بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی - آنالیز عددی

بررسی بعضی از پارامترها روی عدد ژئودتیک گراف‌ها

استاد راهنما:
دکتر حسین عبداله زاده آهنگر

استاد مشاور:
پروفسور سید محمود شیخ الاسلامی

نگارش:
مریم نجیمی گشتاسب

بهمن ۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
دانشکده علوم پایه گروه ریاضی

رساله کارشناسی ارشد

بررسی بعضی از پارامترها روی عدد ژئودتیک گراف‌ها

نگارش: مریم نجیمی گشتاسب

استاد راهنما: دکتر حسین عبداله زاده آهنگر — امضاء:

استاد مشاور: پروفسور سید محمود شیخ الاسلامی — امضاء:

استاد هیئت داوری: پروفسور دوستعلی مژده — امضاء:

استاد هیئت داوری: دکتر محمود بهروزی فر — امضاء:

تقدیم به

مادر مهربان و فداکارم که با صبوری در تمام مراحل زندگی همراهم بوده

و برادران عزیزتر از جانم ، محمدرضا و محمدعلی که همیشه حامی من بوده اند.

قدردانی

حمد و سپاس پروردگار هستی را که به استعانت از او توفیق آن را پیدا نمودم تا از اقیانوس بیکران علم و دانش توشه‌ای برگیرم. بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر حسین عبداله زاده آهنگر که به پاس انگیزه‌ها و امیدواری‌هایشان در امر پژوهش، اینجانب را از راهنمایی‌های بی‌دریغشان بهره‌مند ساخته‌اند صمیمانه سپاسگزاری نمایم. همچنین از استاد مشاورم جناب آقای پروفسور سید محمود شیخ الاسلامی به خاطر قبول زحمت مشاوره‌ی این پایان نامه سپاسگزاری می‌کنم. در نهایت سپاس بی‌شائبه دارم از مادر و برداران عزیزم، محمدرضا و محمدعلی که در راه رشد و تربیتم از هیچ کوششي دریغ نکرده‌اند، اگر چه هیچ سپاسي نمي تواند جبران رنج‌ها و مشقت‌هاي این عزیزان در طول زندگي‌ام باشد، دستان پرمهرشان را می‌بوسم. در ادامه از دوستان گرانقدرم به خصوص جناب مهندس علی اکبر عباسی، سرکار خانم دکتر مرضیه ایزدی و مهلا خیبری به خاطر کمک در مسیر انجام این پژوهش کمال تشکر را دارم .

چکیده

برای هر راس u و v از گراف G، مجموعه‌ی $I[u,v]$ شامل تمام راس‌هایی است که در مسیرهای ژئودتیک $u-v$ از گراف G قرار دارد. اگر S زیر مجموعه‌ای از راس‌های گراف G باشد، آنگاه $I[S]$ اجتماع تمام مجموعه‌های $I[u,v]$ برای $u,v \in S$ است. مجموعه‌ی $S \subseteq V(G)$ یک مجموعه‌ی ژئودتیک است اگر $I[S] = V(G)$. به کوچکترین اندازه‌ی مجموعه‌های ژئودتیک در گراف G عدد ژئودتیک گویند و با $g(G)$ نشان می‌دهند. مجموعه‌ی ژئودتیک $S \subseteq V(G)$ یک مجموعه‌ی ژئودتیک تام است اگر $G[S]$ شامل راس تنها نباشد. به کوچکترین اندازه‌ی مجموعه‌های ژئودتیک تام در گراف G عدد ژئودتیک تام گویند و با $g_t(G)$ نشان می‌دهند. مجموعه‌ی ژئودتیک $S \subseteq V(G)$ یک مجموعه‌ی ژئودتیک تام مهارشونده است اگر $G[S]$ و $G[V(G)-S]$ شامل راس تنها نباشند. به کوچکترین اندازه‌ی مجموعه‌های ژئودتیک تام مهارشونده در گراف G عدد ژئودتیک تام مهارشونده گویند و با $g_{tr}(G)$ نشان می‌دهند. در این پایان نامه توصیف کاملی از گراف G به طوری‌که دارای راس تکیه گاهی و راس سادکی نباشد و $g_{tr}(G) = |V(G)|$، را ارائه دادیم. همچنین شرط لازم و کافی را برای سه‌تایی (a,b,c) از اعداد صحیح به‌طوری‌که گراف همبند غیر بدیهی G برای

