وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی کاربردی (آنالیزعددی)

عنوان:

ایده سینک گالرکین برای حل مسائل معکوس

استاد راهنما:

آقای دکتر داود رستمی

استاد مشاور:

آقای دکتر سعید عباس‌بندی

تدوین:

طیبه دلیری راد

بهمن ماه ۱۳۸۷

چکیده

دراین پایان نامه روش سینک گالرکین که یک تکنیک عددی و جدید برای حل معادلات معکوس می‌باشد، توابع سینک وخاصیّتهای آن بیان و معرفی می‌شوند. مسائلی که ما در اینجا مورد بررسی قرار می‌دهیم در حالت کلی شامل معادلات دیفرانسیل عمومی، معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات انتگرالی می‌باشد. حل این مسائل با روش سینک گالرکین منجر به دستگاه معادلات خطی یا غیرخطی گسسته می‌شود. سپس با استفاده از حاصلضرب کرونکر به معادلات ماتریسی ساده‌تری خواهیم رسید وسرانجام با توجّه به خطی یا غیرخطی بودن این معادلات به ترتیب با روشهای QR و نیوتن دستگاه حل می‌گردد.

کلمات کلیدی: روش سینک گالرکین، توابع سینک، معادلات دیفرانسیل‌عمومی، معادلات‌دیفرانسیل جزئی، معادلات‌دیفرانسیل به‌طورتکین مختل‌شده، معادلهٔ پواسن، معادلات‌دیفرانسیل جزئی وابسته‌به‌زمان، معادلات‌انتگرالی، جوابهای عددی.

بِسْمِ اللّهِ الرَّحْمنِ الرَّحیم

معبودم! ای بود و نبودم! خدای من! عشق من! ای برتر از اندیشهٔ ناتوانم! ای همهٔ هستی من! ای زیباترین، ای کاملترین و ای بهترین آفرینندگان! نمی‌دانم کدامین واژه را به کار برم تا از بابت این آرامشی که به من عطا کردی تشکر کرده باشم. یا الهی و ربی من لی غیرک.

درود و سپاس یگانهٔ جاوید را که آرام گیرد دلها با یاد او و آرامش پذیرد پریشان عالمی با نام او. سپاس و صدها سپاس به پاس بهترین نعمتی که به ما عطا فرمودی: نعمت خداوندیت.

می دانم که نخواهم توانست سپاس خود را در قالب کلمات در آورده و شکرگزار تو باشم. لذا از کلام مولای متقیان علی (ع) کمک می گیرم و

«گواهی می‌دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی‌همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می‌دهم که محمّد(ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گَردِ دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل مُلزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو؛ و چه خُرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راهِ پرسیدن را ندانم، صلاحِ کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.»

تقدیم به

امام رضا(ع) (عالم آل محمّد(ص))
او که خلوت تنهایی خود را در جوارش با آرامش سپری نمودم و در کناراو بودن را دوست دارم.

صاحب الزمان (عج)
او که قطب عالم امکان است.

پدر و مادر عزیزم
که صبر و مهربانیشان چراغ راه زندگیم بوده و دعای خیرشان بدرقهٔ راهم.

همسر مهربان و صبورم
او که همسفرامروز و فردایم است.

خواهران و برادرانم
آنها که حضورشان را بر ذرهٔ وجودم هدیه می‌کنند.

تقدیم به

گل زندگیم، دخترم پرنیان

او که شادی قلبم و طراوت زندگیم به خاطر وجود اوست

تقدیر و تشکر

با توجه به حدیث مَنْ لَمْ یَشْکُرِ الْمَخْلُوق لَمْ یَشْکُرِ الْخالِقْ بر خود لازم می‌دانم از همهٔ مربیان واساتیدی که به نحوی حق تعلیم و تربیت برگردن من دارند تشکر و سپاس گزاری نمایم. بخصوص از استاد گرامی وارجمند آقای دکتر داود رستمی واستاد گرامی آقای دکتر سعید عباس‌بندی که در تمام این دوره از تحصیلاتم ازهیچ تلاش و کمکی دریغ نکرده‌اند و همیشه الگوی فداکاری، صبر واستقامتند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

ازاستاد محترم جناب آقای دکتر غلامرضا رکنی که به عنوان استاد داور قبول زحمت فرموده و بامطالعهٔ این پایان‌نامه نکات ارزشمندی را به اینجانب متذکّر شدند سپاسگذارم.

