بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

۹۱۲۵۲۱۳

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

گرایش جبر

عنوان

بعد تک‌زنجیری مدول‌ها

استاد راهنما:

دکتر امیدعلی شهنی کرمزاده

دکتر مریم داودیان

نگارنده:

مجتبی یوسفی قلعه گژدمی

بهمن ۱۳۹۳

نام خانوادگی: یوسفی قلعه‌گزدمی **نام:** مجتبی	**شماره دانشجویی:**۹۱۲۵۲۱۳
عنوان پایان‌نامه: بعد تک‌زنجیری مدول‌ها	
استاد راهنما: دکتر امیدعلی شهنی کرمزاده و دکتر مریم داودیان	
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض	**گرایش:** جبر
محل تحصیل: دانشگاه شهید چمران اهواز **دانشکده:** علوم ریاضی و کامپیوتر	**گروه:** ریاضی
تاریخ فارغ التحصیلی: بهمن ۱۳۹۳	**تعداد صفحه:** ۱۱۸

واژه‌های کلیدی: مدول تک‌زنجیری، حلقه زنجیری، بعد تک‌زنجیری، طول مدول، مدول نیم‌ساده، حلقه نیم‌ساده آرتینی

چکیده:

در این پایان‌نامه بعد تک‌زنجیری مدول‌ها را تعریف و بررسی می‌کنیم. بعد تک‌زنجیری یک مدول، مقدار انحراف آن مدول از تک‌زنجیری بودن را اندازه‌گیری می‌کند. نشان می‌دهیم برای حلقه‌ی R و عدد ترتیبی α، یک R-مدول با بعد تک‌زنجیری α وجود دارد. هم‌چنین نشان می‌دهیم حلقه‌ی تعویض‌پذیر R نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر هر R- مدول متناهی تولیدشده بعد تک‌زنجیری داشته باشد.

در ادامه ویژگی‌های حلقه‌هایی که مدول‌های آن‌ها بعد تک‌زنجیری دارند را بیان می‌کنیم. در واقع نشان می‌دهیم هر R- مدول راست بعد تک‌زنجیری دارد اگر و تنها اگر هر R- مدول راست آزاد $\bigoplus_{i=1}^{\infty} R$ بعد تک‌زنجیری داشته باشد اگر وتنها اگر R یک حلقه‌ی نیم‌ساده آرتینی باشد.

تقدیم به پدر و مادر عزیز و مهربانم

که در سختی‌ها و دشواری‌های زندگی همواره یاوری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم بوده‌اند.

تقدیم به همسرم

به پاس قدردانی از قلبی آکنده از عشق و معرفت که محیطی سرشار از سلامت و امنیت و آرامش و آسایش برای من فراهم آورده است.

سپاس گزاری

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره‌ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه‌های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه سار بنده‌نوازی‌هایش پایان‌نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان‌نامه به انجام نمی‌رسید.

ابتدا از اساتید گرانقدرم جناب آقای دکتر امیدعلی شهنی کرمزاده و سرکار خانم دکتر مریم داودیان که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده داشتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

سپاس آخر را به مهربان‌ترین هم‌راهان زندگیم، به پدر، مادر و همسر عزیزم تقدیم می کنم که حضورشان در فضای زندگیم مصداق بی‌ریای سخاوت بوده است..

مجتبی یوسفی قلعه‌گرژدمی
بهمن ۱۳۹۳

فهرست مطالب

پیشگفتار

این پایان‌نامه در چهار فصل تنظیم شده است. در فصل اول، ابتدا مفهوم اعداد اصلی و ویژگی‌های آن بیان می‌شود. سپس مفهوم اعداد ترتیبی را بیان و برخی از ویژگی‌های آن‌ها را بررسی می‌کنیم. در ادامه جمع و ضرب اعداد ترتیبی را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که جمع و ضرب اعداد ترتیبی خاصیت جابجایی ندارد.

