بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان : مسائل تعادل برداری و کاربردها

استاد راهنما:
دکتر علی فرج زاده

نگارش:
کبری بساطی

تیر ۱۳۹۱

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

نام دانشجو:

کبری بساطی

تحت عنوان :

مسائل تعادل برداری و کاربردها

در تاریخ   توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه   به تصویب نهایی رسید.

استاد راهنمای پایان‌نامه   دکتر علی فرج زاده   با مرتبه‌ی علمی دانشیار   امضاء:

استاد داور داخل گروه   نعمت اله نیامرادی   با مرتبه‌ی علمی استادیار   امضاء:

استاد داور خارج گروه   سیروس مرادی   با مرتبه‌ی علمی استادیار   امضاء:

و خدایی نزدیک که تو را می بیند و به عشق تو همه حادثه ها می چیند که تو یادش باشی...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

مراتب سپاس و قدردانی ام را به پیشگاه استاد گرانقدر و فرزانه ام جناب آقای دکتر علی فرج زاده اسوه علم و عمل، استاد درس و قلم، الگوی صبر و پشتکاری تقدیم می دارم.

از اساتید محترم آقای دکتر سیروس مرادی و آقای دکتر نعمت اله نیامرادی که بزرگوارانه زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شده و با دقت عالمانهٔ خود نکات ظریفی را در زیبا شدن این پایان نامه بیان داشتند و از نماینده محترم تحصیلات تکمیلی خانم دکتر سهرابی سپاسگزارم.

صمیمانه ترین سپاسگزاری ها را تقدیم خانواده ام که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم مخصوصا پدر و مادر عزیزم که وجودشان برایم همه مهر و همه بودنم از بودن آنان و خواهران وبرادران عزیزم آنان که بهر زندگی ام به ترنم محبتشان آکنده است تقدیم می دارم.

مخصوصا از برادر عزیزم فریبرز بساطی که لحظات زندگی ام لبریز از عطر محبتشان است و همه ی موفقیت هایم را مدیون راهنمایی های بی دریغشان هستم تشکر و قدردانی می کنم.

همچنین از دوستان عزیز از جمله خانم دکتر زنگنه و آقای محسن شکربیگی و خانم لیلا عمرملی و پرستو نادری، رویا لعلی، راضیه فتاحی، پریسا کریمی، صاحبه عبداللهی، سارا مینایی، مریم چله نیا،سهیلا بساطی، فاطمه بساطی، سمیه برزگر، مهین احمدی، زهرا احمدی، فاطمه حقیقی، سمیه حیدری، طاهره بشیری که به هر نحو در انجام این کار مرا یاری رساندند، تشکرو قدر دانی می کنم.

کبری بساطی

تیر ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم و برادر عزیزم فریبرز بساطی

چکیده

مسأله تعادل برداری برای متحد کردن پنج مسأله نقطه زینی، نقطه ثابت[۱]، بهینه‌سازی[۲]، نامساوی‌های تغییراتی[۳]و تعادل نش [۴] به کار می‌رود.
برخی از ریاضیدان‌ها مسأله تعادل (اسکالر) را تعمیم داده و مسأله تعادل برداری را مطرح کردند. ما مسأله تعادلی برداری ضعیف و قوی را بیان و وجود جواب برای این مسأله را بررسی می‌کنیم و در قسمت پایانی خوش ترتیبی $Levitin-polyak$[۵] را برای مسأله تعادلی برداری تعمیم یافته بیان و وجود جواب برای آن را بررسی می‌کنیم.
شرایط ذکر شده در این پایان نامه ضعیف تر از شرایطی است که سایر نویسندگان مطرح کردند و درواقع حالت کلی تری را بیان می کند.

کلمات کلیدی:

فضای برداری توپولوژیک، محدب، دنباله جواب، مسأله تعادل برداری، مخروط، تابع زیر محدب وار،نقاط زینی مخروط، حفره، خوش ترتیب

[۱] Fix Point
[۲] Optimization
[۳] Variational inequalities
[۴] Nash equilibrium
[۵] Well-Posedness

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

پیشگفتار

در سال ۱۹۹۴ اوتلی و بلوم [1] [۸] برای اولین بار مسأله تعادل برداری را در فضاهای برداری توپولوژیک مطرح کردند. نویسندگان بررسی‌هایی در این زمینه دارند .

