بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم

گروه ریاضیات و کاربردها

فضاهای $\mathcal{L}-$ فازی غیرارشمیدسی نرمدار و پایداری معادلات تابعی

اساتید راهنما

دکتر نسرین اقبالی

دکتر داود خجسته سالکویه

توسط

فاطمه حیدری خراجی

دانشگاه محقق اردبیلی

تابستان ۱۳۹۰

نام خانوادگی: حیدری خراجی	**نام:** فاطمه
عنوان پایان نامه : فضاهای $\mathcal{L}-$ فازی غیر ارشمیدسی نرمدار و پایداری معادلات تابعی	
اساتید راهنما: دکتر نسرین اقبالی و دکتر داود خجسته سالکویه	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** آنالیزعددی **دانشگاه:** محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم پایه **تاریخ فارغ التحصیلی:** ۱۳۹۰/۶/۲۴ **تعداد صفحه:** ۹۸	
کلید واژه‌ها : مجموعه‌های $\mathcal{L}-$ فازی، فضاهای نرمدار فازی، فضاهای نرمدار $\mathcal{L}-$ فازی غیر ارشمیدسی، پایداری	
چکیده: در این پایان‌نامه به بررسی فضاهای نرمدار فازی می‌پردازیم. هم‌چنین فضاهای نرمدار $\mathcal{L}-$ فازی غیر ارشمیدسی را معرفی کرده و پایداری معادلات تابعی مربعی و مربعی فوق‌العاده را در این فضا بررسی می‌کنیم. در پایان به معرفی فضای $n-$نرم $\mathcal{L}-$ فازی غیر ارشمیدسی خواهیم پرداخت و پایداری معادله تابعی مربعی را در این فضا اثبات می‌کنیم.	

فهرست مندرجات

مقدمه

افتخار هر ایرانی است که پایه علوم قرن آینده از نظریات یک ایرانی می‌باشد. باید قدر این فرصت را دانست و در تعمیم نظریه فازی و استفاده از آن کوشش و تلاش کرد. گرچه در دهه ۱۹۷۰ و اوایل دهه ۱۹۸۰ مبحث فازی (و بنیان‌گذار آن) با مخالفت آشکار و سخت جمع کثیری از دانشمندان و ریاضیدانان و مهندسین روبرو بود، اما با پیدایش کاربردهای عملی منطق فازی و آشنایی و شناخت بیشتر جهان علم با مفاهیم فازی، به تدریج این مخالفت‌ها به تحسین و تشویق تبدیل گشت. به‌طوری‌که در حال حاضر سالانه بیش از صدها کتاب و هزاران مقاله در این زمینه به چاپ می‌رسد. منطق فازی معتقد است که ابهام در ماهیت علم نهفته است. از این‌رو برخلاف بسیاری که معتقدند باید تقریب‌ها را دقیق‌تر کرد تا بهره‌وری افزایش یابد، زاده[1] معتقد است که باید به دنبال ساخت مدل‌هایی بود که ابهام را به‌عنوان بخشی از سیستم، مدل کند.

در منطق ارسطویی، یک دسته‌بندی درست یا نادرست وجود دارد یعنی تمام گزاره‌ها یا درست هستند و یا نادرست. بنابراین جمله «علی باهوش است» در مدل ارسطویی اساساً یک گزاره نمی‌باشد، چون مقدار باهوش بودن برای افراد مختلف متفاوت است و این جمله اساساً همیشه درست یا نادرست نیست. در منطق فازی جملاتی وجود دارند که تا حدودی درست و تا حدودی نادرست هستند. برای مثال جمله‌ی «علی باهوش است» یک گزاره منطقی فازی است که ارزش درستی آن گاهی کم و گاهی زیاد است. در فلسفه ارسطویی مرزها کاملا مشخص و تعریف شده است، در حالی‌که در تفکر فازی مرز مشخصی وجود ندارد و تعلق عناصر مختلف به مفاهیم و موضوعات گوناگون نسبی است. به این ترتیب است که این تفکر

[1] L.A. Zadeh

با طبیعت و سرشت انسان و محیط جهان ما سازگاری دارد. تا این‌جا به نظر می‌رسد که نباید مخالفتی با این نگرش وجود داشته باشد، زیرا که تفکر فازی دیدگاه تازه‌ای را معرفی می‌کند که تعمیم منطق ارسطویی است. اما نکته‌ی مهم آن است که بر اساس این دیدگاه، ریاضیات کلاسیک که بر منطق ارسطویی استوار است زیر سُوال می‌رود و از همین‌جا مخالفت‌ها آغاز می‌شود.