فصل دوم به مطالب بنیادی حلقه و مدول اختصاص دارد. در این فصل به مفاهیم مهمی از جمله حلقه و مدول‌های نوتری و آرتینی، حلقه و مدول‌های ساده و نیم‌ساده، ساکل مدول و سری ساکل، حلقه کامل و نیم‌کامل، حلقه و مدول‌های هافین، مدول‌های پوچ، نیم‌پوچ و بعد پوچ متناهی و ... پرداخته شده است. ارائه‌ی این مفاهیم می‌تواند در فهم و درک صحیح فصل‌های بعدی این پایان‌نامه مؤثر باشد، هم‌چنین برخی از قضایای مهم آن‌ها نیز بیان شده است.

فصل سوم به دو بخش تقسیم شده است که پایه و اساس فصل چهارم می‌باشد. در بخش اول ابتدا به معرفی سری ترکیبی و طول مدول پرداخته شده است. سپس ویژگی‌ها و قضایای مهم مربوط به آن‌ها بیان شده است. بخش دوم به مدول‌های تک‌زنجیری اختصاص دارد. در این بخش مدوهای تک‌زنجیری، حلقه‌ی تک‌زنجیری و حلقه و مدول‌های زنجیری را معرفی می‌کنیم. سپس مثال‌هایی از آن‌ها را ارائه می‌دهیم و به بیان قضایا و ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم.

فصل چهارم که فصل اصلی این پایان‌نامه می‌باشد، به سه بخش تقسیم شده است. در بخش اول بعد تک‌زنجیری مدول‌ها را تعریف و بررسی می‌کنیم. بعد تک‌زنجیری یک مدول، یک عدد ترتیبی است که نشان می‌دهد یک مدول چه مقدار از تک‌زنجیری بودن انحراف دارد. برای تعریف بعد تک‌زنجیری مدول‌ها روی حلقه

R، ابتدا با استقرای ترامتناهی، برای تمام اعداد ترتیبی $\alpha \geq ۱$، کلاس‌های ζ_α از R- مدول‌ها را تعریف می‌کنیم؛ برای شروع، فرض می‌کنیم $\zeta_۱$ کلاس مدول‌های تک‌زنجیری غیرصفر باشد. سپس، عدد ترتیبی $\alpha > ۱$ را در نظر می‌گیریم؛ فرض می‌کنیم ζ_β برای تمام اعداد ترتیبی $\beta < \alpha$ تعریف شده باشد، فرض می‌کنیم ζ_α کلاسی از R- مدول‌های غیرصفر باشد به طوری که به ازای هر زیرمدول $N < M$، که $M \ncong \frac{M}{N}$ داشته باشیم $\frac{M}{N} \in \bigcup_{\beta<\alpha} \zeta_\beta$.

اگر ζ_α هایی وجود داشته باشد به طوری که $M \in \zeta_\alpha$، در این صورت کوچک‌ترین عدد ترتیبی α که $M \in \zeta_\alpha$ را بعد تک‌زنجیری مدول M تعریف می‌کنیم و آن را به صورت $u.s.dim(M)$ نمایش می‌دهیم. اگر $M = ۰$ تعریف می‌کنیم $u.s.dim(M) = ۰$ و چنانچه R- مدول M غیرصفر و متعلق به هیچ ζ_α ای نباشد، گوییم "$u.s.dim(M)$ تعریف نشده است" یا که "M بعد تک‌زنجیری ندارد".

در این بخش بعضی از قضایای اساسی بعد تک‌زنجیری را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که R- مدول M بعد تک‌زنجیری دارد اگر و تنها اگر برای هر زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M مانند $M_۱ \leq M_۲ \leq M_۳ \leq \ldots$، عدد $n \geq ۱$ وجو داشته باشد به طوری که $\frac{M}{M_n}$ تک‌زنجیری باشد یا برای هر $k \geq n$ داشته باشیم $\frac{M}{M_n} \cong \frac{M}{M_k}$ (قضیه ۴.۱.۴ را ببینید). این نتیجه می‌دهد که هر مدول نوتری بعد تک‌زنجیری دارد (نتیجه ۳.۱.۴ را ببینید). هم‌چنین نشان می‌دهیم که حلقه‌ی تعویض‌پذیر R نوتری است اگر و تنها اگر هر R- مدول متناهی تولیدشده بعد تک‌زنجیری داشته باشد (نتیجه ۴.۱.۴ را ببینید).

