



دانشگاه الزهراء (س)
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی

عنوان:

روش‌هایی از مرتبه‌ی دقت بالای زمانی برای حل برخی معادلات دیفرانسیل با
مشتقات جزئی سهموی

استاد راهنما:

آقای دکتر علی مردان شاهرضائی

استاد مشاور:

آقای دکتر یداله اردوخانی

نگارش:

زهرة عسگری

بهمن ۱۳۸۸

چکیده

در این پایان نامه، روش‌های عددی از مرتبه‌ی دقت بالا را برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سخت و غیرخطی وابسته به زمان به کار می‌بریم. برای این کار ابتدا مشتقات مکانی معادله‌ی دیفرانسیل را با روش‌های طیفی (طیفی فوریه برای مسائل متناوب و طیفی چبیشف برای مسائل با شرایط کرانه‌ای دیریکله و نیومن) گسسته‌سازی می‌نمائیم تا دستگامی از معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل شود. سپس روش‌هایی از مرتبه‌ی دقت چهارمانند روش‌های ضمنی – صریح، روش عامل انتگرال‌گیری، روش‌های تفاضلات زمانی نمائی و روش‌های تفاضلات زمانی رونگه – کوتا را برای حل دستگام حاصل، مورد استفاده قرار می‌دهیم. پس از آن با بیان الگوریتم‌هایی، روش‌های تفاضلات زمانی نمائی و تفاضلات زمانی رونگه – کوتا را بهبود می‌دهیم. نتایج عددی حاصل از به کارگیری روش‌های فوق روی برخی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سخت و غیرخطی وابسته به زمان، نشان می‌دهد که روش تفاضلات زمانی رونگه – کوتا بهبود یافته دارای نتایج عددی بهتری نسبت به دیگر روش‌ها می‌باشد.

کلمات کلیدی :

روش‌های طیفی فوریه، روش‌های طیفی چبیشف، ماتریس مشتق، روش‌های ضمنی – صریح، روش عامل انتگرال‌گیری، روش‌های تفاضلات زمانی نمائی، روش‌های تفاضلات زمانی رونگه – کوتا، انتگرال کانتور، معادله‌ی برگرز، معادله‌ی KdV ، معادله‌ی کورامتو سیواشینسکی، معادله‌ی آلن – کاهن، مرتبه‌ی دقت چهار، سخت.

فهرست

۹	پیش گفتار	
۱۲	تعاریف و پیش نیازها	۱
۱۲	معادلات دیفرانسیل	۱.۱
۱۳	سختی در معادلات دیفرانسیل	۱.۱.۱
۱۴	انواع معادلات با مشتقات جزئی	۲.۱.۱
۱۴	انواع شرایط کرانه‌ای	۳.۱.۱
۱۵	پایداری روش‌های مقدار اولیه	۲.۱
۱۶	چند جمله‌ای‌های چبیشف	۳.۱
۱۷	روش‌های رونگه - کوتای صریح	۴.۱
۱۹	روش‌های آدامز - بشفورث و آدامز - مولتن	۵.۱
۲۰	روش‌هایی بر پایه‌ی فرمول‌های مشتق‌گیری پسرو (BDF)	۶.۱
۲۱	تقریب پاده	۷.۱
۲۱	تبدیل فوریه سریع	۸.۱
۲۱	خطا	۹.۱
۲۳	فضای نرم‌دار	۱۰.۱

۲۳	فضای باناخ	۱۱.۱	
۲۴	فضای هیلبرت	۱۲.۱	
۲۴	توابع اندازه پذیر	۱۳.۱	
۲۶	روش‌های گسسته‌سازی مکانی		۲
۲۶	روش‌های تفاضلات متناهی	۱.۲	
۲۹	روش‌های طیفی	۲.۲	
۳۰	شبکه‌های بی‌کران (تبدیل فوریه نیمه‌گسسته)	۱.۲.۲	
۳۷	شبکه‌های متناوب	۲.۲.۲	
۴۴	درونیاب‌های چندجمله‌ای و شبکه‌های انباشته	۳.۲.۲	
۵۲	روش‌های مقدار اولیه		۳
۵۲	روش عامل انتگرال‌گیری	۱.۳	
۵۵	روش ضمنی - صریح	۲.۳	
۵۸	روش تفاضلات زمانی نمائی	۳.۳	
۶۳	روش تفاضلات زمانی نمائی رونگه - کوتا (ETDRK)	۴.۳	
۶۷	پایداری		۴
۷۹	الگوریتم‌های کارا برای محاسبه‌ی ضرایب روش تفاضلات زمانی نمائی		۵
۸۳	نمونه‌ی عددی	۱.۵	
۸۳	سری تیلور	۱.۱.۵	
۸۵	فرمول انتگرال کوشی	۲.۱.۵	
۸۷	الگوریتم مقیاس‌گذاری و ترییع نوع اول	۳.۱.۵	
۹۴	الگوریتم مقیاس‌گذاری و ترییع نوع دوم	۴.۱.۵	