اگر بخواهیم نظریه مجموعه‌های فازی را توضیح دهیم، باید بگوییم نظریه‌ای است برای اقدام در شرایط عدم اطمینان. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند، صورت بندی ریاضی بخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد. واضح است که بسیاری از تصمیمات و اقدامات ما در شرایط عدم اطمینان است و حالت‌های واضح غیر مبهم، بسیار نادر و کمیاب می‌باشند. واژه فازی در فرهنگ لغت آکسفورد به صورت مبهم، گنگ و نادقیق تعریف شده است.

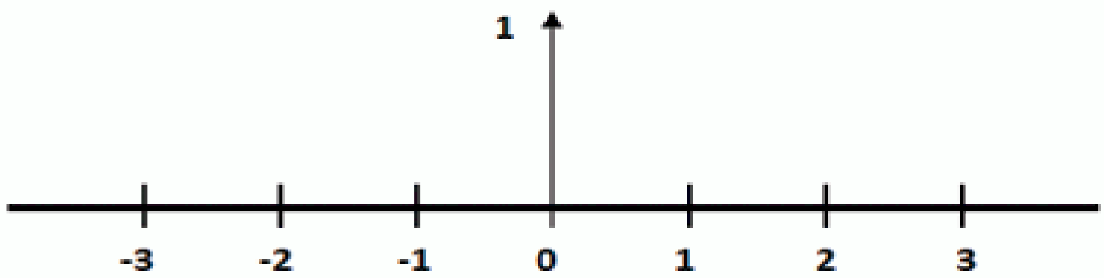
چرا سیستم‌های فازی؟ دنیای واقعی ما بسیار پیچیده‌تر از آن است که بتوان یک توصیف و تعریف دقیق برای آن به دست آورد. بنابراین باید برای یک مدل، توصیف تقریبی یا همان فازی که قابل قبول و قابل تجزیه و تحلیل باشد معرفی شود. با حرکت به سوی عصر اطلاعات، دانش و معرفت بشری بسیار اهمیت پیدا می‌کند. بنابراین ما به فرضیه‌ای نیاز داریم که بتواند دانش بشری را به شکلی سیستماتیک فرموله کرده و آن را به همراه سایر مدل‌های ریاضی در سیستم‌های مهندسی قرار دهد. قدرت دیدگاه فازی، به مهندسان ژاپنی این امکان را داد که محصولات تجاری هوشمند را طراحی کنند. به زودی دوربینهای فازی، ماشین‌های لباس‌شویی، یخچال‌ها،مایکروفرها و کاربراتورهای فازی و صدها وسیله هوشمند دیگر وارد بازار شدند. به این ترتیب ممکن است در آینده با ماشین‌هایی روبرو شوید که می‌توانند در هر مسابقه‌ای ما را شکست دهند.

اصل فازی بیان می‌دارد که همه چیز نسبی است. صرف‌نظر از میزان خطای ما در مشاهده چیزهای مختلف، بعضی چیزها فازی نیستند. این چیزها بیشتر از دنیای ریاضیات می‌آیند. در اینجا می‌توان گفت که انسان در طراحی خود مقوله فازی بودن را به کار نبرده است. ما قبول می‌کنیم که $۴ = ۲ \times ۲$ و این موضوع صددرصد درست است. اما زمانی که از

دنیای مصنوعی خارج می‌شویم، حالت فازی ظهور کرده و بر همه چیز غلبه می‌کند. حالت فازی تمام مرزها و محدودها را تار و مبهم می‌کند. هر عبارت منطقی «فازی» نظیر «علف سبز است» می‌تواند تا اندازه‌ای درست باشد، میزان درست بودن این عبارت بین صفر و یک تغییر می‌کند و یا آن که بین صفر تا صددرصد درست باشد. عبارت «فازی» تقریباً از سال ۱۹۵۰ به واژگان علمی وارد شد. تا آن زمان دانشمندانی نظیر «برتراند راسل» اصطلاح «ابهام» را برای حالت چند ارزشی به کار می‌بردند. در سال ۱۹٦۵ «زاده» نام فازی را روی این مجموعه‌های گنگ یا چند ارزشی قرار داد، مجموعه‌هایی که اجزای آن‌ها به درجات مختلفی به آن‌ها تعلق دارند، نظیر مجموعه‌ای از مردم که باهوش هستند.

اعداد چگونه‌اند؟ اعداد نشانه‌های دقت‌اند. آیا می‌توانیم آن‌ها را فازی کنیم؟ آیا اعداد فازی ممکن هستند؟ جواب‌هایی که تا قبل از این داده می‌شد، منفی بود. چطور اعداد می‌توانستند فازی باشند؟ هر عددی زوج یا فرد است.