(i) $a = g(G)$، $b = g_{tr}(G)$، $c = |V(G)|$؛

(ii) $a = g_t(G)$، $b = g_{tr}(G)$، $c = |V(G)|$؛

(iii) $a = rad(G)$، $b = diam(G)$، $c = g_{tr}(G)$

قابل حصول باشد، بررسی می‌کنیم. سپس شرط لازم و کافی را برای $g_{tr}(G) = n$ شناسایی می‌کنیم همچنین به بررسی زوج (a,b) از اعداد صحیح به طوری‌که گراف همبند غیر بدیهی G برای $a = g_{tr}(G)$، $b = f_{tr}(G)$ قابل حصول باشد، می‌پردازیم و در نهایت برای سه‌تایی (a,b,c) از اعداد صحیح به طوری‌که گراف همبند غیر بدیهی G برای $a = g_{tr}(G)$، $b = f_{tr}(G)$، $c = |V(G)|$ قابل حصول باشد، را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: عدد ژئودتیک، عدد ژئودتیک تام، عدد ژئودتیک تام مهار شونده، عدد تحمیل کننده‌ی ژئودتیک، عدد تحمیل کننده‌ی ژئودتیک تام، عدد تحمیل کننده‌ی ژئودتیک تام مهارشونده.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در این رساله سعی شده است با بررسی مجموعه‌ی ژئودتیک، عدد ژئودتیک، مجموعه‌ی ژئودتیک تام و نیز عدد ژئودتیک تام برای گراف‌ها، پارامتر جدید عدد ژئودتیک تام مهارشونده روی گراف را تعریف کرده و به بررسی آن پرداخته شود. همچنین بررسی پارامتر عدد تحمیل کننده روی مجموعه‌ی ژئودتیک تام مهارشونده را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. مسئله‌ی ژئودتیک در گراف‌ها یکی از مسائل تعیین موقعیت می‌باشد، کاربرد این مسئله را می‌توان در نظریه همگرایی و مکانی مشاهده کرد. علاوه براین می‌توان به کاربرد آن در مدل سازی تصاویر سونوگرافی اشاره نمود. در مدل‌سازی تصاویر سونوگرافی به عنوان مثال یافتن و مدل سازی توده سرطانی در محدوده‌ای از بدن احتیاج به یافتن موقعیت‌های مکانی غدد سرطانی با استفاده از الگوریتم‌های ژنتیک یا الگوریتم‌های بهینه سازی داریم. تعیین موقعیت‌های مکانی توسط الگوریتم‌های اشاره شده یک مسئله $NP-hard$ است زیرا از نظر محاسباتی و حجم داده‌ای بهینه نمی‌باشد. لذا ما باید به دنبال کمترین تعداد موقعیت‌های مکانی باشیم که تصاویر با سرعت بیشتری مدل‌سازی شوند.

این پایان نامه شامل ۴ فصل می‌باشد که به صورت زیر تنظیم شده است.

در فصل اول پیش نیازها و تعاریف مورد نیاز در سه فصل آتی را ارائه می‌دهیم [۹، ۵].

در فصل دوم به بررسی عدد ژئودتیک در گراف‌ها می‌پردازیم و به بحث مختصری، پیرامون عدد ژئودتیک همبند و عدد تحمیل کننده‌ی ژئودتیک ارائه می‌دهیم [۱۵، ۱۴، ۱۳، ۱۲، ۸، ۳، ۲].

در فصل سوم عدد ژئودتیک تام و عدد تحمیل کننده‌ی ژئودتیک تام روی گراف‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم [۱].

در فصل چهارم عدد ژئودتیک تام مهارشونده و عدد تحمیل کننده‌ی ژئودتیک تام مهارشونده روی گراف‌ها را بیان کرده و به بررسی ویژگی‌های آن‌ها روی گراف‌ها می‌پردازیم.