۹۷	الگوریتم ماتریس مرکب	۵.۱.۵	
۱۰۰	نمونه‌ی ماتریس قطری	۲.۵	
۱۰۱	نمونه‌ی ماتریس غیرقطری	۳.۵	
۱۰۲	سری تیلور	۱.۳.۵	
۱۰۴	فرمول انتگرال کوشی	۲.۳.۵	
۱۰۶	الگوریتم مقیاس‌گذاری و تربیع نوع اول	۳.۳.۵	
۱۱۰	الگوریتم ماتریس مرکب	۴.۳.۵	
۱۱۱	الگوریتم تجزیه‌ی ماتریس	۵.۳.۵	
۱۱۲	ماتریس مشتق‌گیری طیفی چپیشف	۴.۵	
۱۱۴	ماتریس‌ها با مقادیر ویژه موهومی	۵.۵	
۱۱۵	نتیجه‌گیری	۶.۵	
۱۱۸	نتایج عددی	۶	
۱۲۴	معادلات بررسی شده	۱.۶	
۱۲۴	معادله‌ی برگرز	۱.۱.۶	
۱۲۶	معادله‌ی KdV	۲.۱.۶	
۱۲۸	معادله‌ی کورامتوسیاوشینسکی	۳.۱.۶	
۱۳۰	معادله‌ی آلن - کاهن	۴.۱.۶	
۱۳۴	پیوست		
۱۳۹	کتاب نامه		
۱۴۵	واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی		
۱۴۷	واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی		

فهرست شکل‌ها

۲۶	شبکه‌ی یکنواخت	۱.۲
۳۰	شبکه‌ی نامتناهی	۲.۲
۳۱	مثالی از پدیده‌ی هم‌اثرسازی. (روی شبکه‌ی $\frac{1}{4}\mathbb{Z}$ ، مقادیر توابع $\sin(\pi x)$ و $\sin(9\pi x)$ یکسان می‌باشند.)	۳.۲
۳۷	شبکه‌ی متناوب	۴.۲
۳۸	تابع شبکه‌ای دندان‌های $\cos(\pi x/h)$	۵.۲
۴۵	تابع هموار	۶.۲
۴۵	تابع ناهموار	۷.۲
۵۰	ترتیب الفبائی	۸.۲
۷۱	ناحیه‌ی پایداری روش‌های مرتبه دو AB2AM2 و AB2BD2 و ETD2 و ETD2RK1 در صفحه‌ی دکارتی.	۱.۴
۷۲	ناحیه‌ی پایداری روش‌های مرتبه دو AB2AM2 و AB2BD2 و ETD2 و ETD2RK1 بر حسب z در صفحه‌ی مختلط.	۲.۴
۷۳	ناحیه‌ی پایداری روش‌های ETD1، ETD2، ETD3 و ETD4 بر حسب z در صفحه‌ی مختلط.	۳.۴