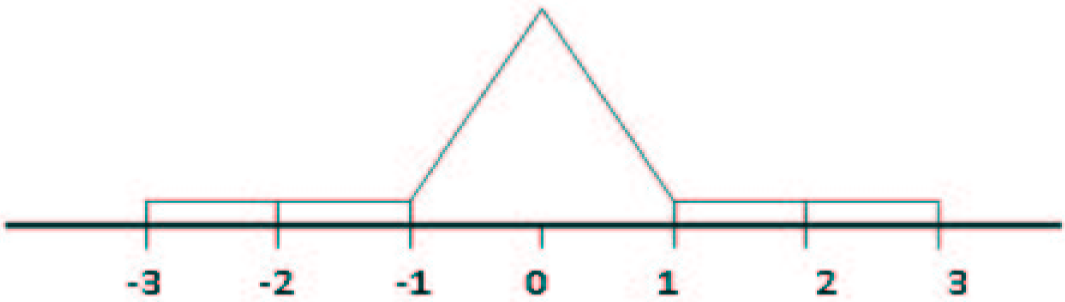
عدد صفر را ملاحظه کنید. به نظر می‌رسد بعضی از دانشمندان قدیمی هزاران سال است در پی یافتن صفر هستند. حالا ما می‌توانیم آن را در یک نگاه بیابیم، مانند یک فلش روی خط اعداد (شکل ۱).



شکل ۱.۰: نمایش عدد صفر

معنی فلش این است که عدد صفر صددرصد به مجموعه صفر متعلق است و هیچ عدد دیگری به آن تعلق ندارد. هر عدد یا در مجموعه صفر قرار دارد یا در خارج از آن. اما در مورد اعداد نزدیک به صفر یا تقریبا صفر چه طور؟ این اعداد همانند اعداد بزرگ یا اعداد متوسط و یا بسیار کوچک، اعداد فازی هستند. آن‌ها طیف اعداد نزدیک به صفر و یا آن‌هایی که تعلق بیشتری نسبت به دیگران به این مجموعه دارند را تعیین می‌کنند. نزدیک‌ترین عدد به صفر تعلق بیشتری به مجموعه فازی عدد صفر دارد. عدد ۰/۵ به صفر نزدیک‌تر بوده تا عدد یک و همین‌طور عدد منفی ۰/۵ به صفر نزدیک‌تر از منفی یک است. در این صورت

عدد صفر صددرصد متعلق به این مجموعه است ولی اعداد نزدیک ممکن است ۸۰ و ۵۰ یا ۱۰ درصد به مجموعه فازی صفر متعلق باشند. ممکن است که عدد فازی را مانند منحنی نرمال یا مثلث که در عدد صفر تمرکز یافته رسم کنیم (شکل ۲).



شکل ۲.۰: نمایش عدد فازی

اگر مثلث را به حد کافی باریک رسم کنیم، به فلش ریاضیات کلاسیک خواهیم رسید. در این صورت ریاضیاتی که ما می‌شناسیم حالت خاصی از ریاضیات فازی است. ما می توانیم مثلث‌ها را مانند اعداد جمع و تفریق کنیم. همچنین می‌توانیم عدد صفر فازی را به روشهای نامحدودی ترسیم کنیم.

نظریه فازی به شاخه‌های مختلفی تقسیم شده است که بحث کامل و جامع در مورد هر شاخه به زمان بیشتر و مباحث طولانی‌تری احتیاج دارد که در زیر به پاره‌ای از این موارد اشاره شده است:

۱) ریاضیات فازی

مفاهیم ریاضیات کلاسیک، با جایگزینی مجموعه‌های فازی بجای مجموعه‌های کلاسیک توسعه پیدا کرده است. منطق کلاسیک، هر چیزی را بر اساس یک سیستم دوتایی نشان می‌دهد (درست یا غلط، یک یا صفر، سفید یا سیاه) ولی منطق فازی درستی هر چیزی را با یک عدد که مقداری در [۱ ,۰] دارد، نشان می‌دهد. مثلا اگر به رنگ سیاه عدد صفر و به رنگ سفید عدد یک را اختصاص دهیم، آنگاه رنگ خاکستری عددی نزدیک به صفر خواهد گرفت.

