تابع تناوب مراکز درجه دوم بازگشت‌پذیر

توسط

محمد درویش‌زاده

رسالهٔ ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجهٔ

کارشناسی ارشد ریاضیات محض

زیر نظر

دکتر امید ربیعی مطلق

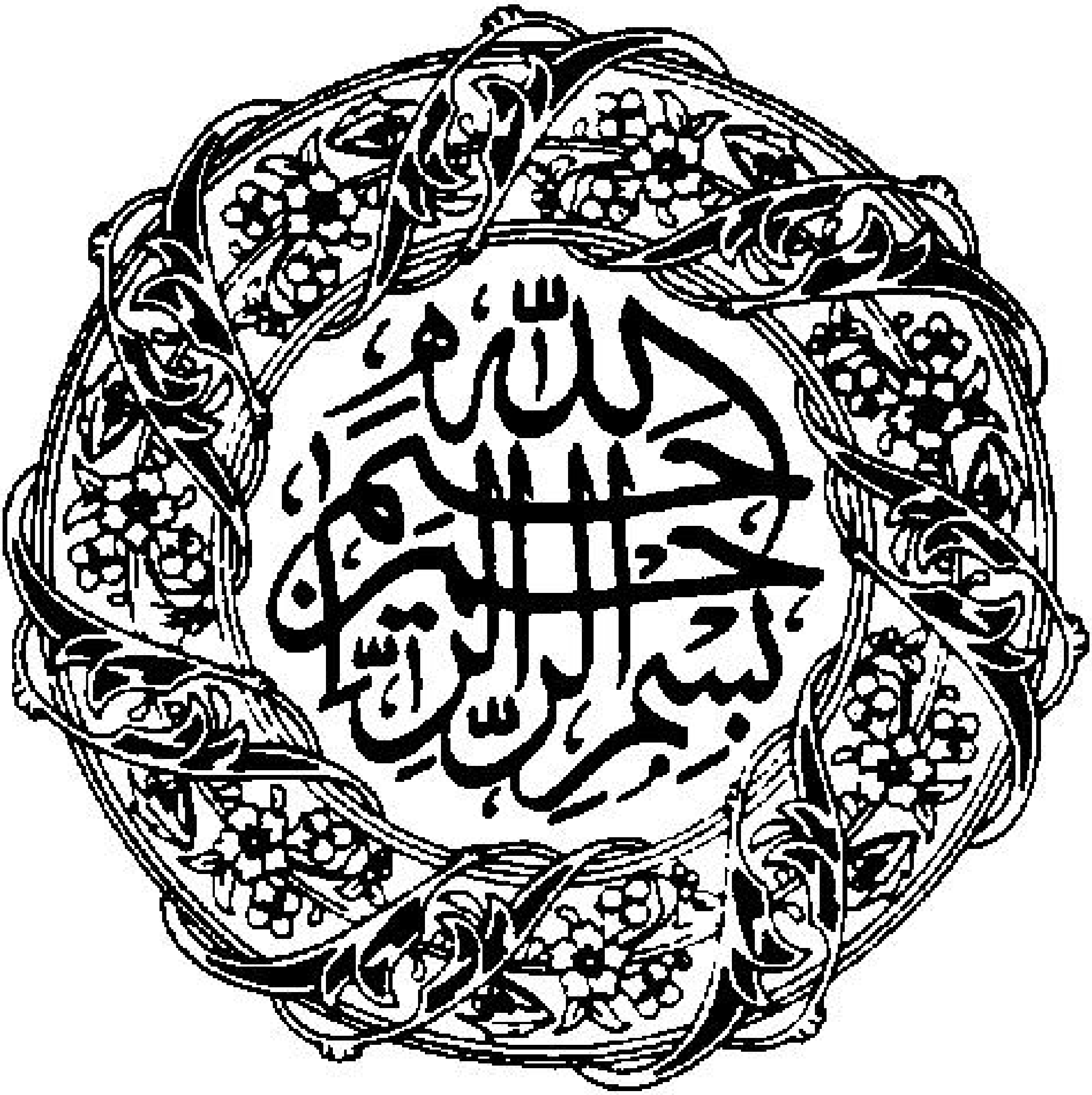
استاد مشاور

دکتر حاجی محمد محمدی‌نژاد

دی ماه ۱۳۸۹

دانشکدهٔ علوم پایه

دانشگاه بیرجند


بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

همسر مهربانم

و

فرزند عزیزم

قدردانی

ایزد یکتای پر مهر و حکیم را سپاس که مرا قرین رحمت بی منتهای خویش قرار داد تا در ضمن آن همه لطف در حق این بنده، چندی دیگر نیز دانش آموزم و توشه ای دیگر برگیرم. امید است که دانش باعث کمال روح گردد، چرا که علم آنگاه سودمند است که سرشته در جان شود و موجب فروتنی گردد.