فهرست مطالب

فهرست اشکال و جداول

مقدمه

دراین رساله روش سینک گالرکین به روی مسائل معکوس بررسی می‌شود. این روش درسال ۱۹۷۹ توسط استنجر و طی مقاله [۲۴] معرفی شد. در سالهای ۱۹۸۹ تا ۱۹۹۵ افرادی به نامهای اسمیت، بوگار، مارلت، لاند و بورس در طی مقالات [۱۱, ۱۵, ۲۶] روش سینک گالرکین را روی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه چهارم بکار برده‌اند.در سالهای اخیر یعنی سالهای ۲۰۰۶ و۲۰۰۷ افرادی چون محامدجامل و عادل محسن طی مقالات [۵, ۶, ۷, ۹] این روش را روی معادلات دیفرانسیل به‌طور تکین مختل شده، معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه پنج، معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان و معادلات پواسن بکاربرده‌اند و همچنین روش سینک کالوکیشن را روی معادلات انتگرالی بررسی کرده‌اند.
چارچوب این رساله به شرح زیر می‌باشد:
دراین رساله به‌طور کلی روش سینک گالرکین به روی انواعی از مسائل معکوس به کارگرفته می‌شود که در انتهای حل، این مسائل یا معادلات تبدیل به دستگاه خطی یا غیرخطی گسسته می‌شوند و سپس تبدیل به معادلهٔ ماتریسی شده که در انتها با استفاده از حاصلضرب کرونکر به معادلات ماتریسی ساده‌تری تبدیل می‌شوند که در نهایت با توجه به خطی یا غیرخطی بودن این معادلات به ترتیب با روشهای QR و نیوتن قابل حل می‌باشند.
این رساله بر اساس مقالات [۵, ۶, ۷, ۹, ۲۳, ۲۶] به بحث و بررسی این موضوعات می پردازد.
درفصل اول این پایان نامه تعاریف ابتدایی و مقدماتی و همچنین قضایای پیش‌نیاز که همگی در فصلهای بعد مورد نیاز می‌باشند معرفی می‌شود.
در فصل دوم معادلات دیفرانسیل معمولی باضرایب غیر ثابت بررسی می‌شوند که شامل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ چهارم خطی باشرایط مرزی همگن و معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ پنجم خطی و غیرخطی باشرایط مرزی همگن و ناهمگن می‌باشند. درانتهای این فصل به

بیان چند مثال عددی می‌پردازیم.
در فصل سوم به بررسی معادلات دیفرانسیل به طورتکین مختل‌شده خطی و غیرخطی یک متغیره با شرایط مرزی می‌پردازیم و همچنین مسائل مقدار مرزی بیضوی به‌طور تکین مختل‌شده مورد بررسی قرار می‌گیرند. و درانتها با چند مثال عددی این روش با روش‌های کاهش مرتبه و عناصر متناهی مقایسه می‌شود.
در فصل چهارم روش سینک گالرکین به روی معادلهٔ پواسن با دامنهٔ منحنی‌الخط به‌کاربرده می‌شود روش پیشنهادشده در این فصل دامنهٔ منحنی‌الخط را به یک دامنهٔ مربع تبدیل می‌کند و در نتیجه معادلهٔ پواسن به یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی خطی مرتبهٔ دوم دو متغیره تبدیل می‌شود و همچنین در این فصل یک روش بدست‌آوردن جواب برای معادلات دیفرانسیل جزئی خطی مرتبهٔ دوم دو متغیره نشان داده می‌شود. و با به‌کاربردن روش روی یک مثال عددی می‌بینیم که روش نتیجه خوبی می‌دهد.
در فصل پنجم روش سینک گالرکین بروی معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان با شرایط مرزی و شرایط اولیه به کارگرفته می‌شود. که این معادلات شامل معادلات گرما، انتشارگرما، موج، دوجمله‌ای اویلربرنولی و تلگراف می‌باشند. مثال عددی ارائه‌شده دراین فصل نشان می‌دهد که روش نتیجهٔ خوبی به همراه‌دارد.
در فصل ششم روش سینک گالرکین به روی معادلات دیفرانسیلی انتگرالی به کار برده می‌شود که من با ایده گرفتن از مقالهٔ [۹] که روش سینک کالوکیشن را روی این دسته از معادلات بکار می‌برد به حل این معادلات با روش سینک گالرکین پرداخته‌ام.
در فصل هفت بحث و نتیجه گیری مطرح می‌شود.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل به تعاریف اولیه می‌پردازیم که در ادامه به آنها نیاز داریم. در ابتدا فضای حاصلضرب داخلی را روی فضای برداری تعریف می‌کنیم و پس از تعریف فضای باناخ به معرفی تابع سینک و خاصیّتهای آن می‌پردازیم، در ادامه ایده سینک گالرکین را معرفی کرده وسپس تعاریفی مقدماتی از انواع ماتریس و تعریف ماتریسهای تاپلیتز را بیان کرده و چند قضیه که در فصلهای بعدی مورد نیاز هستند را بیان می‌کنیم. مطالب ارائه شده در این فصل بر اساس منابع [۲۷, ۲۶, ۲۵, ۱۶, ۱۲, ٦, ۵, ۴, ۳, ۲, ۱] می‌باشد.