۲) منطق فازی و سیستم‌های فازی

«پروفسور ممدانی [1]» اولین سیستم فازی را در اوایل سال ۱۹۷۰برای کنترل یک ماشین بخار ساخت و کمی بعد اولین چراغ‌های راهنمایی فازی را برای رانندگان ساخته است. شما می‌توانید از سیستم‌های فازی در هر مکانی که ما امروزه می‌توانیم از مغزمان استفاده کنیم بهره ببرید. شما حتی از آن‌ها می‌توانید در مکان‌هایی که مغز قادر به انجام کاری نیست استفاده کنید. پروفسور «میشیو سوگنو [2]» از مؤسسه تکنولوژی توکیو سیستمی ساخته است که می‌تواند یک هلیکوپتر در حال پرواز را هنگامی که پروانه متعادل کننده‌اش را از دست داده ثابت نگهدارد. هیچ انسانی نمی‌تواند این کار را انجام دهد و نیز هیچ مدل ریاضی شناخته شده‌ای برای انجام این کار وجود ندارد.

۳) برنامه‌ریزی خطی [3] و تصمیم‌گیری فازی

در دنیای واقعی بسیاری از تصمیم‌گیری‌ها در محیطی رخ می‌دهد که اهداف، قیود و نتیجه عملکرد را دقیقاً نمی‌دانیم و معمولاً مفاهیم و تکنیک‌هایی از نظریه‌ی احتمال را به کار می‌بریم. اهداف و یا قیود می‌توانند به صورت مجموعه‌ی فازی تعریف شوند. آنگاه یک تصمیم فازی را می‌توان به عنوان فصل مشترک اهداف و قیود در نظر گرفت. بلمن [4] و زاده در [۳] مفهوم بزرگترین تصمیم‌گیری را در مسایل تصمیم‌گیری فازی بیان کردند.

این مفهوم را تاناکا[5] [۳۲] برای مسایل برنامه‌ریزی ریاضی به کار بست. در سال ۱۹۸۴تاناکا و آسایی [6] [۳۱] یک فرمول برای برنامه‌ریزی خطی فازی و همچنین یک روش برای جواب آن بر پایه روابط نامساوی بین اعداد فازی ارایه کردند. دوبوآ [7] و پرید [8] [۶] هم روی مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی با قیود فازی تحقیق کرده‌اند.

۴) فضاهای نرمدار فازی و پایداری معادلات تابعی

کالوا[9] و سیکالا[10] در سال ۱۹۸۴ فضای متریک فازی را معرفی کردند و خواص این فضا را

---

[1] E.H. Mamdani
[2] M. Sugeno
[3] Linear Programming
[4] R.E. Bellman
[5] H. Tanaka
[6] K. Asai
[7] D. Dubois
[8] H. Prade
[9] O. Kaleva
[10] S. Seikkala

بررسی نمودند. کاتساراس[۱] و فانگ جینکساون [۲] نیز در سال ۱۹۸۴، بطور جداگانه تعاریفی برای نرم فازی ارایه دادند و فضای نرمدار فازی را معرفی کردند. گرچه این تعاریف با یکدیگر تفاوت دارند، اما همه‌ی آنها در مفهوم تقریبا یکسان می‌باشند. مامینگ[۳] در سال ۱۹۸۵، در مقاله‌ای تحت عنوان مقایسه‌ای بین دو تعریف فضای نرمدار فازی رابطه بین این تعاریف را بیان نمود و در سال ۱۹۹۰، در مقاله‌ای با عنوان نرم فازی، نرم محتمل و متر فازی چندین شرط لازم و کافی برای نرم‌های فازی به مفهوم کاتساراس و متر فازی به مفهوم کالوا و سیکالا و رابطه بین آنها را بیان نمود. فانگ جینکساوان تحقیقات خود را در زمینه فضاهای نرمدار فازی ادامه داد و نتیجه این تحقیقات را در سال ۲۰۰۱ تحت مقاله‌ای با عنوان تکمیل شده فضاهای نرمدار فازی معرفی کرد و نشان داد که هر فضای نرمدار فازی، تکمیل‌شده منحصر به فردی دارد.

فضاهای نرمدار فازی در [۷] توانست گامی بس بزرگ در نظریه ϵ^{∞} که توسط نشایی[۴] در کوانتوم مطرح شده‌بود، ایجاد کند که هدف آن ایجاد موقعیت‌هایی بود که نرم در یک فضای معمولی نمی‌توانست مقادیر مورد نیاز را ارایه دهد. گوگن[۵] در [۱۱] مجموعه‌های فازی را به شبکه‌های فازی توسعه داد که تحت عنوان نظریه مجموعه‌های $\mathcal{L}-$ فازی مطرح و مورد اقبال ریاضیدانان قرار گرفت. در ادامه رده مهمی از فضاهای نرمدار تحت عنوان غیر ارشمیدسی [۶] معرفی شد که توانست به سرعت در نظریه کوانتوم و مدل‌سازی شبکه‌های کامپیوتری مورد استفاده قرار بگیرد.