بعضی از ریاضیدان‌ها به دنبال تعمیمی از مسأله‌ی تعادل(اسکالر) به تعادلی برداری بودند. بنابراین مسأله جدیدی به عنوان مسأله‌ی تعادل برداری (به اختصار VEP) به دست آوردند و سپس قضایایی که نشان می‌دهند در چه صوت مسأله تعادل برداری دارای جواب است را ارایه نمودند.

این پایان نامه از سه فصل تشکیل شده است.

فصل اول به مقدمات و تعاریف و قضایای اولیه که در دو فصل بعد مورد نیاز می‌باشد می پردازد.

فصل دوم شرایط کافی برای وجود جواب مسأله تعادلی برداری ضعیف را به همراه کاربردهایی در مسایل می‌نیمم سازی و وجود نقاط زینی ارایه می‌دهد.

بالاخره فصل سوم به ارایه مفهوم خوش ترتیبی $Levitin - polyak$ برای مسایل تعادل برداری تعمیم یافته که با دنباله تقریبی جواب سروکار دارد می‌پردازد. در این فصل از مقاله چهار نوع از $levitin - polyak$ خوش ترتیب را برای مسأله تعادلی برداری تعمیم یافته بیان می کنیم. همچنین در چه صورت یک دنباله جواب تقریبی برای مسأله تعادلی برداری تعمیم یافته است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. و در چه صورت مسأله تعادلی برداری، LP خوش ترتیب است را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در قسمت پایانی اندازه کوراتسکی و حفره [2] را تعریف می کنیم.

---

[1] W. Oettli , E. Blum

[2] Gap

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل تعاریف وقضایایی از آنالیز تابعی که در فصل‌های بعد مورد نیاز هستند را بیان می‌کنیم.

۱ - ۱ فضای متریک و خواص آن :

تعریف ۱ - ۱ - ۱.

اگر V مجموعه ناتهی، $(V,+)$ گروه آبلی و F میدان باشد، دراین صورت V روی F یک فضای برداری نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $\alpha \in F$ و هر $v \in V$ عنصری (که به صورت αv نوشته می‌شود) در V وجود داشته باشد، به طوری‌که:

۱. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y, \qquad \forall \alpha \in F, \quad \forall x,y \in V$

۲. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x, \qquad \forall \alpha,\beta \in F, \quad \forall x \in V$

۳. $1x=x, \quad 0x=0, \quad 0+x=x, \quad \forall x \in V$

۴. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x, \quad \forall \alpha,\beta \in F, \ \forall x \in V$

تعریف ۱ - ۱ - ۲.

فرض کنید X مجموعه ناتهی باشد، تابع $d: X \times X \longrightarrow R$ را یک متر روی X گوییم هرگاه:

۱. $d(x,y) \geq 0, \quad \forall x,y \in X$

۲. $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$

۳. $d(x,y)=d(y,x), \quad \forall x,y \in X$

۴. $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y), \quad \forall x,y,z \in X$

اگر d یک متر بر X باشد دراین صورت (X,d) را فضای متریک می‌نامیم.

تعریف ۱ - ۱ - ۳.

فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله باشد، حد بالایی آن که با نماد $limsup_{n\longrightarrow\infty}x_n$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$limsup_{n\longrightarrow\infty}x_n=inf_n sup_{k\geq n}x_k$$

به طور مشابه حد پایینی که با نماد $liminf_{n\longrightarrow\infty}x_n$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$liminf_{n\longrightarrow\infty}x_n = sup_n inf_{k\geq n}x_k$$

دنباله $\{x_n\}$ همگراست $\Longleftrightarrow$حد بالایی و پایینی آن موجود و با هم مساوی باشند.

تعریف ۱-۱-۴.

فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله و $\{n_k\}$ دنباله ای از اعداد طبیعی باشد به طوری‌که:

$$n_1 < n_2 < ...$$

در این صورت دنباله $\{x_{n_k}\}$ زیر دنباله $\{x_n\}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۵.