فصل ۱

تعاریف مقدماتی و پیش نیازها

مقدمه:

در این فصل ما مفاهیم و تعاریف مقدماتی مورد نیاز برای فصل‌های بعد را بیان می‌کنیم. برای مطالعه‌ی بیشتر مفاهیم و تعاریف مقدماتی دیگر به [۹، ۵] رجوع کنید.

تعریف ۱.۰.۱. گراف: در حالت کلی مجموعه‌ای از اشیاء و روابط روی آنها را گراف گویند. معمولاً گراف را به صورت $G = (V, E)$ نشان می‌دهند که در آن V مجموعه‌ای از نقاط (به‌نام راس‌ها) و E مجموعه‌ای از دوتایی‌های نامرتب روی V (به‌نام یال) می‌باشد.

تعریف ۲.۰.۱. زیر گراف: فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف دلخواه باشد. گراف $G' = (V', E')$ را یک زیر گراف G می‌نامند هرگاه $E' \subseteq E$ و $V' \subseteq V$.

تعریف ۳.۰.۱. زیر گراف القایی: فرض کنید V' زیر مجموعه‌ی ناتهی از V باشد. زیر گراف G را که مجموعه راس‌هایش V' است و مجموعه‌ی یال‌هایش مجموعه‌ای از یال‌های G است که هر دو انتهایشان در V' است، زیر گراف G، القاء شده به‌وسیله‌ی V' می‌نامند که به صورت $G[V']$ نشان می‌دهند.

تعریف ۴.۰.۱. مجاور: یک یال بین دو راس u و v را با $\{u, v\}$ یا uv نشان می‌دهند، که در این حالت u و v را دو راس مجاور (همسایه) می‌نامند.

تعریف ۵.۰.۱. همسایگی باز و بسته راس v: مجموعه متشکل از همه راس‌هایی که با راس v مجاورند، همسایگی باز راس v نامند و با $N(v)$ نشان می‌دهند. همسایگی بسته‌ی راس v عبارت است از:

$$N[v] = N(v) \cup \{v\}.$$

تعریف ۶.۰.۱. درجه: تعداد یال‌های گذرنده از راس دلخواه v در گراف G را درجه‌ی راس v نامیده و با

$deg_G(v)$ نشان می‌دهند. کمترین درجه‌ی گراف را با $\delta(G)$ و بیشترین درجه را با $\Delta(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۷.۰.۱. برگ: در هر گراف راس‌های از درجه‌ی یک را برگ می‌گوئیم. مجموعه‌ی همه‌ی برگ‌های گراف G را با $\Omega(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۰.۱. راس تکیه‌گاهی: راس مجاور با حداقل یک برگ را راس تکیه‌گاهی می‌گویند. مجموعه‌ی همه‌ی راس‌های تکیه‌گاهی در یک گراف دلخواه G را با $Stem(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۰.۱. راس برشی: راس v از گراف G راس برشی است اگر $V(G)$ بتواند به دو زیر مجموعه ناتهی $E_۱$ و $E_۲$ افراز شود به طوری که $G[E_۱]$ و $G[E_۲]$ تنها در راس v مشترک باشند.

تعریف ۱۰.۰.۱. مجموعه مستقل: زیر مجموعه S از $V(G)$ را یک مجموعه مستقل از گراف G می‌نامند اگر هیچ دو راسی از S در G مجاور نباشد.

تعریف ۱۱.۰.۱. گشت: در گراف G دنباله‌ی ناتهی $W = v_۰e_۱v_۱e_۲v_۲\ldots e_kv_k$ که جمله‌های آن به‌صورت تناوبی از راس و یال است، را گشت گویند به قسمی که برای $۱ \leq i \leq k$، دوانتهای e_i، $v_{i-۱}$ و v_i هستند.

تعریف ۱۲.۰.۱. گذر: اگر یال‌های $e_۱$، $e_۲$، $\ldots$، e_kی گشت W مجزا باشند، W را گذر می‌گویند.

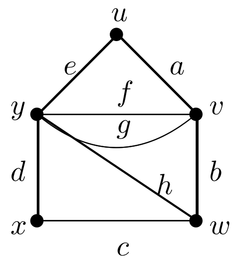
تعریف ۱۳.۰.۱. مسیر: اگر W یک گذر باشد به‌طوری که راس‌های $v_۰$، $v_۱$، $\ldots$، v_k مجزا باشند، W را یک مسیر می‌نامند.