پایداری معادلات تابعی همواره به عنوان موضوعی جالب در ریاضی و حتی خارج از ریاضی محض، بویژه برای فیزیکدانان جالب بوده است. به عنوان مثال فیزیکدانان علاقمند هستند تا با ایجاد تغییرات کوچک در یک سیستم یا دستگاهی میزان پایداری آن را تخمین بزنند. در سال ۱۹۴۰، اولام [۷] در [۳۳] سؤال معروف خود را در زمینه پایداری معادلات تابعی مطرح کرد: فرض کنید $G_۱$ یک گروه و $G_۲$ یک گروه متری باشد و δ ای باشد که برای تابع

---

[۱] Katsaras
[۲] F. Jin- Xuan
[۳] Maming
[۴] El Naschie
[۵] J. Goguen
[۶] Non-Archimedean
[۷] S.M. Ulam

$f:G_1 \longrightarrow G_2$ داشته باشیم $d(f(xy), f(x)f(y)) \leq \delta$. در این صورت آیا هomomorفیسمی مانند $g:G_1 \longrightarrow G_2$ وجود دارد که برای هر $x \in G_1$ داشته باشیم $d(f(x), g(x)) \leq \delta$؟

در سال ۱۹۴۱، یرز [1] در [۱۶] نشان داد که اگر $\delta > 0$ و E_1، E_2 جبرهای باناخ و $f:E_1 \longrightarrow E_2$ یک تابع باشد که $||f(x+y)-f(x)-f(y)|| \leq \delta$ آنگاه یک تابع یکتای جمعی T وجود دارد که برای هر $x \in E_1$ داریم $||f(x)-T(x)|| \leq \delta$.

در سال ۱۹۷۸، راسیاس [2] در [۲۶] نشان داد که برای فضاهای باناخ مفروض E_1, E_2 و $p \in [0,1)$، اگر $\delta > 0$ ای موجود باشد که برای هر $x, y \in E_1$ داشته باشیم $||f(x+y)-f(x)-f(y)|| \leq \delta(||x||^p + ||y||^p)$، آنگاه تابع جمعی یکتای T وجود دارد بطوریکه برای هر $x \in E_1$ داریم $||f(x)-T(x)|| \leq \frac{2\delta}{2-2\delta}||x||^p$. او همچنین این قضیه را برای $p < 0$ نیز ثابت کرد.

در سال ۱۹۹۱، گایدا [3] در [۹] قضیه راسیاس را برای حالت $p > 1$ اثبات نمود. برای حالت $p = 1$، راسیاس و شمرل [4] با ارایه مثالی در [۲۷] نشان دادند که نمی‌توان f را تقریب زد. سرانجام در سال ۱۹۹۴، گاوروتا[5] در [۱۰] نتیجه راسیاس را برای توابع کنترل مجاز توسیع داد.

کم‌کم بحث پایداری به معادلات تابعی نیز راه یافت. ازجمله برای معادلات مربعی، مکعبی، لاگرانژ و پواسون.

پرداختن به مسأله پایداری معادلات تابعی در فضاهای نرمدار فازی، مسأله‌ای جدید است که در سال ۲۰۱۰ مطرح و بررسی شده است. سیستمی را بر اساس معادلات تابعی در فضای نرمدار فازی تخریب می‌کنیم که منظور از تخریب، برداشتن تساوی از معادله تابعی مفروض است، سپس در شرایط فازی معادله مفروض را با تابع کنترل مجازی تقریب زده و پایداری سیستم رادر شرایط فازی با این تابع کنترل مجاز بررسی می‌کنیم.

۵) معادلات دیفرانسیل فازی

تابع موجود در معادلات دیفرانسیل فازی نگاشت پیوسته‌ای است که از طریق اصل گسترش

---

[1] D.H. Hyers

[2] Th.M. Rassias

[3] Z. Găjda

[4] Šemrl

[5] Găvrută

زاده به دست آمده است.

معادلات دیفرانسیل فازی به سه روش مختلف حل می‌شوند: روش اول با استفاده از اصل گسترش زاده برای فازی کردن جواب و روش دوم با استفاده از خانواده دیفرانسیل شمول و روش سوم با استفاده از مشتق تعمیم یافته.