در این جا از تمام زحماتی که اساتید ارجمند جناب آقای دکتر امید ربیعی مطلق (استاد راهنمای محترم) و جناب آقای دکتر حاجی محمد محمدی نژاد (استاد مشاور محترم) متحمل شده اند، کمال تشکر و قدر دانی را به جای می آورم و برای ایشان در تمام مراحل زندگی آرزوی سلامتی و توفیق روزافزون را از خداوند رحیم خواهانم.

لازم می دانم که از مادر عزیز و گرامیم و همچنین همسر مهربانم که در تمام مراحل پشتیبان اینجانب بودند، مراتب سپاسگزاری خود را به جای بیاورم.

در نهایت از تمامی کسانی که در طی این دوره به هر نحوی مرا در به سرانجام رسانیدن این کار یاری نمودند تشکر صمیمانه ی خود را ابراز می کنم. در این جا فرصت را مغتنم شمرده از اساتید محترم جناب آقای دکتر محمد رضا میری و جناب آقای دکتر محمد حسین حسینی که در محضر ایشان درس آموختم، هم چنین از داوران محترم؛ جناب آقای دکتر علیرضا جانفدا و جناب آقای دکتر محمد مهدی نصرآبادی و نماینده تحصیلات تکمیلی خانم دکتر نسیم نصرآبادی تشکر فراوان داشته باشم. در ضمن از جناب آقای علی آبادی و دوستان عزیزم، آقایان: عیسی دار، صادق زیبایی، حسن آخوندی، جعفر رمضانی، محسن کرمانی نژاد، میثم بازیاری، محمد حلیمی و دوست عزیز و گرامیم آقای آصف اویار حسین کمال تشکر را دارم و برای همگی سلامتی و موفقیت های آتی را آرزو می کنم.

در انتها باز شرط ادب حکم می کند که از حسن نیت و خلق و خوی کریمانه ی استاد گرامی، جناب آقای دکتر امید ربیعی مطلق تشکری ویژه داشته باشم و امیدوارم که همیشه سربلند و پیروز باشند.

تابع تناوب مراکز درجه دوم بازگشت‌پذیر

چکیده

دراین کار نمودار انشعاب تابع تناوب مربوط به خانواده‌ای از مراکز درجه دوم بازگشت پذیر را بررسی می‌کنیم، به‌عنوان نمونه سیستم‌های «لود» ناهمگن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. نمودار انشعاب موضعی تابع تناوب در مرکز در نتایج اثر «چیکون» و «جاکوبس» (انشعاب تناوب‌های بحرانی برای میدان‌های برداری مسطح[۶][1]) به‌طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. عمده‌ی بحث ارائه شده در کار حاضر در زمینه‌ی نمودار انشعاب موضعی در چندحلقه‌ای می‌باشد که ناحیه‌ی حلقوی تناوب مرکز را محدود می‌کند. روش‌هایی را که در این جا به‌کار برده‌ایم با روش‌های موجود در [۶] متفاوت است، زیرا در صورتی‌که تابع تناوب به‌طور تحلیلی در مرکز گسترش یابد برای چندحلقه‌ای گسترش همواری ندارد. منتهای مراتب شخص می‌تواند امید داشته باشد که آن مقداری گسترش مجانبی داشته باشد. از طرفی مشکل عمده‌ی دیگر برای اثبات این‌که یک پارامتر یک مقدار انشعاب نیست، آن است که، گسترش مجانبی باید در رابطه با پارامترها یکنواخت باشد. هم‌چنین ما انشعاب‌هایی در درون ناحیه‌ی حلقوی تناوب را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به‌علاوه تعدادی نواحی در فضای پارامتر که نظیر تابع تناوب، حداقل یک یا دو تناوب بحرانی دارند را مشخص می‌کنیم. بالاخره یک نمودار انشعاب حدسی کامل از تابع تناوب سیستم‌های «لود» ناهمگن را پیشنهاد می‌کنیم. لازم به‌ذکر است که نتایج ما را می‌توان در کمک به اثبات حدس «چیکون» ([۴][2]) نیز مورد استفاده قرار داد.

واژه‌های کلیدی: *تابع تناوب، ناحیه‌ی حلقوی تناوب، انشعاب، زینی، مرکز.*

[1] [C. Chicone, M. Jacobs, Bifurcation of Critical Periods for Plane Vector Fields, Trans. Amer. Math. Soc. 312 (1989) 433-486].

[2] [C. Chicone, Review in MathSciNet, Ref. 94h:58072].