مثال ۱۴.۰.۱. گشت، گذر و مسیر در گراف $G_۱$ در شکل ۱.۱ به‌صورت زیر مشخص شده است.

گشت: $uavfyfvgyhwbv$

گذر: $wcxdyhwbvgy$

مسیر: $xcwhyeuav$



شکل ۱.۱: گراف G_1

تعریف ۱.۰.۱۵. دور: یک مسیر بسته از مرتبه‌ی n را دور n راسی می‌گویند و با C_n نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۰.۱۶. کمر: طول کوتاهترین دور در گراف G را کمر گویند و با $girth(G)$ نشان می‌دهند. اگر گراف G شامل دور نباشد، کمر آن ∞ است.

مثال ۱.۰.۱۷. با توجه به مثال ۱.۰.۱۴ در گراف $G_1 - g$ کمر برابر ۳ است.

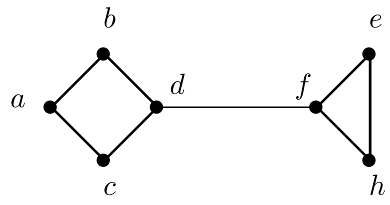
تعریف ۱.۰.۱۸. گراف بی دور: به گرافی که شامل هیچ دوری نباشد، گراف بی دور گویند.

تعریف ۱.۰.۱۹. خروج از مرکز: فرض کنید v یک راس از گراف G باشد. فاصله‌ی دورترین راس نسبت به راس v را خروج از مرکز راس v می‌گویند و با $e(v)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۰.۲۰. شعاع: کوچکترین خروج از مرکز راس‌های گراف را شعاع گراف گویند و با $rad(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۰.۲۱. قطر: بزرگترین خروج از مرکز راس‌های گراف را قطر گراف گویند و با $diam(G)$ نشان می‌دهند.

مثال ۲۲.۰.۱. در شکل زیر خروج از مرکز هر راس از گراف $G_۲$ و همچنین شعاع و قطر آن را به‌صورت زیر بدست می‌آوریم.

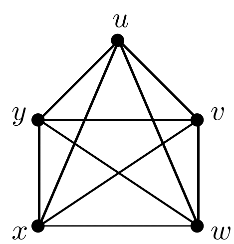


شکل ۲.۱: گراف $G_۲$

$$e(a) = e(e) = e(h) = ۴,\ e(b) = e(c) = e(f) = ۳,\ e(d) = ۲$$

$$diam(G) = ۴,\ \ rad(G) = ۲$$

تعریف ۲۳.۰.۱. گراف کامل: گراف ساده‌ی G از مرتبه‌ی n که هر جفت از راس‌های آن مجاور باشند را گراف کامل گویند و با K_n نشان داده می‌شود. شکل ۳.۱ گراف $K_۵$ رانشان می‌دهد.



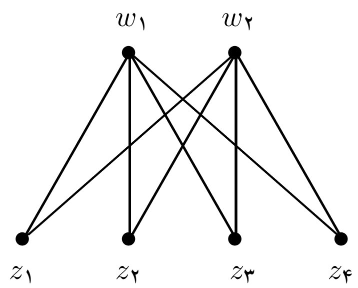
شکل ۳.۱: گراف $K_۵$

تعریف ۲۴.۰.۱. مجموعه راس‌های سادکی: مجموعه راس‌هایی از گراف G است که برای هر راس آن مانند v، زیر گراف القاء شده توسط $N(v)$ یعنی $G[N(v)]$ یک گراف کامل باشد. مجموعه راس‌های سادکی را با $Ext(G)$ نشان می‌دهند و $|Ext(G)| = ex(G)$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲۵.۰.۱. گراف دوبخشی: گرافی است که مجموعه راس‌های آن را به دو زیر مجموعه‌ی غیر تهی $V_۱$ و $V_۲$ افراز شود، به‌طوری که هر یال دارای یک انتها در $V_۱$ و یک انتها در $V_۲$ باشد. گراف دو بخشی

کامل، یک گراف دوبخشی ساده با افراز $(V_۱, V_۲)$ است که در آن هر راس از $V_۱$ با هر راس از $V_۲$ مجاور باشد. گراف دوبخشی کامل را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهند که در آن $|V_۱(G)| = m$ و $|V_۲(G)| = n$.