۴.۴	ناحیه‌ی پایداری روش‌های ETD1، ETD2 و ETD3 بر حسب z در صفحه‌ی مختلط متناظر با $y = 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6$ و روش ETD4 متناظر با $y = 0, -1, -2, -3$	۷۴
۵.۴	ناحیه‌ی پایداری روش‌های ETD2RK1، ETD2RK2، ETD3RK و ETD4RK بر حسب z در صفحه‌ی مختلط متناظر با $y = 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6$	۷۵
۶.۴	ناحیه‌ی پایداری روش‌های ETD1 (خط)، ETD2RK1 (نقطه - خط)، ETD3RK (نقطه) و ETD4RK (دایره) برای مقادیر مختلف y ، بر حسب z در صفحه‌ی مختلط.	۷۶
۷.۴	ناحیه‌ی پایداری روش‌های ETD1 (خط)، ETD2RK2 (نقطه - خط)، ETD3RK (نقطه) و ETD4RK (دایره) برای مقادیر مختلف y ، بر حسب z در صفحه‌ی مختلط.	۷۷
۱.۵	نمودار توابع $f_0(z)$ و $f_k(z)$ برای $k = 1, 2, 3$ بر حسب z	۸۱
۲.۵	مقادیر تابع $f_2(z)$ در یک بازه‌ی بسیار کوچکی از اندازه‌ی z که به طور عددی با ۱۶ رقم اعشار محاسبه شده‌اند.	۸۲
۳.۵	خطاهای نسبی به دست آمده برای محاسبه‌ی $f_1(z)$ برای $z > 0$ (نمودار بالا) و $z < 0$ (نمودار پایین) با الگوریتم‌های صریح، 3^0 جمله از بسط سری تیلور، فرمول انتگرال کوشی، مقیاس‌گذاری و تربیع نوع اول بر اساس روابط (۲۰.۵) - (۲۲.۵)، مقیاس‌گذاری و تربیع نوع دوم بر اساس روابط (۴۸.۵) - (۵۰.۵) و الگوریتم ماتریس مرکب.	۸۴
۴.۵	خطاهای نسبی به دست آمده برای محاسبه‌ی $f_2(z)$ برای $z > 0$ (نمودار بالا) و $z < 0$ (نمودار پایین) با الگوریتم‌های صریح، 3^0 جمله از بسط سری تیلور، فرمول انتگرال کوشی، مقیاس‌گذاری و تربیع نوع اول بر اساس روابط (۲۰.۵) - (۲۲.۵)، مقیاس‌گذاری و تربیع نوع دوم بر اساس روابط (۴۸.۵) - (۵۰.۵) و الگوریتم ماتریس مرکب.	۸۵

۵.۵ خطاهای نسبی به دست آمده برای محاسبه‌ی $f_3(z)$ برای $z > 0$ (نمودار بالا) و $z < 0$ (نمودار پایین) با الگوریتم‌های صریح، 3^0 جمله از بسط سری تیلور، فرمول انتگرال کوشی، مقیاس‌گذاری و تربیع نوع اول بر اساس روابط (۲۰.۵)–(۲۲.۵)، مقیاس‌گذاری و تربیع نوع دوم بر اساس روابط (۴۸.۵)–(۵۰.۵) و الگوریتم ماتریس مرکب. ۸۶

۶.۵ خطاهای نسبی روش مقیاس‌گذاری و تربیع نوع اول برای محاسبه‌ی $f_3(z)$ برای مقادیر مثبت z بر پایه‌ی روابط (۲۰.۵)–(۲۲.۵) (ستاره)، (۲۳.۵)–(۲۵.۵) (دایره)، (۲۷.۵) و (۲۱.۵)–(۲۲.۵) (مربع)، (۲۷.۵) و (۲۴.۵)–(۲۵.۵) (لوزی). ۹۰

۷.۵ خطاهای نسبی روش مقیاس‌گذاری و تربیع نوع اول برای محاسبه‌ی $f_3(z)$ برای مقادیر منفی z بر پایه‌ی روابط (۲۰.۵)–(۲۲.۵) (ستاره)، (۲۳.۵)–(۲۵.۵) (دایره)، (۲۷.۵) و (۲۱.۵)–(۲۲.۵) (مربع)، (۲۷.۵) و (۲۴.۵)–(۲۵.۵) (لوزی). ۹۰

۸.۵ خطای نسبی روش مقیاس‌گذاری و تربیع نوع اول برای محاسبه‌ی $f_3(z)$ بر پایه‌ی روابط (۲۰.۵)–(۲۲.۵) برای δ های مختلف ۹۳

۹.۵ خطاهای نسبی به دست آمده برای محاسبه‌ی $f_1(\Delta t M_2)$ برای $\Delta t > 0$ (نمودار بالا) و $\Delta t < 0$ (نمودار پایین) با الگوریتم‌های صریح، 3^0 جمله از بسط سری تیلور، فرمول انتگرال کوشی، مقیاس‌گذاری و تربیع نوع اول بر اساس روابط (۲۰.۵)–(۲۲.۵)، ماتریس مرکب و الگوریتم تجزیه‌ی ماتریس. ۱۰۳

۱۰.۵ خطاهای نسبی به دست آمده برای محاسبه‌ی $f_2(\Delta t M_2)$ برای $\Delta t > 0$ (نمودار بالا) و $\Delta t < 0$ (نمودار پایین) با الگوریتم‌های صریح، 3^0 جمله از بسط سری تیلور، فرمول انتگرال کوشی، مقیاس‌گذاری و تربیع نوع اول بر اساس روابط (۲۰.۵)–(۲۲.۵)، ماتریس مرکب و الگوریتم تجزیه‌ی ماتریس. ۱۰۴