در بخش دوم رابطه‌ی بین بعد تک‌زنجیری یک مدول با طول آن را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که اگر M یک R- مدول راست با طول متناهی باشد، آن‌گاه $u.s.dim(M) \leq \ell(M)$ (قضیه ۱.۲.۴ را ببینید). با توجه به این‌که هر مدول با طول متناهی بعد تک‌زنجیری دارد و با استفاده از این قضیه نتیجه می‌گیریم که حلقه‌ی تعویض‌پذیر R آرتینی است اگر و تنها اگر هر R- مدول متناهی تولیدشده بعد تک‌زنجیری متناهی داشته باشد (نتیجه ۱.۲.۴ را ببینید). بعلاوه نشان می‌دهیم که بعد یک مدول نیم ساده متناهی تولیدشده با طول آن برابر است (قضیه ۴.۲.۴ را ببینید).

در بخش سوم حلقه‌هایی را بررسی می‌کنیم که مدول‌های راست (چپ) آن‌ها بعد تک‌زنجیری دارند. نشان می‌دهیم که برای حلقه‌ی R، مدول راست $\bigoplus_{i=۱}^{\infty} R$ بعد تک‌زنجیری دارد اگر و تنها اگر R نیم‌ساده آرتینی باشد

اگر و تنها اگر تمام R– مدول‌های راست بعد تک‌زنجیری داشته باشند (قضیه ۲.۳.۴ را ببینید).

در آخر لازم به ذکر است سراسر این پایان‌نامه R یک حلقه‌ی یک‌دار و مدول‌ها یکانی می‌باشند.

فصل ۱

اعداد اصلی و ترتیبی

مقدمه

در این فصل ابتدا مفهوم اعداد اصلی را معرفی می‌کنیم. ویژگی‌های متشابه و متمایز بین اعداد اصلی متناهی و ترامتناهی را ضمن شناسایی جمع و ضرب اعداد اصلی عرضه می‌کنیم. سپس مفهوم اعداد ترتیبی را معرفی کرده و شگفتی‌های حساب ترتیبی را در مطالعه‌ی جمع و ضرب ترتیبی ذکر کرده‌ایم.

۱.۱ اعداد اصلی

در این بخش مفهوم اعداد اصلی را که در واقع یک مفهوم اولیه برای اندازه‌ی مجموعه‌ها است معرفی می‌کنیم و سپس مجموع و حاصل‌ضرب اعداد ترتیبی را تعریف می‌کنیم. هم‌چنین برخی از ویژگی‌ها و قضایای مربوط به آن‌ها را بیان می‌نماییم.

تعریف ۱.۱.۱. (**مجموعه های متشابه یا هم‌ارز**) دو مجموعه ی A و B را متشابه یا هم‌ارز می‌نامیم و به صورت $A \sim B$ نمایش می‌دهیم، هرگاه یک تناظر یک به یک بین A و B موجود باشد.

تعریف ۲.۱.۱. (**عدد اصلی**) اگر A یک مجموعه باشد در این صورت عدد اصلی آن را به صورت $|A|$ نمایش می‌دهیم و برای اعداد اصلی اصول موضوع زیر را داریم:

۱) هر مجموعه‌ی A با یک عدد اصلی مربوط است و برای هر عدد اصلی a یک مجموعه‌ی A وجود دارد به طوری که $|A| = a$.

۲) $|A| = ۰$ اگر و تنها اگر $A = \emptyset$.

۳) اگر A یک مجموعه‌ی متناهی غیرتهی باشد، یعنی برای یک $k \in \mathbb{N}$ ، $A \sim \{۱, ۲, ۳, ..., k\}$، آن‌گاه $|A| = k$.

۴) برای هر دو مجموعه‌ی A و B، $|A| = |B|$ اگر و تنها اگر $A \sim B$.

قضیه ۱.۱.۱. هر مجموعه از اعداد اصلی خوش‌ترتیب است.