جدول نمادها

تابع تناوب	P
خم	Γ_i
مقطع متقاطع	Σ
مقطع مخروطی	$\mathcal{C}$
میدان برداری	X
ناحیه ی حلقوی تناوب	$\mathcal{P}$
ویژگی خطی سازی خانواده	FLP

فهرست مطالب

۱ کلیات(تعاریف ومفاهیم) ۱

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی ۲

۱.۱.۱ یادآوری ۲

۲.۱.۱ دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل ۶

۳.۱.۱ خطی‌سازی ۸

۴.۱.۱ دستگاه‌های مسطح ۱۰

۵.۱.۱ انواع نقاط بحرانی ۱۱

۶.۱.۱ گره- زینی ۱۲

۷.۱.۱ دستگاه‌های هامیلتونی ۱۴

۸.۱.۱ دستگاه‌های پویا (دینامیکی) ۱۵

۹.۱.۱ مجموعه‌های حدی ۱۷

۱۰.۱.۱ دور حدی ۱۹

۱۱.۱.۱ جدا کننده (جدا ساز) ۲۱

۱۲.۱.۱ منیفلد ۲۲

۱۳.۱.۱ برگ‌بندی ۲۴

۱۴.۱.۱ میدان‌های برداری روی یک منیفلد ۲۵

۱۵.۱.۱ نقطه در بی‌نهایت ۳۱

۱۶.۱.۱ متقاطع اریب ۳۲

۱.۱.۱۷ نگاشت پوانکاره ۳۳
۱.۱.۱۸ منیفلدهای پایا ۳۵
۱.۱.۱۹ پایداری ساختاری ۳۷
۱.۱.۲۰ نظریه‌ی انشعاب ۳۹
۱.۱.۲۱ تابع ملنیکوف ۴۲
۱.۱.۲۲ سیستم چبیشف ۴۳
۱.۱.۲۳ انتگرال داربو ۴۴
۱.۱.۲۴ تابع دولاک ۴۵
۱.۲ تعاریف و مفاهیم اساسی ۴۶

۲ انشعاب ۵۲
۲.۱ انشعاب در مرز برون ۵۳
۲.۱.۱ مطالعه‌ی تصویر فاز ۵۳
۲.۱.۲ ناحیه‌ی حلقوی تناوب بی‌کران ۶۰
۲.۱.۳ ناحیه‌ی حلقوی تناوب کراندار ۹۵
۲.۱.۴ اثبات نتیجه‌ی اصلی ۱۰۰
۲.۲ انشعاب در درون ۱۰۱

۳ وجود تناوب‌های بحرانی، حدسیات و مشکلات ۱۰۸
۳.۱ وجود تناوب‌های بحرانی ۱۰۹
۳.۲ حدسیات و مشکلات ۱۱۲
۳.۲.۱ تصویر هندسی ۱۱۲
۳.۲.۲ انشعاب درمرز برون ۱۱۵
۳.۲.۳ انشعاب در درون ۱۱۸

کتاب‌نامه ۱۱۹

دیباچه و دیدگاه کلی

در این پایان‌نامه نمودار انشعاب از تابع تناوب مربوط به خانواده‌ای از مراکز درجه‌ی دوم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
«چیکون» حدسی به‌صورت زیر دارد:
اگر یک سیستم درجه‌ی دوم که مرکزی به‌همراه یک تابع تناوب که یکنواخت نیست، داشته باشد، آنگاه توسط یک تبدیل آفین و یک تغییر مقیاس ثابت از زمان، می‌توان آن سیستم را با شکل نرمال «لود» به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\dot{x} = -y + Bxy \quad , \quad \dot{y} = x + Dx^۲ + Fy^۲ \qquad (۱)$$

در ضمن تابع تناوب این مراکز حداکثر دو تناوب بحرانی دارد ([۴] را ببینید).
در واقع ملاک‌های تحلیلی بسیاری موجود است که درستی حدس را نشان می‌دهند (برای نمونه [۷،۲۴،۳۱] را ببینید). از طرف دیگر در [۹] ثابت شده که اگر $B = ۰$، آنگاه تابع تناوب مرکز در مبداء سیستم (۱) کاملاً یکنواخت است. هم‌چنین از منظر مطالعه‌ی تابع تناوب جالب‌ترین طبقه‌ی مراکز درجه‌ی دوم خانواده‌ی (۱) با $B \neq ۰$است، که با $B = ۱$، توسط یک تغییر مقیاس داده می‌شوند، یعنی سیستم‌هایی به‌صورت زیر مورد مطالعه قرار می‌گیرد:

