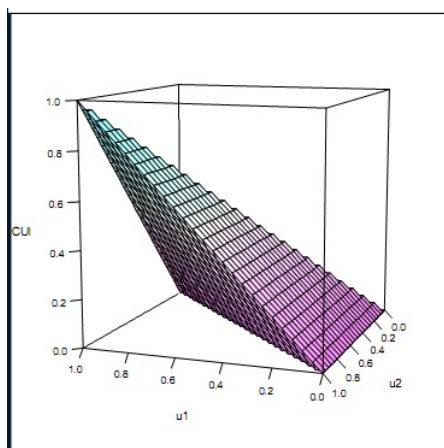


(الف)



(ب)

شکل ۴.۱: شکل (الف) مفصل کران پایین فرشه و شکل (ب) مفصل بالای فرشه می‌باشد.



شکل ۵.۱: کران بندی تابع مفصل

## ۲.۱ خانواده‌هایی از توابع مفصل

در این بخش چند خانواده از توابع مفصل به همراه تابع چگالی آن‌ها معرفی شده و برخی از اندازه‌های وابستگی حاصل از آن‌ها ارائه می‌شود.

از معروف‌ترین مفصل، خانواده مفصل بیضوی<sup>۴</sup> و ارشمیدسی<sup>۵</sup> هستند. خانواده ارشمیدسی دارای شکل ریاضی ساده و خاصیت شرکت‌پذیری است. در صورتی که خانواده مفصل بیضوی مانند گاوسی (نرمال) و  $t$ -استودنت دارای ساختار پیچیده‌تری اند. خانواده توابع بیضوی نظیر تابع مفصل گاوسی در اقتصادسنجی و مطالعات روش‌های مالی اهمیت ویژه دارد.

### مفصل گاوسی<sup>۶</sup> (نرمال)

خانواده تابع مفصل گاوسی به صورت

$$C^{Ga}(u, v; \rho) = \Phi_{\rho}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) \quad (1.2)$$

است، که در آن  $\Phi_{\rho}$  تابع توزیع نرمال استاندارد دو متغیره با ضریب همبستگی  $\rho$  است. با توجه به رابطه (۱.۲) تابع توزیع توأم به صورت

$$\Phi_{\rho}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{2uv\rho - u^2 - v^2}{1-\rho^2}\right\} dudv$$

ساده می‌شود.

تابع مفصل چگالی توأم خانواده گاوسی نیز به صورت

$$c^{Ga}(u, v; \rho) = \frac{1}{1-\rho^2} \exp\left\{-\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{2uv\rho - u^2 - v^2}{1-\rho^2}\right\}$$

است.

مفصل نرمال (گاوسی) چند متغیره فرم زیر را دارد:

$$C(u_1, \dots, u_k, \dots, u_K) = \phi_G[\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_k), \dots, \phi^{-1}(u_K); \theta] \quad (1.3)$$

<sup>۴</sup> Elliptical Copula

<sup>۵</sup> Archimedean Copula

<sup>۶</sup> Gaussian Copula