۱—۱ فضای برداری یا فضای خطی

۱-۱-۱ تعریف. مجموعهٔ V یک فضای برداری یا خطی روی $I\!R$ است هرگاه دو عمل $(+)$ و ضرب $(\cdot)$ اسکالر وجود داشته باشند که از قواعد زیر برای هر $x, y, z \in V$ و $a, b \in I\!R$ پیروی نمایند:

۱) $x + y \in V$ و $ax \in V$ به عبارت دیگر V تحت عمل جمع و ضرب اسکالر بسته است؛

۲) $x + y = y + x$؛

۳) $x + (y + z) = (x + y) + z$؛

۴) $\circ \in V$ وجود دارد به قسمی که برای هر $x \in V$، $x + \circ = x$ برقرار باشد؛

۵) برای هر $x \in V$ یک بردار منحصر به فرد $-x \in V$ وجود دارد که $-x + x = \circ$؛

۶) $1 \cdot x = 1$؛

۷) $a(bx) = (ab)x$؛

۸) $a(x+y) = ax + ay$؛

۹) $(a+b)x = ax + bx$.

در این حالت گاهی به $I\!R$ به‌عنوان میدان اسکالرها اشاره می‌کنیم.

۱-۱-۲ تعریف. زیر مجموعهٔ W از فضای برداری V را زیرفضای برداری یا خطی گوییم هرگاه W بااعمال جمع و ضرب اسکالر در V تشکیل فضای برداری بدهد. در زیر به نمونه‌ای از فضاهای برداری یا خطی اشاره می‌کنیم.
مجموعه‌های گوناگونی از توابع دسته‌های مهمّی از فضاهای خطی را تشکیل می‌دهند به عنوان مثال اگر $S \subset I\!R$، آنگاه $C^k(S)$ نمایش فضای خطی همهٔ توابع $f : S \to I\!R$ است که f و مشتقاتش تا مرتبهٔ k یعنی $f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots, f^{(k)}$ روی S پیوسته‌اند. با تعمیم این نماد $C^\infty(S)$ نمایش فضای خطی توابع دارای مشتق از هر مرتبه روی S است. روی این فضاها جمع و ضرب اسکالر را نقطه‌به‌نقطه تعریف می‌کنیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(af)(x) = af(x),$$

۱-۱-۳ تعریف. اگر V یک فضای برداری حقیقی (روی $I\!R$) باشد ترکیب‌خطی بردارهای $x_1, x_2, \cdots, x_n$ متعلق به V برداری به صورت $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ است که در آن $c_1, c_2, \cdots, c_n \in I\!R$.

۱-۱-۴ تعریف. اگر $S \subset V$ باشد گسترش S که با $span\ S$ نمایش داده می‌شود و منظور مجموعهٔ همهٔ ترکیبات خطی عناصر متعلق به S است. اگر $U = span\ S$ آنگاه S، U را تولید می‌کند.

۱-۱-۵ تذکر. $span\ S$ یک زیرفضای V است هرگاه $S \subset V$.

۱-۱-۶ تعریف. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ باشد بردارهای $v_1, v_2, \cdots, v_m$ وابسته خطی روی $\mathbb{R}$ نامیده می‌شوند هرگاه اسکالرهایی چون $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{R}$ که همه صفرنیستند وجود داشته باشند به طوری که $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = 0$ در غیراین صورت می‌گوییم بردارها مستقل خطی روی $\mathbb{R}$ می‌باشند.