$$\dot{x} = -y + xy \quad , \quad \dot{y} = x + Dx^۲ + Fy^۲ \qquad (۲)$$

این سیستم، درست همان خانواده‌ی از مراکز درجه‌ی دوم است که ما می‌خواهیم آن‌را در این جا مورد مطالعه قرار دهیم، و با پیروی از مجموعه‌ی اصطلاحات علمی و فنی در [۶]، آن‌ها را *سیستم‌های «لود» ناهمگن* می‌نامیم. توجه کنید که تبدیل $(x, y, t) \longmapsto (x, -y, -t)$ شکل نرمال «لود» (۱) را حفظ می‌کند، هم‌چنین این سیستم‌ها نسبت به محور x بازگشت‌پذیرند. در واقع هر مرکز درجه‌ی دوم بازگشت‌پذیر توسط یک تبدیل آفین و یک تغییر مقیاس ثابت از زمان می‌تواند به شکل نرمال ««لود»» آورده شود (برای نمونه [۳۳] را ببینید). فشرده‌سازی $\mathbb{R}^۲$ بردیسک «پوانکاره» مرز ناحیه‌ی حلقوی تناوب از مرکز دو مؤلفه‌ی همبند دارد، مرکز خودش و یک چندحلقه‌ای که آن‌ها را به‌ترتیب *مرز درون و مرز برون ناحیه‌ی حلقوی* می‌نامیم.

در لم ۱.۲.۱ خواهیم دید که نمودار انشعاب تابع تناوب شامل سه قسمت است:

(۱) انشعاب تابع تناوب در مرز درون (یعنی مرکز)،

(۲) انشعاب تابع تناوب در مرز برون (یعنی چندحلقه‌ای)،

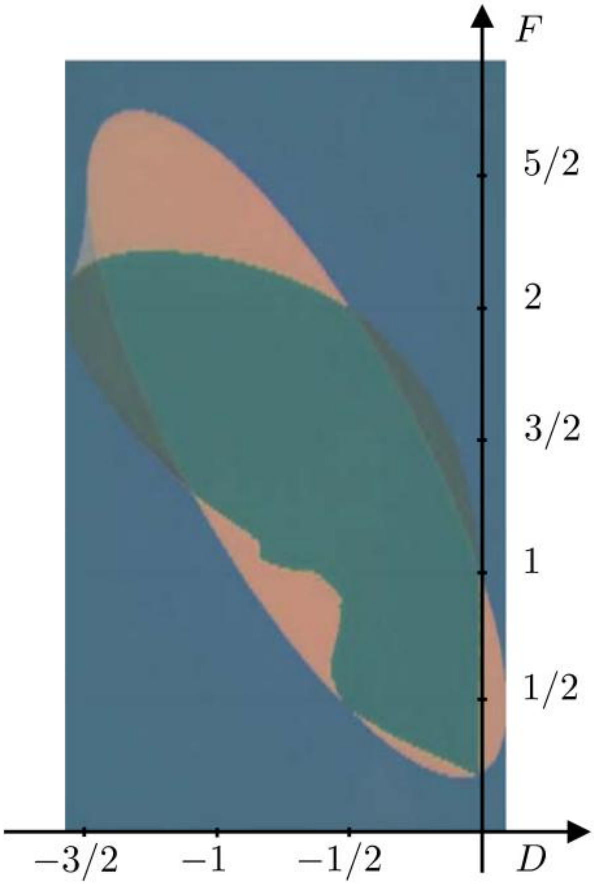
(۳) انشعاب تابع تناوب در درون ناحیه‌ی حلقوی تناوب.

برای تعاریف دقیق فصل اول را ببینید.

لازم به‌ذکر است که نمودار انشعاب موضعی تابع تناوب در مرز درون برای مراکز درجه‌ی دوم در نتایج «چیکون» و «جاکوبس» کاملاً شناخته شده است ([۶] را ببینید). نکته‌ی کلیدی در نتیجه‌ی آن‌ها (قضیه‌ی ۱.۲.۲ را ببینید) این است که تابع تناوب به‌طور تحلیلی به مرز درون گسترش می‌یابد، زیرا مرکز زوال‌ناپذیر است. بنابراین پذیرای یک بسط «تیلور» که ضرایب آن چندجمله‌ای‌های روی پارامترهای سیستم اولیه هستند، خواهد بود.

برای سیستم (۲) مجموعه‌ی تراز صفر از ضریب نخست یک بیضی Γ_C است که توسط رابطه‌ی $۱۰D^۲ + ۱۰DF - D + ۴F^۲ - ۵F + ۱ = ۰$ داده شده است (شکل ۸.۲ را ببینید) که با نمودار انشعاب موضعی تابع تناوب در مرز درون متناظر است.