دنباله $\{x_n\}$ را در فضای متریک (X,d) همگرا گوییم، هرگاه $x\in X$موجود باشد به طوری‌که:

$$\forall\epsilon > 0 \ \ , \ \ \exists N\in N \quad s.t. \ \ \forall n\geq N \quad \Longrightarrow d(x_n,x) < \epsilon$$

در این صورت دنباله‌ی $\{x_n\}$ را به x همگرا گوییم و می‌نویسیم $x_n \longrightarrow x$ یا $lim_{n\longrightarrow\infty}x_n = x$.
دنباله‌ی $\{x_n\}$ را در (X,d) واگرا گوییم هرگاه همگرا نباشد.
برای مثال دنباله $\frac{1}{n^2}$ در فضای اعداد حقیقی با متر اقلیدسی $(d(x,y) = |x-y|)$ همگرا به صفر است؛ ولی در فضای اعداد حقیقی مثبت $X = (0,+\infty)$ با متر اقلیدسی همگرا نیست.

قضیه ۱-۱-۶.

فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله ای در فضای متریک (X,d) باشد،

۱. *حد یک دنباله در صورت وجود منحصر به فرد است؛*

۲. *هر دنباله همگرا، کراندار است؛*

۳. *دنباله$\{x_n\}$ همگراست اگر و فقط اگر هر زیر دنباله اش همگرا باشد؛*

تعریف ۱-۱-۷.

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. مجموعه $A\subseteq X$ را باز می‌نامند هرگاه:
به ازای هر $x\in A$، $r>0$ وجود داشته باشد به طوری‌که:

$$B(x;r)\subseteq A$$

که در آن $B(x;r)$ گوی باز به مرکز x و شعاع r است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(x;r) = \{y\in X : d(x,y) < r\}$$

همچنین مجموعه $A\subseteq X$ را بسته می‌نامند هرگاه متمم آن یعنی A^c باز باشد.

تعریف ۱-۱-۸.

فرض کنید(X,d) یک فضای متریک و S زیر مجموعه ای دلخواه از X باشد. نقطه $x\in X$ را یک نقطه چسبیدگی S (بستاریS) می‌نامند، هرگاه هر گوی مانند $B(x;r)$ حدقل شامل یک نقطه از S باشد. هرگاه x چسبیده به $S\setminus\{x\}$ باشد، آنگاه x را یک نقطه انباشتگی (یا حدی S)می‌نامند.

مجموعه نقاط چسبیده S را بستار S می‌نامند و با $\overline{S}$ نشان می‌دهند و مجموعه نقاط انباشتگی مجموعه S را مجموعه مشتق S می‌نامند و با S' نشان می‌دهند. به سادگی می‌توان نشان داد:

$$\overline{S}=S\cup S'$$

گزاره ۱-۱-۹.

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $A\subseteq X$ باشد، در این صورت:

$$x\in\overline{A}\Longleftrightarrow\ \exists\{x_n\}\subseteq A\ \ s.t.\ \ x_n\longrightarrow x$$

تعریف ۱-۱-۱۰.

فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و τ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های آن باشد، یعنی $\tau\subseteq P(X)$ ($P(X)$ مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های X می‌باشد.)

دراین صورت τ را یک توپولوژی [۱] در X می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. $X,\emptyset\in\tau$،

۲. $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq\tau\Longrightarrow\cup_{\alpha\in I}G_\alpha\in\tau$،

۳. $\{G_1,G_2,...,G_n\}\subseteq\tau\Longrightarrow\cap_{i=1}^{n}G_i\in\tau$،

اگرτ یک توپولوژی روی X باشد، آنگاه (X,τ) را فضای توپولوژی می‌نامیم.

تعریف ۱-۱-۱۱.

فرض کنیم X یک فضای برداری باشد (X,τ)را یک فضای برداری توپولوژیک نامیم هرگاه توپولوژی τ روی X نسبت به اعمال جمع وضرب اسکالر پیوسته باشد، به عبارت دیگر:

۱. نگاشت $x+y\longrightarrow(x+y)$ از $X\times X$ به X پیوسته باشد؛

۲. نگاشت $tx\longrightarrow(t,x)$ از $R\times X$ به X پیوسته باشد.