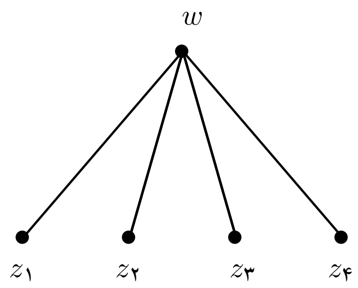
مثال ۲۶.۰.۱. گراف زیر یک گراف دوبخشی کامل $K_{۲,۴}$ با مجموعه راس‌های $V_۱ = \{w_۱, w_۲\}$ و $V_۲ = \{z_۱, z_۲, \ldots, z_۴\}$ می‌باشد.



شکل ۴.۱: گراف $K_{۲,۴}$

تعریف ۲۷.۰.۱. گراف ستاره: گراف دوبخشی $K_{۱,m}$ راگراف ستاره گویند.

مثال ۲۸.۰.۱. گراف زیر یک گراف ستاره $K_{۱,۴}$ با مجموعه راس‌های $V_۱ = \{w_۱\}$ و $V_۲ = \{z_۱, z_۲, \ldots, z_۴\}$ می‌باشد.



شکل ۵.۱: گراف $K_{۱,۴}$

تعریف ۲۹.۰.۱. گراف تاج: گراف G از مرتبه‌ی n که به هر راس آن یک برگ متصل باشد را گراف تاج گویند و با $G \circ K_1$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳۰.۰.۱. گراف منتظم:گراف G، k-منتظم است اگر به ازای هر $v \in V(G)$، $deg(v) = k$. گراف منتظم گرافی است که به ازای k یی، k- منتظم باشد.

تعریف ۳۱.۰.۱. گراف همبند: گرافی است که بین هر دو راس آن یک مسیر وجود داشته باشد.

تعریف ۳۲.۰.۱. مولفه‌ی همبندی: هر زیر گراف همبند ماکسیمال از گراف G را یک مولفه‌ی همبندی G گویند. (زیر گراف همبند ماکسیمال زیر گرافی است که هیچ زیر گراف دیگری از G شامل آن نباشد.)

تعریف ۳۳.۰.۱. گراف ناهمبند: گرافی که همبند نباشد را ناهمبند گویند.

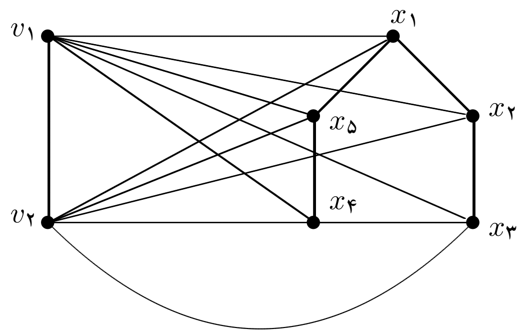
تعریف ۳۴.۰.۱. گراف ناتهی: گرافی است که شامل حداقل یک یال باشد.

تعریف ۳۵.۰.۱. درخت: گراف همبندی که شامل هیچ دوری نباشد را درخت گویند که با T نشان می‌دهند.

قضیه ۳۶.۰.۱. *اجتماع دو گراف: دو گراف دلخواه G_1 و G_2 را در نظر بگیرید. از کنار هم قرار دادن گراف‌های G_1 و G_2 اجتماع دو گراف بدست می‌آید که آن را با $G_1 \cup G_2$ نشان می‌دهند.*

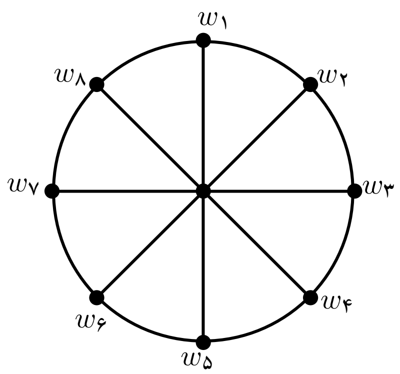
قضیه ۳۷.۰.۱. جمع دو گراف: *دو گراف دلخواه G_1 و G_2 را در نظر بگیرید. اگر هر راس از گراف G_1 را به هر راس از گراف G_2 متصل کنیم، گراف حاصل را جمع دوگراف گویند و با $G_1 \vee G_2$ نشان می‌دهند.*

مثال ۳۸.۰.۱. گراف C_5 و K_2 را در نظربگیرید. گراف $C_5 \vee K_2$ به صورت زیر است.