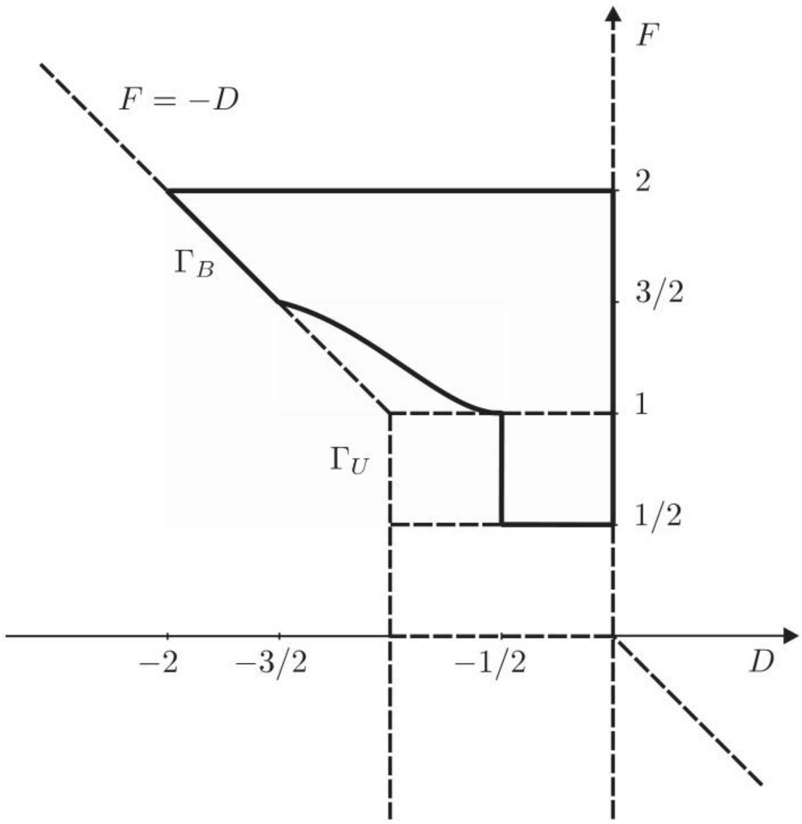
حدود سال ۱۹۹۰ «چیکون» و «جاکوبس» یک محاسبه‌ی عددی از نمودار انشعاب کامل به‌دست آورند (شکل ۱ را ببینید) که می‌توان آن‌را به‌آسانی با بیضی Γ_C یکی گرفت.



شکل ۱: نمودار انشعاب عددی توسط «چیکون» و «جاکوبس».

هم‌چنین یک خم کلیوی شکل عجیب را ظاهر می‌نماید که با تقریب عددی نمودار انشعاب موضعی از تابع تناوب در مرز برون متناظر می‌باشد. هدف اصلی که ما در این اثر آن‌را دنبال می‌کنیم، برآورد کردن تحلیلی این مجموعه است.
در مطالعه‌ی نمودار انشعاب تابع تناوب در مرز برون ناحیه‌ی حلقوی تناوب با دو مشکل عمده مواجه می‌شویم:
نخست این‌که، برخلاف وضعیت در مرز درون تابع تناوب روی مرز برون به‌طور هموار گسترش نمی‌یابد، منتهای مراتب می‌توان گسترش مجانبی را انتظار داشت.
دوم این‌که، به‌منظور اثبات این‌که یک پارامتر، یک مقدار انشعاب نیست، نیازمند یک

گسترش مجانبی خواهیم بود، که در رابطه با پارامترها یکنواخت باشد.
دستیابی به این مطلب ساده نیست، زیرا شکل چندحلقه‌ای در مرز برون مانند تغییر پارامترها تغییر می‌کند.
در این جا برای آن‌که نتیجه‌ی اصلی کار خود را فرمول‌بندی کنیم چند نمادگذاری را بیان کرده و در ادامه نحوه‌ی پی‌ریزی فصول را ارائه خواهیم داد.
فرض کنید Γ_U اجتماع خطوط راست نقطه‌چین در شکل ۲ باشد. هم‌چنین خم تیره را



شکل ۲: نمودار انشعاب تابع تناوب در مرز برون.

Γ_B در نظر بگیرید (زیر نویس‌های B و U به‌ترتیب نشانگر انشعاب و ناآشکار می‌باشند.)
خم Γ_C، به‌جز برای قطعه‌ی $(-۱, -\frac{۱}{۲}) \times \{\frac{۱}{۲}\}$، با انشعابات تصویر فاز متناظر می‌باشد که مرز برون ناحیه‌ی حلقوی تناوب را تحت تأثیر قرار می‌دهد (بخش ۱.۱.۲ را ببینید).
خم Γ_B اجتماع تعدادی پاره خط راست آشکار و خمی است که نقاط $(-\frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۲})$ و $(-\frac{۱}{۲}, ۱)$

را به‌هم وصل می‌کند. برای دقت بیشتر اجازه دهید که این خم معین را مانند مجموعه‌ی تراز صفر از یک تابع صریح که در زیر بخش نخست از بخش ۲.۱.۲ معرفی می‌کنیم در نظر بگیریم. برای رسم آن در شکل ۲ آن‌را به‌صورت عددی محاسبه کرده‌ایم. در میان ویژگی‌های دیگری که گردآوری شده است در گزاره‌ی ۶.۱.۲ به‌طور تحلیلی ثابت کرده‌ایم که آن نمودار یک تابع تحلیلی $D = \mathcal{G}(F)$ است. به‌ویژه از گزاره‌ی ۶.۱.۲ نتیجه می‌شود که Γ_B یک خم «جردن» است. بنابراین می‌توانیم مؤلفه‌های کراندار و بی‌کران $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_B$ را در نظر بگیریم، که به‌ترتیب آن‌ها را با $\mathcal{D}_B$ (برای نزولی) و $\mathcal{I}_B$ (برای صعودی) نشان می‌دهیم. اکنون با این نمادگذاری‌ها می‌توانیم نتیجه‌ی اصلی کار حاضر را ذکر کنیم.