تعریف ۱-۱-۱۲.

اگر X یک فضای برداری روی میدان F باشد، تابع $\|.\|:X\longrightarrow[0,+\infty)$ را یک نرم [۲] روی X گویند هرگاه:

[۱] Topology

[۲] Norm

۱. $\|x\| \geq 0, \ \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \ , \ \forall x \in X$،

۲. $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|, \ \forall \alpha \in F = 1$ یا $R \ , \ \forall x \in X$،

۳. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \ \forall x, y \in X$.

اگر روی فضای برداری X یک نرم تعریف شود، در این صورت X فضای نرم دار نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱-۱۳ (نگاشت های مجموعه مقدار).

فرض کنید X,Y مجموعه‌هایی دلخواه باشند. نگاشت مجموعه مقدار T از X به Y را با نمادهای $T: X \rightrightarrows Y$ ،$T: X \twoheadrightarrow Y$ ،$T: X \multimap Y$ و $T: X \longrightarrow 2^Y$ نشان می دهند. T نگاشت هرگاه برای هر $x \in X$، $T(x)$ زیر مجموعه ای از Y باشد.

در این پایان‌نامه ما از نماد $T: X \longrightarrow 2^Y$ استفاده می‌کنیم. منظور از 2^Y زیر مجموعه‌های ناتهی Y می‌باشد.

تعریف ۱-۱-۱۴ (نیم‌پیوستگی بالا و پایین).

تابع $f: X \longrightarrow (-\infty, \infty)$ را

۱. نیم‌پیوسته پایینی [۱] گوییم هرگاه به ازای هر x_0 داشته باشیم:

$$liminf_{x \longrightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

به عبارت معادل:

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ ; \ \ y \in B(x_0; \delta) \Longrightarrow f(y) \geq f(x_0) - \epsilon$$

۲. نیم‌پیوسته بالایی [۲] گوییم هرگاه به ازای هر x_0 داشته باشیم:

$$limsup_{x \longrightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

به عبارت دیگر $-f$ نیم‌پیوسته پایینی باشد.

مثال ۱-۱-۱۵.

تابع $f(x) = \lceil x \rceil$ ($\lceil x \rceil$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x) یک تابع نیم‌پیوسته پایینی نیست.

مثال ۱-۱-۱۶. تابع $f(x) = \lfloor x \rfloor$ یک تابع نیم‌پیوسته بالایی است.

توجه: $f(x) = [x]$ پیوسته است.

[۱] Lower semicontinuos

[۲] Upper semicontinuos

تعریف ۱-۱-۱۷. معکوس بالایی [1]نگاشت مجموعه مقدار $T : X \longrightarrow 2^Y$ برای $A \subset Y$ را با $T^u(A)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$T^u(A) = \{x \in X : T(x) \subset A\}.$$

به همین ترتیب معکوس پایینی[2] را با $T^l(A)$ نشان داده و داریم:

$$T^l(A) = \{x \in X : T(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

مثال ۱-۱-۱۸.

فرض کنید $T : \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$ به صورت زیر تعریف شود:

$$T(x) = \begin{cases} [-1,1] & x \neq 0 \\ \{0\} & x = 0 \end{cases}$$

بنابراین برای مجموعه‌ی $A = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ داریم:

$$T^l(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} : T(x) \cap \{0\} \neq \emptyset\} = \mathbb{R}$$

$$T^u(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} : T(x) \subseteq \{0\}\} = \{0\}$$

لم ۱-۱-۱۹.

نگاشت مجموعه مقدار $T : X \longrightarrow 2^Y$ را در نظر بگیرید موارد زیر معادل‌اند:

۱) *T نیم پیوسته‌ی بالایی است.*

۲) *برای هر زیر مجموعه‌ی باز V از Y، $T^u(V)$ باز است.*

۳) *برای هر زیر مجموعه‌ی بسته F از Y، $T^l(F)$ بسته است.*

لم ۱-۱-۲۰.