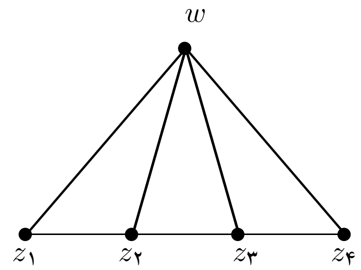
شکل ۶.۱: گراف $C_۵ \vee K_۲$

تعریف ۳۹.۰.۱. چرخ: گراف C_n و راس تنهای x را در نظربگیرید.گراف $W_{۱,n} = C_n \vee \{x\}$ را چرخ گویند. گراف $C_۸$ با مجموعه راس‌های $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_۸\}$ و راس تنهای x را در نظربگیرید. گراف $W_{۱,۸}$ به صورت زیر است.



شکل ۷.۱: گراف $W_{۱,۸}$

تعریف ۴۰.۰.۱. فن: گراف P_n و راس تنهای x را در نظربگیرید.گراف $F_{۱,n} = P_n \vee \{x\}$ را فن گویند. گراف $P_۴$ با مجموعه راس‌های $\{z_۱, z_۲, \ldots, z_۴\}$ و راس تنهای x را در نظربگیرید. گراف $F_{۱,۴}$ به صورت زیر است.

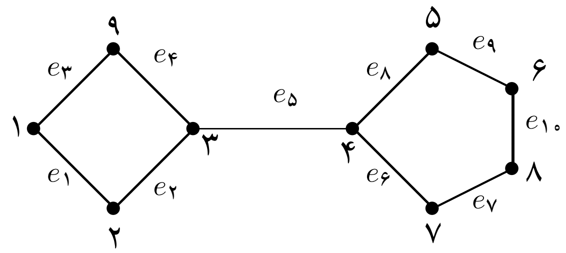


شکل ۸.۱: گراف $F_{۱,۴}$

تعریف ۴۱.۰.۱. تطابق: مجموعه‌ای از یال‌های گراف G که هیچ دو یال متمایز آن راس مشترک نداشته باشند را یک تطابق در G گویند.

تعریف ۴۲.۰.۱. تطابق ماکسیمال: یک تطابق M را ماکسیمال گویند اگر هیچ تطابق دیگری بجز M شامل تطابق M نباشد.

مثال ۴۳.۰.۱. در گراف زیر تطابق ماکسیمال M به صورت زیر نشان داده شده است.



شکل ۹.۱: گراف G_M

$$M = \{e_۱, e_۴, e_۸, e_{۱۰}\}$$

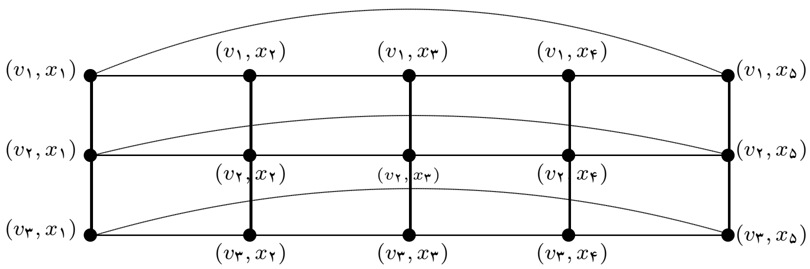
ملاحظه ۴۴.۰.۱. *گراف $K_{۲\times n}$: گراف بدست آمده از گراف کامل K_n با از بین بردن تطابق کامل آن به ازای n زوج بدست می‌آید را گراف $K_{۲\times n}$ گوییم.*

تعریف ۴۵.۰.۱. ضرب دکارتی دوگراف: حاصلضرب دکارتی دو گراف G_1 و G_2 گرافی است با مجموعه راس‌های $V(G_1) \times V(G_2)$ و مجموعه یال‌های آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{(e_1, e_2)(e'_1, e'_2) | \ (e_1 e'_1 \in E(G_1) \wedge e_2 = e'_2) \vee e_2 e'_2 \in E(G_2) \wedge e_1 = e'_1\}.$$

مثال ۴۶.۰.۱. در این مثال ضرب دکارتی دو گراف C_5 و P_3 را نشان می‌دهیم.