قضیه‌ی A . *نشانه‌گذاری:* $\mu = (D, F)$.

فرض کنید $\{X_\mu, \mu \in \mathbb{R}^2\}$ *خانواده‌ی میدان‌های برداری در (۲) باشد و تابع تناوب از مرکز در مبداء را در نظر بگیرید، آنگاه مجموعه‌ی باز* $\mathbb{R}^2 \setminus \{\Gamma_B \cup \Gamma_U\}$ *با مقادیر منظم موضعی تابع تناوب در مرز برون ناحیه‌ی حلقوی متناظر است. به‌علاوه:*

(الف) اگر $\mu_0 \in \mathcal{I}_B \setminus \Gamma_U$ *آنگاه تابع تناوب* X_{μ_0} *نزدیک مرز برون صعودی یکنواخت است.*

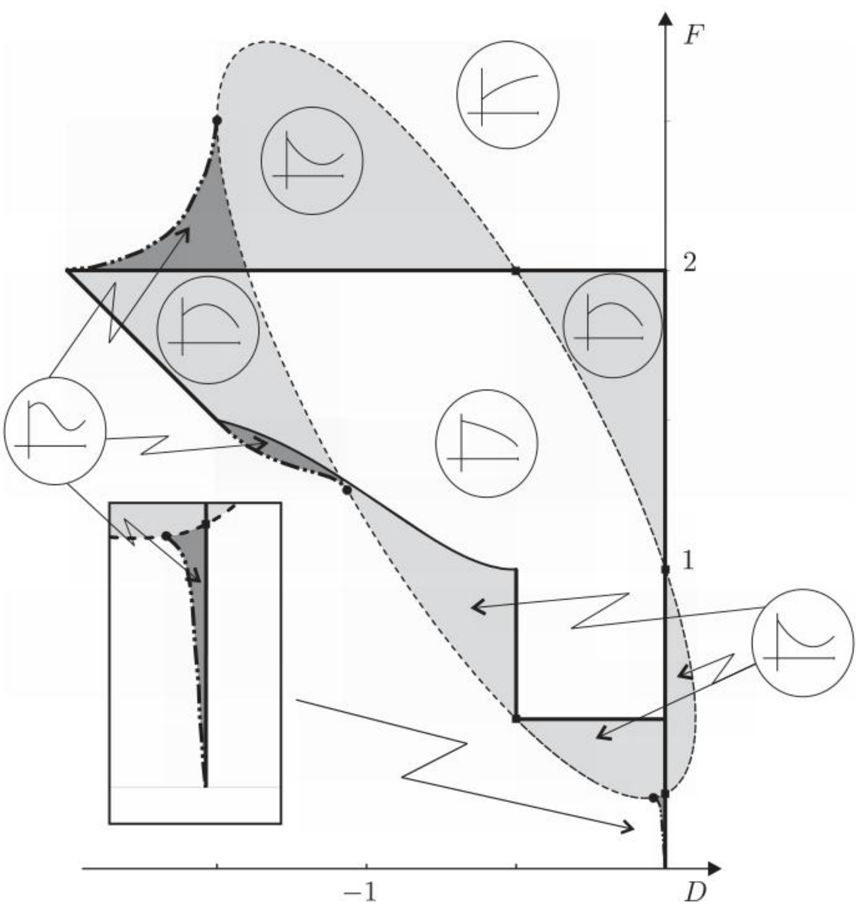
(ب) اگر $\mu_0 \in \mathcal{D}_B \setminus \Gamma_U$ *آنگاه تابع تناوب* X_{μ_0} *نزدیک مرز برون نزولی یکنواخت است.*

بالاخره پارامترها در Γ_B*، مقادیر انشعاب موضعی از تابع تناوب در مرز برون ناحیه‌ی حلقوی می‌باشند.*

ما مشخصه‌ی پارامترها در Γ_U را بیان نمی‌کنیم. ما حدس می‌زنیم که آن‌ها -به‌جز برای قطعه‌ی $[0, \frac{1}{2}] \times \{0\}$- مقادیر انشعاب در مرز برون نیستند.