۱-۱-۷ تعریف. زیر مجموعهٔ S از یک فضای برداری V برای V یک پایه است هرگاه S مستقل خطی بوده و

$$span\ S = V.$$

۱-۱-۸ تعریف. تعداد اعضای پایهٔ یک فضای برداری V رابعد V می‌نامیم. حال اگر بیشترین تعداد بردار تشکیل‌دهنده پایهٔ V متناهی باشد آنگاه گوییم V با بعد متناهی‌است.

۱—۲ فضای متریک و فضای برداری نرم دار

۱-۲-۱ تعریف. فرض کنیم E مجموعه‌ای غیرتهی باشد تابع $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک متریک روی E می‌نامیم هرگاه دارای خواص زیرباشد:

۱) به ازای هر y, x متعلق به E، $d(x,y) \geq 0$؛

۲) به ازای هر y, x متعلق به E، $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$؛

۳) به ازای هر y, x متعلق به E، $d(x,y) = d(y,x)$؛

۴) به ازای هر z, y, x متعلق به E، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

۱-۲-۲ تعریف. اگر d یک متریک روی E باشد آنگاه مجموعهٔ E راهمراه با متریک d یک فضای متریک[1] می‌گوییم و با (E,d) نمایش می‌دهیم.

[1] Metric space

۱-۲-۳ تعریف. نرم روی یک فضای برداری V تابعی است مانند $\|\cdot\| : V \longrightarrow I\!R$ که برای هر $x, y \in V$ و $a \in I\!R$ درشرایط زیر صدق کند:

۱) $\|x\| \geq 0$؛

۲) $\|x\| = 0$ اگروفقطاگر $x = 0$؛

۳) $\|ax\| = |a| \, \|x\|$؛

۴) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

هرگاه چنین تابعی موجود باشد V رایک فضای برداری نرمدار[۱] گویند.

حال در زیربه‌معرفی‌چند نرم می‌پردازیم:

۱-۲-۴ تعریف. نرمهای زیر برای $f \in C^k([a, b])$ تعریف می‌شوند:

۱) $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \; dx$؛

۲) $\|f\|_2 = [\int_a^b f^2(x) \; dx]^{\frac{1}{2}}$.

۱-۲-۵ تعریف. نرمهای زیربرای بردار n بعدی x تعریف می‌شوند:

۱) $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$؛

۲) $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$؛

۳) $\|x\|_\infty \; = \; \max \; |x_i|, \qquad 1 \leq i \leq n$.

۱—۳ فضای حاصلضرب داخلی

۱-۳-۱ تعریف. اگر V یک فضای برداری روی $I\!R$ باشد تابع $<\cdot>: V \times V \longrightarrow I\!R$ حاصلضرب‌داخلی نام دارد هرگاه برای تمام x و y و z های متعلق به V موارد زیر برقرار باشد:

[۱] Normed vector space

۱) $< x,x > \geq 0$؛

۲) $< x,x >= 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$؛

۳) $< x,y >=< y,x >$؛

۴) برای هر $a,b \in I\!R$ داشته باشیم، $< x, ay+bz >= a < x,y > +b < x,z >$.

فضای برداری V با یک حاصلضرب داخلی فضای حاصلضرب داخلی[1] نام دارد. توجه داریم که هر فضای حاصلضرب داخلی یک فضای برداری نرمدار است لذا می‌توان نوشت $< x,x >=\| x \|^2$.

۱-۳-۲ تعریف. فرض کنید دو بردارباn مولفهٔ $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ را داریم ضرب داخلی روی این دو بردار به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$< x,y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت که $< x,x >=\| x \|_2^2$.

۱-۳-۳ تعریف. فرض کنید V فضای برداری توابع پیوسته و حقیقی یک متغیره بر $\Gamma = [a,b]$ باشد دراین صورت برای توابع $f,g \in V$ داریم:

$$< f,g >= \int_{\Gamma} f(x)g(x)v(x)dx, \qquad x \in \Gamma, \tag{1.1}$$

واگر V فضای برداری توابع پیوسته و حقیقی دو متغیره بر $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ باشد که $\Gamma_1 = [a,b]$ و $\Gamma_2 = [c,d]$ آنگاه برای توابع $f,g \in V$ نیزداریم:

$$< f,g >= \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} f(x,y)g(x,y)v(x)w(y)dx\,dy, \qquad x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_2, \tag{2.1}$$

توابع v و w توابع وزن می‌باشند.

۱-۳-۴ تعریف. یک پایهٔ S برای فضای حاصلضرب داخلی V پایهٔ متعامد است هرگاه برای هر $x,y \in S$ داشته باشیم $< x,y >= 0$.