این پایان‌نامه در ٦ فصل تنظیم شده‌است. در فصل اول به توضیح پایه‌های ریاضی مجموعه‌های فازی می‌پردازیم. در فصل دوم نرم‌های مثلثاتی را معرفی کرده و برخی خواص و قضایای آن را مطرح می‌کنیم. هم‌چنین به معرفی فضای نرمدار $\mathcal{L}-$ فازی و فضای نرمدار $\mathcal{L}-$ فازی غیر ارشمیدسی می‌پردازیم. در فصل سوم معادله تابعی مربعی را معرفی کرده و پایداری آن را در فضای نرمدار $\mathcal{L}-$ فازی غیر ارشمیدسی بررسی می‌کنیم. فصل چهارم با معرفی معادله مربعی فوق‌العاده به بررسی پایداری آن در فضای مذکور می‌پردازد. در فصل پنجم فضای $n-$ نرم $\mathcal{L}-$ فازی غیر ارشمیدسی را معرفی کرده و پایداری معادله مربعی را در این فضا بررسی می‌کنیم.

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

در این فصل ابتدا به بیان برخی از مباحث در مجموعه‌های فازی می‌پردازیم، سپس شبکه کامل L و مجموعه‌های $\mathcal{L}-$ فازی را معرفی می‌کنیم که اساس کار ما در فصل‌های بعد است.

۱.۱ تابع عضویت مجموعه‌های فازی

هر مجموعه‌ی قطعی (صریح) یک ویژگی معین و قطعی دارد. اما در بسیاری از مجموعه‌ها یک ویژگی قطعی نمی‌توان پیدا کرد، برای حل این مشکل، تئوری مجموعه‌های فازی مطرح شد که در مقایسه با مجموعه‌های قطعی، مبین مجموعه‌های مبهم است. در صحبت‌های معمولی روزانه کلمات مبهم زیادی به کار برده می‌شود مثلا درخت سرو زیباست و یا ارزش دلار نسبتا بالاست. مجموعه‌های فازی با این کلمات و گزاره‌های نادقیق برخورد می‌کند.

مجموعه‌های فازی می‌توانند با مفاهیم نادقیقی مانند مجموعه‌ی افراد قدبلند و افرادی که نزدیک توکیو بسر می‌برند که قابل بیان به وسیله مجموعه‌های معمولی نیستند، برخورد کنند. در عبارات پیش کلمات بلندقد و نزدیک نادقیقند. بیان این عبارات نادقیق به وسیله مجموعه‌های معمولی امکان پذیر نیست و ما باید عبارات را به صورت دقیق مانند مجموعه افرادی که بیش از ۱۹۰ سانتیمتر قد دارند یا مردمی که در توکیو زندگی می‌کنند بیان کنیم. اندازه گیری قد یک فرد تعلق یا عدم تعلق او را به مجموعه‌ی پیش گفته تعیین می‌کند. این مجموعه‌های معمولی که به صورت دقیق بیان می‌شوند در نظریه مجموعه‌های فازی به مجموعه‌های قطعی (قاطع) معروفند. نظریه مجموعه‌های فازی توسیعی از نظریه مجموعه‌های قطعی است. در نظریه فازی می‌توان یک مجموعه را به صورت عملگرهای آن مجموعه به همراه درجه عضویت هر عضو در نظر گرفت. در این فصل به بحث درباره‌ی نمایش و مفهوم مجموعه‌های فازی، انواع مجموعه‌های فازی، اعمال بر روی این مجموعه‌ها، $\alpha-$ برشها، اعداد فازی و اعمال بر روی آنها خواهیم پرداخت.

نظریه مجموعه‌های فازی، تعمیم و گسترش طبیعی از نظریه مجموعه‌های معمولی است که در یک قالب جدید ریاضی برای صورت بندی وتجزیه و تحلیل مفاهیم موافق با زبان و فهم طبیعی انسان‌ها بیان شده است. با استفاده از تابع عضویت[۱] (تابع مشخصه) می‌توان

[۱] Membership function

عضویت یا عدم عضویت یک عنصر را در یک مجموعه تعریف کرد.
اگر A یک مجموعه قطعی بر روی مجموعه مرجع X باشد تابع مشخصه این مجموعه یعنی χ_A را می توان با نگاشت زیر تعریف کرد:

$$\chi_A : X \longrightarrow \{۰, ۱\},$$

به طوری که

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱, & x \in A, \\ ۰, & x \notin A. \end{cases}$$

در نظریه مجموعه‌های فازی،عضویت یک عضو در یک مجموعه درجه‌بندی می شود و در بازه‌ی $[۰, ۱]$ تعریف می‌گردد. بنابراین یک عضو در یک مجموعه‌ی فازی به همراه درجه عضویت خود معرفی می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱: یک مجموعه (زیر مجموعه) فازی بر روی X به وسیله یک تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}$ که بیانگر نگاشت زیر است تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [۰, ۱],$$

در این‌جا مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ عبارت از مقدار عضویت یا درجه عضویت $x \in X$ است. مقدار عضویت بیانگر درجه تعلق x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ است.