تصویر عددی در شکل ۱ به‌طور نسبی با خم انشعاب Γ_B منطبق است. به‌هر حال تفاوت‌های چشم‌گیری وجود دارد. به‌ویژه، تصویر عددی بی‌شباهت، بیشترین قسمت‌های خم انشعاب پاره‌خط‌های راست هستند.

ترکیب نتایج «چیکون» و «جاکوبس» در [۶] با آن‌هایی که ما در این جا به‌دست می‌آوریم ما را به فرمول‌بندی حدس بعدی، در کامل کردن نمودار انشعاب (شکل ۳ را ببینید) تابع تناوب سیستم‌های «لود» ناهمگن هدایت می‌کند.



شکل ۳: حدس نمودار انشعاب تابع تناوب.

حدس: *نمودار انشعاب تابع تناوب از خانواده‌ی «لود» ناهمگن (۲) شامل اجتماع خم-های زیر است:*

(الف) بیضی Γ_C که با مقادیر انشعاب موضعی در مرز درون متناظر است.

(ب) خم «جردن» Γ_B - داده شده در قضیه‌ی A - به‌همراه قطعه‌ی $[0, \frac{1}{2}] \times \{0\}$ که با مقادیر انشعاب موضعی در مرز برون متناظر است.

(پ) سه خم ساده‌ی $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ که به‌ترتیب L_1 را به $(-2, 2)$، L_2 را به $(0, 0)$ و L_3 را به $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ وصل می‌کنند، با مقادیر انشعاب موضعی در درون متناظر می‌باشند.

مقادیر دقیق پارامترهای L_i که در بالا بیان شده، در (۳۶) داده شده‌اند، هم‌چنین پیرو

مجموعه‌ی اصطلاحات [۶]، آن‌ها با مراکز ضعیف مرتبه‌ی دو از سیستم (۲) متناظر می‌باشند. در واقع ما در قضیه‌ی ۲.۲.۲ وجود جرم‌هایی در L_iهای حدس زده شده از خم‌های δ_i را ثابت می‌کنیم. البته فکر می‌کنیم که تابع سیستم‌های «لود» ناهمگن حداکثر دو تناوب بحرانی دارد. شکل ۳ نشان می‌دهد در ناحیه‌هایی که حدس زده‌ایم ۰، ۱ و ۲ تناوب بحرانی وجود دارد. هم‌چنین بحثی کوتاه در مورد تغییرات گسترش در یکنواختی تابع تناوب می‌آوریم. در انتها اجازه دهید یادآوری کنیم که درقطعه‌ی $[0, \frac{1}{2}] \times \{0\}$ دو نوع متفاوت از انشعاب در مرز برون رخ می‌دهد. عملاً گذر از چپ به راست قطعه‌ی $[0, \frac{1}{4}] \times \{0\}$ با «نابودی» دو تناوب بحرانی متناظر است، در حالی‌که گذر از $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times \{0\}$ با یک «تجدید مرز» یک تناوب بحرانی متناظر می‌باشد (شکل ۳.۳ را ببینید).

در خاتمه برای سهولت مطالعه، به توضیحاتی در مورد فصولی که در این کار پیش رو می‌پردازیم.

اثر حاضر به‌صورت زیر تنظیم شده است:

در **فصل اول** تعاریف و مفاهیم دقیقی را که به‌کار خواهیم برد بیان می‌کنیم. در فصل مربوطه که آن‌را تحت عنوان پیش‌نیازها (تعاریف و مفاهیم) آورده‌ایم، دو زیر بخش در نظر گرفته شده است، بخش نخست را به تعاریف و مفاهیم «مقدماتی» و بخش دوم را به تعاریف و مفاهیم «اساسی» - که ارتباط مستقیم و تنگاتنگ با موضوع مورد بحث ما دارد- اختصاص داده‌ایم، این کار را صرفاً به‌خاطر سهولت مراجعه به تعاریف انجام داده‌ایم.