مجموعه راس‌های گراف‌های C_5 و P_3 را به ترتیب به صورت $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ و $\{v_1, v_2, v_3\}$ در نظر بگیرید. بنابراین گراف $C_5 \times P_3$ به صورت زیر است.



شکل ۱۰.۱: گراف $C_5 \times P_3$

تعریف ۴۷.۰.۱. همریختی [1] : فرض کنید G و H دو گراف باشند، تابع $\varphi : V(G) \longrightarrow V(H)$ را یک همریختی از G به H گوییم اگر حافظ یال باشد. یعنی اگر uv یالی از G باشد، آن‌گاه $\varphi(u)\varphi(v)$ نیز یالی از H باشد. به‌طور ساده می‌نویسیم $\varphi : G \longrightarrow H$.

تعریف ۴۸.۰.۱. بستار ژئودتیک: فرض کنید G یک گراف و S زیر مجموعه‌ای از راس‌های گراف G باشد. مجموعه راس‌هایی از گراف G که روی مسیر ژئودتیک $x - y$، به ازای $x, y \in S$ قرار دارند را بستار ژئودتیک S گویند و با $I_G[S]$ نشان می‌دهند. در واقع:

$$I_G[S] = \{x \in V \mid \text{به ازای } u, v \in S \text{، } x \text{ روی مسیر ژئودتیک } u - v \text{ واقع باشد}\}$$

[1] Homomorphism

تعریف ۴۹.۰.۱. بستار ژئودتیک ماکسیمال: بستار ژئودتیک $I_G[S]$ را ماکسیمال گویند هرگاه هیچ بستار ژئودتیک شامل $I_G[S]$ موجود نباشد.

تعریف ۵۰.۰.۱. مجموعه پوششی: فرض کنید $S \subseteq V(G)$ و $A(S) = I_G[S]$ که $I_G(S)$ بستار ژئودتیک ماکسیمال است. S را یک مجموعه پوششی برای گراف G گویند هرگاه $A(S) = V(G)$.

تعریف ۵۱.۰.۱. مجموعه‌ی ژئودتیک: مجموعه‌ی S یک مجموعه‌ی ژئودتیک از گراف G است اگر $I_G[S]$ شامل همه‌ی راس‌های گراف G باشد. کوچکترین مجموعه‌ی ژئودتیک را با $g(G)$-مجموعه نشان می‌دهند.

تعریف ۵۲.۰.۱. عدد ژئودتیک: کوچکترین اندازه‌ی مجموعه‌های ژئودتیک گراف G را عدد ژئودتیک گویند و با $g(G)$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر

$$g(G) = min\{|S| : S \subset V(G), I_G[S] = V(G)\}.$$

تعریف ۵۳.۰.۱. مجموعه‌ی ژئودتیک تام: مجموعه‌ی ژئودتیک $S \subseteq V(G)$ یک مجموعه‌ی ژئودتیک تام است اگر $G[S]$ شامل راس تنها نباشد. کوچکترین مجموعه‌ی ژئودتیک تام را با $g_t(G)$-مجموعه نشان می‌دهند.

تعریف ۵۴.۰.۱. عدد ژئودتیک تام: کوچکترین اندازه‌ی مجموعه‌های ژئودتیک تام در گراف G را عدد ژئودتیک تام گویند و با $g_t(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۵۵.۰.۱. مجموعه‌ی ژئودتیک تام مهارشونده: مجموعه‌ی ژئودتیک $S \subseteq V(G)$ یک مجموعه‌ی ژئودتیک تام مهارشونده است اگر $G[S]$ و $G[V(G) - S]$ شامل راس تنها نباشد.کوچکترین مجموعه‌ی ژئودتیک تام مهارشونده را با $g_{tr}(G)$-مجموعه نشان می‌دهند