تبصره ۱.۱.۱: با توجه به تعریف بالا می‌توان مجموعه‌های فازی را به صورت یک مجموعه از زوج‌های مرتب به گونه‌ی زیر نشان داد:

$$\widetilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \; ; \; x \in X\},$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ درجه عضویت عنصر x در مجموعه $\tilde{A}$ است.
هنگامی که X یک مجموعه‌ی متناهی(و یا نامتناهی شمارا) به صورت $\{x_۱, x_۲, \cdots, x_n\}$ باشد، یک زیر مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ از X به صورت‌های زیر نشان داده می‌شود:

$$\widetilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(x_۱)/x_۱ + \cdots + \mu_{\tilde{A}}(x_n)/x_n = \sum_{i=۱}^{n} \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i,$$

یا

$$\widetilde{A} = \{\mu_{\tilde{A}}(x_1)/x_1, \cdots, \mu_{\tilde{A}}(x_n)/x_n\},$$

که در عبارت اول منظور از علامت $+$، اجتماع است نه جمع حسابی. هنگامی که X یک مجموعه‌ی پیوسته باشد، نماد زیر به کار برده می‌شود:

$$\widetilde{A} = \int_x \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i.$$

که در آن منظور از $\int$، اجتماع است.

۲.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۲.۱: برای مجموعه‌ی جهانی X، خانواده مجموعه‌های فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Im(X) = \{\widetilde{A} | \widetilde{A} \subseteq X, \ \ \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1], \ \ \forall x \in X\},$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت مجموعه‌ی A از $\mathbb{R}$ به $[0, 1]$ می‌باشد.

تعریف ۲.۲.۱: فرض کنید $A \in \Im(X)$، هسته[۱] $\widetilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$core(\widetilde{A}) = \{x \in X \ \ | \ \ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}.$$

تعریف ۳.۲.۱: فرض کنید $\widetilde{A} \in \Im(X)$ و $\Im(X)$ خانوادها ی از مجموعه‌های فازی تعریف شده در X باشد. محمل[۲] $\widetilde{A}$، مجموعه‌ای غیرفازی است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$supp(\widetilde{A}) = \{x \in X \ \ | \ \ \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

تعریف ۴.۲.۱: ارتفاع[۳] مجموعه‌ی فازی $\widetilde{A}$، بزرگترین مقدار عضویت آن است، به

[۱] Core
[۲] Support
[۳] Height

عبارت دیگر:

$$hgt(\widetilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x).$$

تعریف ۵.۲.۱: مجموعه‌ی فازی A را نرمال[۱] گویند اگر و تنها اگر ارتفاع $\widetilde{A}$ برابر یک باشد، یعنی

$$\max_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) = ۱,$$

در غیر این صورت مجموعه‌ی فازی را زیر نرمال[۲] گویند. هر مجموعه‌ی فازی غیر نرمال $\widetilde{A}$ را می‌توان با تقسیم $\mu_{\tilde{A}}(x)$ بر ارتفاع $\widetilde{A}$ نرمال کرد.

تعریف ۶.۲.۱: وقتی که X یک مجموعه‌ی متناهی است، عدد اصلی[۳] مجموعه‌ی فازی $\widetilde{A}$ در X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\widetilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x),$$

و عدد اصلی نسبی مجموعه‌ی فازی $\widetilde{A}$ بر X عبارت است از:

$$||\widetilde{A}|| = \frac{|\widetilde{A}|}{|X|}.$$

که در آن $|\widetilde{A}|$ اندازه‌ی مجموعه $\widetilde{A}$ و $|X|$ اندازه مجموعه مرجع می‌باشد.
واضح است که عدد اصلی نسبی به عدد اصلی مجموعه مرجع وابسته است. در نتیجه برای مقایسه دو مجموعه با میزان عدد اصلی باید مجموعه مرجع X برای هر دو یکی فرض شود.

تعریف ۷.۲.۱: مجموعه‌ی فازی $\widetilde{A}$ را تهی گویند اگر برای هر $x \in X$، $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۰$. به عبارت دیگر $|\widetilde{A}| = ۰$.