در **فصل دوم** نیز که تحت عنوان انشعاب بیان شده، دو قسمت اصلی مورد بررسی قرار می‌گیرد، که به‌ترتیب شامل مباحث انشعاب در مرزبرون و انشعاب در درون می‌باشد. قسمت اول از فصل دوم شامل چهار زیر بخش است، که در آن‌ها به‌ترتیب به مطالعه‌ی تصویر فاز و ناحیه‌ی حلقوی تناوب بی‌کران (در دو حالت) و ناحیه‌ی حلقوی تناوب کراندار می‌پردازیم و در زیر بخش آخر این قسمت اثبات قضیه‌ی A را ذکر می‌کنیم. در تمام مواردی که مطالعه می‌کنیم (شکل ۱.۲ را ببینید) چندحلقه‌ای در مرز برون از ناحیه‌ی حلقوی تناوب یک یا دو نقطه‌ی منظم دارد که زینی می‌باشند. در این موارد تقارن سیستم‌های «لود» برای از هم جداشدن تابع تناوب و برای در نظر گرفتن پیوستگی تابع زمان برای گذر در اطراف یک نقطه‌ی زینی مجوز صادر می‌کند. پیچیده‌ترین وضعیت‌ها آن‌هایی می‌باشند که در ناحیه‌ی حلقوی تناوب بی‌کران هستند، زیرا آنگاه نقطه‌ی زینی در بی‌نهایت است و فرد مجبور است که میدان‌های برداری برخه‌ریخت (مرومرفیسم) را در نظر بگیرد. بدین ترتیب برای به‌دست آوردن گسترش مجانبی بیان شده در بالا یک نتیجه‌ی اثبات در [۱۸] را به‌کار می‌بریم، که عبارات اولیه‌ی گسترش این نوع از تابع زمان را ثابت می‌کند (گزاره‌ی ۴.۱.۲ را ببینید). قضیه‌ی ۲.۱.۲ با این وضعیت کلنجار می‌رود، بنابراین از نظر اثبات دشوارترین نتیجه است. درقسمت دوم از فصل دوم، انشعابات تابع تناوب در درون ناحیه‌ی حلقوی تناوب را مطالعه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که سه جرم از خم‌ها با این نوع مقادیر انشعاب وجود دارد.

سرانجام در **فصل سوم**، تعدادی ناحیه را در فضای پارامتر معرفی می‌کنیم، زیرا تابع تناوب

متناظر، حداقل یک یا دو تناوب بحرانی دارد. همچنین در مورد تکامل حدس نمودار انشعاب تابع تناوب سیستم‌های «لود» ناهمگن اظهار نظر می‌کنیم. در انتها نیز تعدادی از سؤالات باز دقیق را برای درستی اثبات آن مطرح می‌کنیم. به‌ویژه برای مقادیر مشخص از پارامترها، چندحلقه‌ای در مرز برون ناحیه‌ی حلقوی تناوب، نقاط منظم در بی‌نهایت که زینی‌های مشدد یا گره‌های زینی هستند را دارد. در این مورد ابزار مشابه برای گزاره‌ی ۴.۱.۲ هنوز باید پیشرفته‌تر باشند. لازم به‌ذکر است مطالعه‌ی عمومی مقادیر انشعاب تابع در درون ناحیه‌ی حلقوی تناوب برای لحظه (یک آن) خارج از دسترس به‌نظر می‌رسد.

فصل ۱

کلیات(تعاریف ومفاهیم)

در این بخش ابتدا تعاریف و مفاهیم مقدماتی که در این پایان‌نامه با آن‌ها مواجه خواهیم شد را می‌آوریم سپس بخش حاضر را با تعاریف و مفاهیم اساسی که با موضوع مورد بحث ما ارتباط مستقیم و تنگاتنگ دارند را طی چند تعریف و توضیحات مربوطه که به‌عنوان پیش‌درآمد فصل آتی نیز قلمداد خواهند شد به پایان می‌رسانیم.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱.۱ یادآوری

در ابتدای این زیر بخش، جهت یادآوری قضایا و تعاریف زیر را متذکر می‌شویم.

قضیه ۱.۱.۱.۱ *اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ در نقطه‌ی $x_\circ \in \mathbb{R}^n$ مشتق پذیر باشد، آنگاه مشتقات جزیی $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ برای $i, j = ۱, ۲, ..., n$ همگی در $x_\circ$ وجود دارند و برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داریم*

$$Df(x_\circ) = \Sigma_{j=۱}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_\circ) x_j.$$

بنابراین اگر f تابعی مشتق پذیر باشد، مشتق، Df، با ماتریس «ژاکوبی» $n \times n$ زیر داده می‌شود:

$$Df = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{array} \right].$$

اگر $U \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای باز و $f : U \to \mathbb{R}$ برای هر r از کلاس (رده) C^r باشد، می‌گوییم که f هموار[۱] یا از کلاس C^∞ است. ما این کلاس‌های توابع روی U را با $C^r(U)$ و $C^\infty(U)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم $a \in \mathbb{R}^n$ و f و g دو تابع C^∞ که دامنه‌های تعریف هر دو شامل a باشد. f را هم ارز با g در a گوییم، هرگاه آن‌ها روی تعدادی مجموعه‌ی باز شامل a یکسان باشند، در این صورت می‌نویسیم: $f \sim g$. دسته‌ی کلاس‌های هم ارز ی را جرم[۲] هایی از توابع C^∞ در می‌نامیم.

به طور خلاصه، جرم‌ها را توابعی در نظر می‌گیریم که در یک همسایگی پیوسته و مشتق‌پذیر باشند.

می‌دانیم که نگاشت $f : M \to N$ بین فضاهای توپولوژیکی پیوسته[۳] گفته می‌شود، هرگاه

---

[۱] smooth

[۲] germ

[۳] continuous