اثبات. رجوع کنید به قضیه ۹.۳ مرجع [۲۲]. □

تعریف ۳.۱.۱. دو مجموعه‌ی A و B مفروضند. گوییم $|A| \leq |B|$، هرگاه A با یک زیرمجموعه‌ی B هم‌ارز باشد و اگر $|A| \leq |B|$ و $|A| \neq |B|$، آن‌گاه می‌نویسیم $|A| < |B|$.

مثال ۱.۱.۱. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

تبصره ۱.۱.۱. اگر A و B دو مجموعه باشند به طوری که $|A| \leq |B|$ و $|B| \leq |A|$، آن‌گاه $|A| = |B|$.

تعریف ۴.۱.۱. (**جمع اعداد اصلی**) فرض کنید a و b دو عدد اصلی و A و B مجموعه‌های مجزا باشند، به طوری که $|A| = a$ و $|B| = b$. در این صورت تعریف می‌کنیم $a + b = |A \cup B|$.

توجه ۱.۱.۱. در صورتی که مجموعه‌های A و B مجزا نباشند، می‌توانیم مجموعه‌های مجزای $X = A \times \{o\}$ و $Y = B \times \{۱\}$ را به جای آن‌ها به کار ببریم.

بنابراین $X \sim A$ ، $Y \sim B$ و $X \cap Y = \varnothing$.

قضیه ۲.۱.۱. فرض کنید x، y و z اعداد اصلی دلخواهی باشند. در این صورت داریم :

۱) $x + y = y + x$

۲) $(x+y)+z = x+(y+z)$

به پیروی از گئورگ کانتور، نماد $\aleph_0$ (بخوانید الف–صفر؛ $\aleph$ اولین حرف الفبای عبری است) برای نشان دادن عدد اصلی یک مجموعه‌ی شمارای نامتناهی و نماد c برای نشان دادن عدد اصلی مجموعه‌ی اعداد حقیقی به کار می‌روند. یعنی؛ $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ ، $|\mathbb{R}| = c$.

مثال ۲.۱.۱. مجموع $\aleph_0 + \aleph_0$ را بیابید.

حل: فرض کنیم $\mathbb{N}_e$ و $\mathbb{N}_o$ به ترتیب مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج و مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد باشند. بنابراین $\mathbb{N}_e$ و $\mathbb{N}_o$ زیرمجموعه‌های نامتناهی و مجزای $\mathbb{N}$ هستند و اجتماع آن‌ها $\mathbb{N}$ است. در نتیجه بنا به تعریف جمع اعداد اصلی داریم:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = |\mathbb{N}_e| + |\mathbb{N}_o| = |\mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o| = |\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

توجه ۲.۱.۱. نتیجه‌ی مثال بالا یک ویژگی اختصاصی اعداد اصلی ترامتناهی است؛ زیرا در اعداد اصلی متناهی $m+n=n$ تنها به ازای $m=0$ درست است. هم‌چنین می‌توان نشان داد که $c+c=c$ و $\aleph_0 + c = c$.

تعریف ۵.۱.۱. (**ضرب اعداد اصلی**) فرض کنید a و b دو عدد اصلی و A و B دو مجموعه باشند به طوری که $a=|A|$ و $|B|=b$، در این صورت تعریف می‌کنیم $ab = |A \times B|$.

قضیه ۳.۱.۱. ضرب اعداد اصلی دارای خواص جابجایی، شرکت‌پذیری و پخش‌پذیری است.

مثال ۳.۱.۱. فرض کنید x یک عدد اصلی دلخواه باشد، مقادیر $1x$، $0x$ و $\aleph_0\aleph_0$ را بیابید.

حل. فرض کنیم x یک عدد اصلی دلخواه باشد، بنابراین مجموعه‌ی A وجود دارد به طوری که $|A| = x$. چون $A \sim \{1\} \times A$ پس $1x$. هم‌چنین چون $A \sim \emptyset \times A$ بنابراین $0x$. از طرفی، چون $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ پس $\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$.