---
[1] Inner product space

۱-۳-۵ تعریف. یک پایهٔ S برای یک فضای حاصلضرب داخلی V پایهٔ متعامد یکه (ارتونرمال) است هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

۱) هرگاه $x, y \in S$ و $x \neq y$ آنگاه $< x, y >= ۰$؛

۲) برای هر $x \in S$ داشته باشیم $< x, x >= \| x \|^۲ = ۱$.

۱-۳-۶ تعریف. دو بردار x و y متعامدند هرگاه $< x, y >= ۰$.

۱ — ۴ فضای متریک کامل

۱-۴-۱ تعریف. یک دنباله که با x_n نمایش داده می‌شود تابعی است با دامنهٔ $I\!N = ۱, ۲, \cdots$ که به هر عدد طبیعی $n \in I\!N$ نقطهٔ x_n را مربوط می‌کند.

۱-۴-۲ تعریف. دنبالهٔ x_n را در فضای متریک (E, d) به x همگرا می‌گوییم هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ عدد طبیعی K_ε موجود باشد به طوری که اگر $n \geq K_\varepsilon$ آنگاه $d(x_n, x) < \varepsilon$.

۱-۴-۳ تعریف. دنبالهٔ x_n را در فضای متریک (E, d) کوشی می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددطبیعی K_ε موجودباشد به‌طوری که اگر $m, n \geq K_\varepsilon$ آنگاه $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

۱-۴-۴ تعریف. فضای متریک (E, d) راکامل گوییم هرگاه هردنبالهٔ کوشی درآن همگراباشد.

۱-۴-۵ تعریف. یک فضای برداری نرمدار می‌تواند تبدیل به یک فضای متریک شود هرگاه متریک d را با $d(x, y) = \|x - y\|$ تعریف کنیم که متریک القایی بوسیله نرم نامیده می‌شود.

۱—۵ فضای هیلبرت

۱-۵-۱ تعریف. اگرفضای برداری نرمدار با متریک القاشدهٔ d کامل باشد فضای باناخ[۱] نامیده می‌شود.

۱-۵-۲ تعریف. فضای هیلبرت[۲] یک فضای باناخ است که در آن ضرب داخلی تعریف می‌شود.

۱—۶ نگاشت همدیس

۱-۶-۱ تعریف. خواص تابع حقیقی از یک مقدار حقیقی اغلب به وسیله نمودار تابع نمایانده می‌شود اما وقتی $w = f(z)$ که درآن w, z اعداد مختلط می‌باشند چون هریک ازاعداد w, z دریک صفحه واقعند با وجود این می‌توان بانشان دادن زوج نقاط متناظر $z = (x, y)$ و $w = (u, v)$ اطلاعاتی از تابع را به‌دست آورد برای سادگی کار صفحات z و w را جداگانه رسم می‌کنیم دراین صورت تابع f رانگاشت یاتبدیل گوییم.

۱-۶-۲ تعریف. هر خم در صفحهٔ مختلط، تابع پیوسته‌ای به فرم $\lambda = [a, b] \longrightarrow \mathbf{C}$ می‌باشد که به‌ازای هر $t \in [a, b]$ به‌صورت $c = \lambda(t) = \lambda_{۱}(t) + i\lambda_{۲}(t)$ تعریف می‌شود در صورتی که به ازای هر $t \in [a, b]$ مگر شاید در $t = a$ و $t = b$ داشته باشیم $\lambda'(t) = ۰$ دراین صورت خم c را یک خم هموار در صفحهٔ مختلط می‌گوییم.

۱-۶-۳ تعریف. اگر تابع پیوستهٔ f در دامنهٔ D شامل خمهای $c_{۱}$ و $c_{۲}$ باشدواین دو خم دردامنهٔ Dو درنقطهٔ $z_{۰}$متقاطع‌باشندمماسهای آنهارا دراین نقطه به ترتیب $\tau_{۱}$ و$\tau_{۲}$ می‌نامیم و زاویهٔ بین دو خم $c_{۱}$ و $c_{۲}$ را زاویهٔ بین $\tau_{۱}$ و $\tau_{۲}$ می‌نامیم.

۱-۶-۴ تعریف. اگر $c = \lambda(t) = \lambda_{۱}(t) + i\lambda_{۲}(t)$ نگاشتی پیوسته باشد گوییم نگاشت

---

[۱] Banach space
[۲] Hibert space