نگاشت مجموعه مقدار $T : X \longrightarrow 2^Y$ را در نظر بگیرید موارد زیر معادل‌اند:

۱) *T نیم پیوسته‌ی پایینی است.*

۲) *برای هر زیر مجموعه‌ی باز V از Y، $T^l(V)$ باز است.*

۳) *برای هر زیر مجموعه‌ی بسته F از Y، $T^u(F)$ بسته است.*

مثال‌های زیر نشان می‌دهند که نگاشت‌هایی وجود دارند که نیم پیوسته‌ی پایینی و نیم پیوسته‌ی بالایی نیستند و بالعکس.

---

[1] Upper inverse

[2] Lower inverse

مثال ۱-۱-۲۱.

نگاشت $T : X \longrightarrow ۲^Y$ با ضابطه‌ی زیر نیم پیوسته‌ی بالایی است ولی نیم پیوسته‌ی پایینی نیست.

$$T(x) = \begin{cases} \{۱\} & x < ۰ \\ \{-۱\} & x > ۰ \\ [-۱, ۱] & x = ۰ \end{cases}$$

تعریف ۱-۱-۲۲.

زیرمجموعه A از یک فضای توپولوژیک (X, τ) را فشرده می‌گوییم هرگاه هر پوشش باز[۱]آن یک زیرپوشش متناهی داشته باشد.

تعریف ۱-۱-۲۳.

فضای توپولوژیک Xموضعاً فشرده [۲] نامیده می‌شود هرگاه هر نقطه در X همسایگی فشرده داشته باشد؛ یعنی برای هر $x \in X$ مجموعه باز W و زیرمجموعه فشرده V از X وجود داشته باشد به طوری که $x \in W \subseteq V$.

تعریف ۱-۱-۲۴.

اگرX فضایی برداری باشد، آنگاه $K \subseteq X$ را محدب گوییم هرگاه برای هر $x, y \in K$ و $۰ \leq \lambda \leq ۱$ داشته باشیم $\lambda x + (۱ - \lambda) y \in K$.

تعریف ۱-۱-۲۵.

فرض کنید X یک فضای برداری و $K \subseteq X$ باشد. کوچکترین مجموعه محدب شامل K را غلاف محدب [۳] K می‌نامند و با نماد $Co(K)$نشان می‌دهند. بنابراین

$$Co(K) = \cap \{F : K \subseteq F, \ \text{محدب است} F\}$$

قضیه ۱-۱-۲۶.

اگر X فضایی برداری و $K \subseteq X$ باشد، در این صورت:

$$Co(K) = \{\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i x_i : x_i \in A, \lambda_i \geq ۰, \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i = ۱, n \in N\}$$

تعریف ۱-۱-۲۷.

فضای برداری توپولوژیک (X, τ) را فضای موضعاً محدب یا τ را توپولوژی موضعاً محدب گوییم هرگاه τ یک پایه همسایگی از ۰ شامل مجموعه‌های محدب داشته باشد که به اختصار این فضا را با LCS نشان می‌دهیم.

---

[۱] Open cover

[۲] Locally Compact

[۳] Convex hull

تعریف ۱-۱-۲۸.

$K \subseteq X$ را مخروط [1] گوییم، هرگاه به ازای هر $t > 0$، داشته باشیم $tK \subseteq K$.

مثال ۱-۱-۲۹.

$K = [0, +\infty)$ یک مخروط در Rمی‌باشد.

تعریف ۱-۱-۳۰.

فرض کنید X یک فضای باناخ حقیقی و $K \subseteq X$ یک مخروط باشد. رابطه‌ی ترتیب جزیی $\leq$ را روی X نسبت به K به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \leq y \Longleftrightarrow y - x \in K$$

تعریف ۱-۱-۳۱.

$K \subseteq E$ یک مخروط جامد [2] گفته می‌شود اگروتنها اگر $intK \neq \emptyset$.

لم ۱-۱-۳۲.

فرض کنیم K یک مخروط محدب و جامد در E باشد، آنگاه خواص زیر برقرار است:

۱. $K + intK \subseteq intK$؛

۲. $\lambda intK \subseteq intK$، *برای* $\lambda > 0$؛

۳. *اگر* $a \leq b$ *و* $b \ll c$ *آنگاه* $a \ll c$.