۲.۱ مجموعه‌های جزئاً مرتب و کاملاً مرتب

در این بخش مجموعه‌های جزئاً مرتب و کاملاً مرتب را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. اگر P یک مجموعه و R یک رابطه روی مجموعه‌ی P باشد، R را یک ترتیب جزئی در P می‌نامیم، هرگاه برای هر x، y و z داشته باشیم :

۱) xRx

۲) xRy و yRx نتیجه دهد $x = y$.

۳) xRy و yRz نتیجه دهد xRz.

مجموعه‌ی P با ترتیب جزئی "$\leq$" را با $(P, \leq)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه‌ای که دارای یک ترتیب جزئی باشد، مجموعه‌ی جزئاً مرتب نامیده می‌شود و اگر هر دو عضو این مجموعه قابل مقایسه باشند؛ یعنی، برای هر x و y در P، داشته باشیم، $x \leq y$ یا $y \leq x$. در این صورت، مجموعه‌ی P را یک مجموعه‌ی کاملاً مرتب یا مجموعه‌ی مرتب خطی یا زنجیر می‌نامیم.

مثال ۱.۲.۱. مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ با رابطه‌ی عادکردن، یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه‌ی کاملاً مرتب باشد، یک قطعه از A، یک زیر مجموعه مانند S از A است به طوری که اگر $y \in S$، $x \in A$ و $x \leq y$، آن‌گاه $x \in S$.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید $(A, \leq)$ یک مجموعه‌ی خوش‌ترتیب و x یک عضو دلخواه از A باشد، در این صورت مجموعه‌ی تهی ، مجموعه‌ی A و مجموعه‌ی $A_x = \{a \in A | a < x\}$ قطعه‌های A هستند.

تعریف ۴.۲.۱. مجموعه‌ی مرتبی که هیچ دو عضو مقایسه‌پذیری نداشته باشد، مجموعه‌ی جزئاً مرتب بدیهی نامیده می‌شود.

۳.۱ اعداد ترتیبی

به طور ساده می‌توان گفت که در محاسبات متناهی، اعداد اصلی همان اعداد «شمارشی» ۱، ۲، ۳ و ... و اعداد ترتیبی همان اعداد «مرتبه‌ای»: اولین، دومین، سومین و ... هستند. تمایز بین اعداد اصلی متناهی و اعداد ترتیبی متناهی آن‌قدر ناچیز است که اعداد طبیعی را می‌توان در هر دو مورد به کار برد. اما مفهوم عدد ترتیبی نامتناهی (ترامتناهی) از مجموعه‌ی خوش‌ترتیب نامتناهی به وجود می‌آید.

در این بخش مجموع، حاصل‌ضرب و توان اعداد ترتیبی را تعریف می‌کنیم. هم‌چنین برخی از ویژگی‌ها و قضایای مربوط به آن‌ها را بیان می‌کنیم. می‌دانیم که اگر A و B دو مجموعه‌ی خوش‌ترتیب باشند، آن‌گاه اجتماع و حاصل‌ضرب دکارتی آن‌ها نیز مجموعه‌هایی خوش‌ترتیب می‌باشند. پس می‌توانیم جمع و ضرب اعداد ترتیبی را تعریف کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. مجموعه‌ی مرتب A را خوش‌ترتیب می‌نامیم، هرگاه هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از آن عضو ابتدا داشته باشد. به عبارتی دیگر؛

$$\emptyset \neq S \subseteq A \Longrightarrow \exists s_0 \in S : \forall s \in S, s_0 \leq s.$$

تعریف ۲.۳.۱. دو مجموعه‌ی خوش‌ترتیب A و B را یک‌ریخت ترتیبی می‌نامیم، هرگاه تابع دوسویی $f : A \longrightarrow B$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $a_1, a_2 \in A$، اگر $a_1 \leq a_2$، آن‌گاه $f(a_1) \leq f(a_2)$. در این صورت، تابع f را یک‌ریختی ترتیبی می‌نامیم.