[۱] Normal
[۲] Subnormal
[۳] Cardinal number

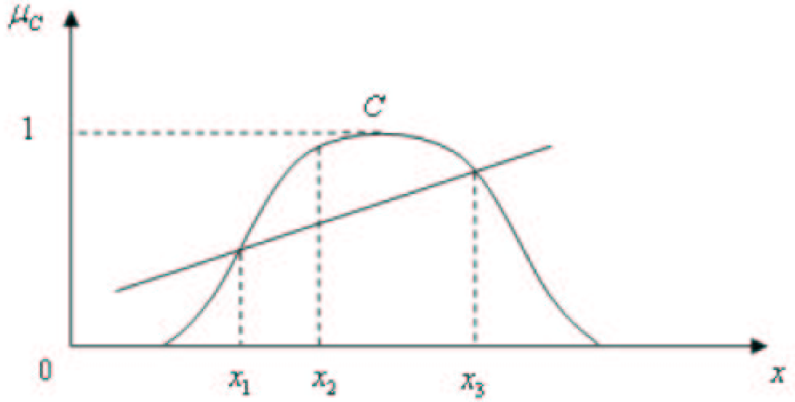
تعریف ۸.۲.۱: مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x_1, x_2 \in X$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$$

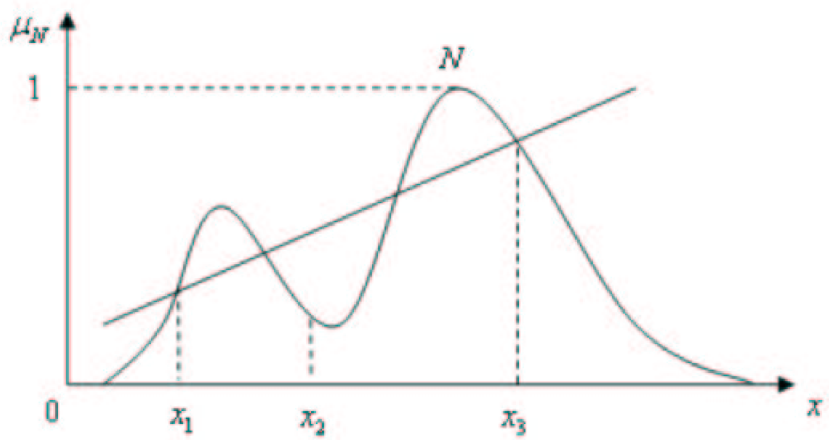
به عبارت دیگر برای هر $x_1, x_2 \in X$ و برای هر $x \in [x_1, x_2]$ داشته باشیم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$$

شکل ۱.۱ مثالی از یک مجموعه‌ی فازی محدب و شکل ۲.۱ مجموعه‌ی فازی نامحدب است.



شکل ۱.۱: مجموعه فازی محدب



شکل ۲.۱: مجموعه فازی نامحدب

۳.۱ عملگرهای مجموعه‌های فازی

این عملگرها تعمیم عملگرهای مجموعه‌ای برای مجموعه‌های معمولی است. از آنجایی که تابع عضویت عامل مشخص کننده‌ی یک مجموعه‌ی فازی می‌باشد پس برای عملگرهایی که روی مجموعه‌های فازی ارائه می‌شود از تابع عضویت مجموعه‌ها استفاده می‌شود. در تمامی تعاریف زیر X یک مجموعه‌ی مرجع است.

تعریف ۱.۳.۱: اجتماع دو مجموعه‌ی $\tilde{A}, \tilde{B} \in \Im(X)$، مجموعه‌ای است مانند $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B} \in \Im(X)$ با تابع عضویت

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}.$$

$\tilde{C}$ کوچکترین مجموعه‌ی فازی است که هم $\tilde{A}$ و هم $\tilde{B}$ را شامل می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱: اشتراک دو مجموعه‌ی $\tilde{A}, \tilde{B} \in \Im(X)$، مجموعه‌ای است مانند $\widetilde{D} = \tilde{A} \cap \tilde{B} \in \Im(X)$ با تابع عضویت

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}.$$

$\widetilde{D}$ بزرگترین مجموعه‌ی فازی است که هم $\tilde{A}$ و هم $\tilde{B}$ را شامل می‌شود.

تعریف ۳.۳.۱: متمم مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$، مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}^c$ است با تابع عضویت زیر:

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = ۱ - \mu_{\tilde{A}}(x).$$

تذکر ۱.۳.۱: قوانین تناقض و میانه‌ی غیر مشمول برای مجموعه‌های فازی برقرار نیست. به عبارت دیگر:

$$\tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}} \neq ۰, \qquad \tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} \neq X.$$