برهان.

۱. $intK$ زیر مجموعه ای از K است؛ بنابراین داریم:

$$K + intK \subseteq K + K.$$

و چون K یک مخروط محدب است، بنابراین $K + intK \subseteq K$. از طرف دیگر $K + intK$ یک مجموعه باز در E می‌باشد و چون $intK$ بزرگترین مجموعه باز مشمول در K است، داریم:

$$K + intK \subseteq intK$$

۲. برای هر $\lambda > 0$ داریم:

$$\lambda K \subseteq K$$

و چون $intK \subseteq K$، پس $\lambda intK \subseteq intK$.

---

[1] Cone

[2] solid cone

۳. برای هر $a, b, c \in E$ داریم:

$$a \leq b \Longleftrightarrow b - a \in K$$

و

$$b \ll c \Longleftrightarrow c - b \in intK.$$

از قسمت (آ) نتیجه می‌گیریم که:

$$c - a = (c - b) + (b - a) \in intK + K \subseteq intK$$

و در نتیجه داریم $a \ll c$. □

تعریف ۱-۱-۳۳.

فرض کنیم E یک فضای باناخ [۱] حقیقی و C یک زیر مجموعه محض ناتهی و بسته از E باشد، در این صورت C یک مخروط محدب و رأسی[۲] نامیده می‌شود اگر و فقط اگر:

۱. $C \neq \{0\}$،

۲. اگر $x, y \in C$ و $a, b \in R$ که $a, b \geq 0$ آنگاه $ax + by \in C$،

۳. اگر $x \in C$ و $-x \in C$، آنگاه $x = 0$ (خاصیت رأسی بودن).

۱-۲ مسأله تعادل

در سال ۱۹۹۴، اوتلی و بلوم [۳] [۸] برای متحد کردن پنج مسأله نقطه زینی، نقطه ثابت، بهینه سازی، تعادل نش و نامساویهای تغییراتی مسأله تعادل (اسکالر) را به صورت زیر معرفی کردند.

تعریف ۱-۲-۱.

فرض کنید Xمجموعه‌ای دلخواه و A زیر مجموعه‌ی ناتهی از X و $\varphi : A \times A \longrightarrow \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ تابعی دلخواه باشد. مسأله‌ی تعادل[۴] نظیر Aو φ عبارتست از پیدا کردن $x^* \in A$ به طوری‌که:

$$\varphi(x^*, y) \geq 0, \qquad \forall y \in A$$

ریاضیدان‌ها مسأله‌ی تعادل (اسکالر) را به تعادلی برداری تعمیم دادند به عبارت دقیق تر آنها در تعریف تابع φ به جای R از یک فضای برداری توپولوژیک مانند Y که توسط یک مخروط مانند K

---

[۱] Banach Space

[۲] pointed

[۳] E. Blum , W. Oettli

[۴] Equilibrum problem

مرتب شده استفاده کردند. بنابراین مسأله جدیدی به عنوان مسأله‌ی تعادل برداری (به اختصار VEP) به صورت زیر به دست می‌آید.

تعریف ۱-۲-۲.

پیدا کردن $x^* \in A$ به طوری که:

$$\varphi(x^*, y) \notin -intK, \qquad \forall y \in A \quad (۱)$$

قضیه ۱-۲-۳ (قضیه جداسازی مجموعه‌های محدب).

فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک و A, B زیر مجموعه های ناتهی و محدب و جدا از هم باشند آنگاه احکام زیر برقرار هستند:

۱. *اگر A باز باشد آنگاه:*

$$\exists \Lambda \in X^*,\ y_۰ \in R \ \ s.t. \quad Re\Lambda(x) < y_۰ \leq Re\Lambda(y), \ \ \forall x \in A,\ \forall y \in B$$

۲. *اگر A فشرده، B بسته و X موضعاً محدب باشد آنگاه:*

$$\exists y_۱,\ y_۲ \in R,\ \Lambda \in X^* \ \ s.t. \quad Re\Lambda(x) < y_۱ < y_۲ < Re\Lambda(y), \ \ \forall x \in A,\ \forall y \in B$$