از این تعریف نتیجه می‌شود که اگر $f : A \longrightarrow B$ یک یک‌ریختی ترتیبی باشد، در این صورت وارون آن یعنی $f^{-1} : B \longrightarrow A$ نیز یک‌ریختی ترتیبی است. بعلاوه اگر $g : B \longrightarrow C$ نیز یک یک‌ریختی ترتیبی باشد، آن‌گاه ترکیب f و g یعنی $fog : A \longrightarrow C$ نیز یک‌ریختی ترتیبی است.

توجه ۱.۳.۱. اگر دو مجموعه‌ی A و B یک‌ریخت ترتیبی باشند، می‌نویسیم $A \cong B$. رابطه‌ی $\cong$ ، انعکاسی، متقارن و متعدی است.

تعریف ۳.۳.۱. اگر A یک مجموعه‌ی خوش‌ترتیب باشد، در این صورت عدد ترتیبی آن را به صورت $ord(A)$ نمایش می‌دهیم. در حالت کلی برای اعداد ترتیبی متناهی یا ترامتناهی اصول زیر برقرار می‌باشند:

۱) به هر مجموعه‌ی خوش‌ترتیب A یک عدد ترتیبی نسبت داده می‌شود و اگر α یک عدد ترتیبی باشد، در این صورت یک مجموعه‌ی خوش‌ترتیب مانند A وجود دارد به طوری که $ord(A) = \alpha$.

۲) اگر A و B دو مجموعه‌ی خوش‌ترتیب باشند، $ord(A) = ord(B)$ اگر و تنها اگر $A \cong B$.

۳) $ord(A) = ۰$ اگر و تنها اگر $A = \emptyset$.

۴) اگر مجموعه‌ی خوش‌ترتیب A به قسمی باشد که برای عدد طبیعی k داشته باشیم $A \sim \{۱, ۲, ۳, ..., k\}$، آن‌گاه $ord(A) = k$.

تبصره ۱.۳.۱. عدد ترتیبی مجموعه‌ی اعداد طبیعی را با نماد ω نمایش می‌دهیم، یعنی $\omega = ord\{۱, ۲, ۳, ...\}$.

توجه ۲.۳.۱. هر مجموعه فقط یک عدد اصلی دارد، در صورتی که یک مجموعه ممکن است تحت خوش‌ترتیبی‌های متفاوت، عددهای ترتیبی متمایزی داشته باشد. به عنوان مثال، اگر اعداد طبیعی را به صورت $\{۱, ۳, ۵, ..., ۲, ۴, ۶, ...\}$ خوش‌ترتیب کنیم، در این صورت $ord(\mathbb{N}) \neq \omega$.

تعریف ۴.۳.۱. اعداد ترتیبی را معمولاً با حروف یونانی α، β، γ و ... نمایش می‌دهند. α را یک عدد ترتیبی می‌نامیم، هرگاه α یک مجموعه‌ی خوش‌ترتیب باشد و برای هر $x \in \alpha$ داشته باشیم؛

$$S(x) = \{y \in \alpha | y < x\} = x$$

مثال ۱.۳.۱. هر عدد طبیعی مانند n یک عدد ترتیبی است. زیرا برای هر $m \in n$ داریم؛

$$S(m) = \{۰, ۱, ۲, ..., m - ۱\} = m$$

توجه ۳.۳.۱. ω کوچک‌ترین عدد ترتیبی نامتناهی است، زیرا به ازای هر $n \in \omega$، $S(n) = n$.

اکنون برخی از خواص اعداد ترتیبی را بیان می‌کنیم:

۱) اگر $x \in \alpha$، آن‌گاه $x \subseteq \alpha$. زیرا برای هر $x \in \alpha$ داریم؛

$$x = S(x) = \{y \in \alpha | y < x\} \subseteq \alpha.$$

۲) اگر $x, y \in \alpha$، آن‌گاه داریم؛

$$x < y \Longleftrightarrow x \in y$$

زیرا برای هر $x, y \in \alpha$ داریم؛

$$x < y \Longleftrightarrow y = S(y) = \{z \in \alpha | z < y\} \Longleftrightarrow x \in y.$$

لم ۱.۳.۱. هر عضو یک عدد ترتیبی، یک عدد ترتیبی است.

رجوع کنید به فصل ۷ لم ۷.۱ مرجع [۲۲].

قضیه ۱.۳.۱. اگر α و β دو عدد ترتیبی باشند و $\alpha \cong \beta$، آن‌گاه $\alpha = \beta$.

اثبات. رجوع کنید به فصل ۷ لم ۷.۲ مرجع [۲۲]. □

قضیه ۲.۳.۱. هر مجموعه از اعداد ترتیبی خوش‌ترتیب است.

اثبات. رجوع کنید به فصل ۲ قضیه ۷.۶ مرجع [۲۲]. □

قضیه ۳.۳.۱. هر مجموعه‌ی ناتهی از اعداد ترتیبی کوچک‌ترین کران بالا دارد.

اثبات. رجوع کنید به فصل ۷ لم ۷.۵ مرجع [۲۲]. □

قضیه ۴.۳.۱. اگر α و β دو عدد ترتیبی باشند، آن‌گاه $\alpha \in \beta$ یا $\beta \in \alpha$ یا $\alpha = \beta$.

اثبات. چون اعداد ترتیبی مجموعه‌های خوش‌ترتیب هستند، پس با رابطه‌ی "$\leq$" کاملاً مرتب می‌باشند. پس یا عضوی مانند y در β وجود دارد که $\alpha \cong S(y) = y \subseteq \beta$ یا عضوی مانند x در α وجود دارد به طوری که $\beta \cong S(x) = x \subseteq \alpha$ و یا $\alpha \cong \beta$ و بنا به قضیه ۱.۳.۴، $\alpha = \beta$. □

قضیه ۱.۳.۵. اگر A یک مجموعه از اعداد ترتیبی باشد، آن‌گاه $\gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ یک عدد ترتیبی است.

اثبات. رجوع کنید به قضیه $7N$ مرجع [۱۰]. □

توجه ۱.۳.۴. اگر α یک عدد ترتیبی باشد، آن‌گاه قرار می‌دهیم $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$.

قضیه ۱.۳.۶. α^+ یک عدد ترتیبی است.

اثبات. برای هر $x \in \alpha^+$، داریم $x \in \alpha$ یا $x = \alpha$. پس اگر $x \in \alpha$ ، چون α یک عدد ترتیبی است، داریم $x = S(x)$. و اگر $x = \alpha$، در این صورت $S(\alpha) = \{x \in \alpha^+ | x < \alpha\} = \alpha$. بنابراین α^+ یک عدد ترتیبی است. □

نتیجه ۱.۳.۱. همواره $\alpha < \alpha^+$، زیرا $\alpha \in \alpha^+$.

تعریف ۱.۳.۵. α^+ را تالی α می‌نامیم و داریم $\alpha^+ = \alpha + 1$.

توجه ۱.۳.۵. به ازای هر مجموعه از اعداد ترتیبی ، عدد ترتیبی‌ای وجود دارد که از تمام اعداد ترتیبی آن مجموعه بزرگ‌تر است.

اثبات. فرض می‌کنیم A یک مجموعه از اعداد ترتیبی باشد و قرار می‌دهیم $\beta = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$. بنا به قضیه ۱.۳.۵، β یک عدد ترتیبی است، پس داریم؛

$$\forall \alpha \in A, \alpha \subseteq A \Longrightarrow \alpha < \beta$$

چون $\beta < \beta^+$، پس به ازای هر $\alpha \in A$، $\alpha < \beta^+$. □

نتیجه ۱.۳.۲. مجموعه‌ی تمام اعداد ترتیبی وجود ندارد.

اثبات. فرض می‌کنیم S مجموعه‌ی تمام اعداد ترتیبی باشد (فرض خلف). بنا به توجه قبل، یک عدد ترتیبی وجود دارد که از همه بزرگ‌تر است، یعنی متعلق به این مجموعه نیست و این تناقض است. $\square$

تعریف ۶.۳.۱. عدد ترتیبی که یک عدد ترتیبی تالی نباشد، یک عدد ترتیبی حدی است. به عبارتی دیگر ، عدد ترتیبی که بلافاصله قبل از آن عدد ترتیبی وجود نداشته باشد را یک عدد ترتیبی حدی می‌نامیم.

مثال ۲.۳.۱. صفر یک عدد ترتیبی حدی است.

مثال ۳.۳.۱. ω یک عدد ترتیبی حدی است.

تعریف ۷.۳.۱. (**جمع اعداد ترتیبی**) فرض کنیم α و β دو عدد ترتیبی و A و B دو مجموعه‌ی خوش‌ترتیب مجزا باشند به طوری که $ord(A) = \alpha$ و $ord(B) = \beta$. در این صورت تعریف می‌کنیم $\alpha + \beta = ord(A \cup B)$.

در صورتی که مجموعه‌های A و B مجزا نباشند، می‌توانیم مجموعه‌های مجزای $A \times \{o\}$ و $B \times \{۱\}$ را به جای آن‌ها به کار ببریم.

توجه ۶.۳.۱. اگر α و β دو عدد ترتیبی متناهی باشند، $\alpha + \beta$ با مجموع معمولی دو عدد صحیح نامنفی سازگار است. اما برای اعداد ترتیبی ترامتناهی، ممکن است ویژگی‌های مجموع اعداد ترتیبی با حالت متناهی خیلی متفاوت باشد و در حالت کلی جمع اعداد ترتیبی دارای خاصیت جابجایی نیست.

مثال ۴.۳.۱. مجموع ترتیبی دو عدد **۵** و **۴** را پیدا کنید.

حل. $۵ = ord\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $۴ = ord\{۵, ۶, ۷, ۸\}$، پس $۴ + ۵ = ord\{۰, ۱, ۲, ..., ۸\} = ۹$.

مثال ۵.۳.۱. $\omega + ۱ \neq ۱ + \omega$، زیرا $\omega = \omega + ۱$ اما $\omega + ۱ = \omega^+$. در حالت کلی اگر k یک عدد ترتیبی متناهی غیرصفر باشد، آن‌گاه $k + \omega = \omega$ و $\omega + k \neq \omega$. زیرا؛

$$k = ord\{۰, ۱, ۲, ..., k - ۱\} \text{ و } \omega = ord\{k, k + ۱, ...\}$$

پس داریم؛

$$k+\omega = ord\{۰,۱,۲,...,k-۱,k,k+۱,...\} = \omega$$

$$\omega + k = ord\{k,k+۱,...,۰,۱,۲,...,k-۱\} > \omega$$

از این‌رو، $\omega + k \neq \omega$.

تعریف ۸.۳.۱ (**ضرب اعداد ترتیبی**) فرض کنید α و β دو عدد ترتیبی و A و B مجموعه‌های خوش‌ترتیب باشند، به طوری که $ord(A)=\alpha$ و $ord(B)=\beta$. در این صورت تعریف می‌کنیم $\alpha\beta = ord(A\times B)$.

مثال ۶.۳.۱. حاصل‌ضرب‌های ۲ω و $\omega۲$ را باهم مقایسه کنید.

حل. فرض می‌کنیم $A=\{۰,۱\}$ و $B=\{۱,۲,۳,...\}$. بنابراین $ord(A)=۲$ و $ord(B)=\omega$. پس داریم؛

$$۲\omega = ord(A\times B) = ord\{(۰,۱),(۱,۱),(۰,۲),(۱,۲),(۰,۳),(۱,۳),...\} = \omega$$

$$\omega۲ = ord\{(۱,۰),(۲,۰),(۳,۰),...,(۱,۱),(۲,۱),(۳,۱),....\} > \omega$$

بنابراین $۲\omega \neq \omega۲$. پس در حالت کلی ضرب اعداد ترتیبی خاصیت جابجایی ندارد.

قضیه ۷.۳.۱. برای اعداد ترتیبی α، β و γ داریم:

۱) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$

۲) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

۳) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$

۴) $\alpha+۰ = ۰+\alpha = \alpha$

۵) $\alpha۱ + ۱\alpha = \alpha$

۶) $\alpha۰ = ۰\alpha = ۰$