۱۱.۵ خطاهای نسبی به دست آمده برای محاسبه‌ی $f_3(\Delta t M_2)$ برای $\Delta t > 0$ (نمودار بالا) و $\Delta t < 0$ (نمودار پایین) با الگوریتم‌های صریح، 3^0 جمله از بسط سری تیلور، فرمول انتگرال کوشی، مقیاس‌گذاری و تربیع نوع اول بر اساس روابط (۲۰.۵)–(۲۲.۵)، ماتریس مرکب و الگوریتم تجزیه‌ی ماتریس. ۱۰۷

۱۲.۵ خطاهای نسبی روش مقیاس‌گذاری و تربیع نوع اول برای محاسبه‌ی $f_3(\Delta t)$ بر پایه‌ی روابط (۲۰.۵)–(۲۲.۵) (خط چین)، (۲۳.۵)–(۲۵.۵) (خط)، و (۲۱.۵)–(۲۲.۵) و (۲۷.۵) (ستاره)، و (۲۴.۵)، (۲۵.۵) و (۲۷.۵) (مربع). ۱۰۸

۱۳.۵ خطای نسبی روش مقیاس‌گذاری و تربیع نوع اول برای محاسبه‌ی $f_2(\Delta t M_2)$ برپایه‌ی روابط (۲۰.۵)–(۲۲.۵) برای Δt های مختلف. ۱۰۹

۱۴.۵ خطاهای نسبی به دست آمده برای محاسبه‌ی $f_2(\Delta t M_C)$ برای $\Delta t > 0$ (نمودار بالا) و $\Delta t < 0$ (نمودار پایین) با الگوریتم‌های صریح، 3^0 جمله از بسط سری تیلور، فرمول انتگرال کوشی، مقیاس‌گذاری و تربیع نوع اول براساس روابط (۲۰.۵)–(۲۲.۵)، ماتریس مرکب و الگوریتم تجزیه‌ی ماتریس. ۱۱۳

۱۵.۵ خطاهای نسبی به دست آمده برای محاسبه‌ی $f_2(\Delta t M_1)$ برای $\Delta t > 0$ (نمودار بالا) و $\Delta t < 0$ (نمودار پایین) با الگوریتم‌های صریح، 3^0 جمله از بسط سری تیلور، فرمول انتگرال کوشی، مقیاس‌گذاری و تربیع نوع اول براساس روابط (۲۰.۵)–(۲۲.۵)، ماتریس مرکب و الگوریتم تجزیه‌ی ماتریس. ۱۱۵

۱.۶ خطاهای نسبی به دست آمده و زمان محاسبات برای حل معادله‌ی برگرز توسط چهار روش در $t = 1$ ۱۲۵

۲.۶ جواب معادله‌ی برگرز توسط روش ETD4RK که در آن $t \in [0, 1]$ ، $x \in [-\pi, \pi]$ و $\Delta t = \frac{1}{4}$ و $N = 512$ می‌باشد. ۱۲۶

۳.۶ خطاهای نسبی به دست آمده و زمان محاسبات برای حل معادله‌ی KdV توسط دو روش IFRK4 و ETD4RK در $t = 0.001$ ۱۲۷

۴.۶ جواب معادله‌ی KdV توسط روش ETD4RK که در آن $t \in [0, 0.006]$ ، $x \in [-\pi, \pi]$ و $\Delta t = \frac{0.4}{N}$ و $N = 256$ می‌باشد. ۱۲۸

۵.۶ خطاهای نسبی به دست آمده و زمان محاسبات برای حل معادله‌ی KS توسط چهار روش در $t = 3^0$ ۱۲۹

۶.۶ جواب معادله‌ی کورامتو سیواشینسکی توسط روش ETDRK4 که در آن $t \in [0, 15^0]$ ، $x \in [0, 32\pi]$ و $\Delta t = \frac{1}{4}$ و $N = 128$ می‌باشد. ۱۳۰

۷.۶ خطاهای نسبی به دست آمده و زمان محاسبات برای حل معادله‌ی AC توسط چهار روش در $t = 3$ ۱۳۱

۸.۶ جواب معادله‌ی آلن – کاهن توسط روش ETD4RK که در آن $t \in [0, 70]$
۱۳۲ می‌باشد. $N = 20$ و $\Delta t = \frac{1}{4}$ ، $x \in [-1, 1]$

پیش‌گفتار

معادلات دیفرانسیل، به خصوص معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDEs)، نقش مهمی را در مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی ایفا می‌کنند. به دست آوردن جواب تحلیلی برای یک PDE، اغلب، کار دشواری می‌باشد. بخشی از این مشکل، از PDE موجود و بخشی دیگر از پیچیدگی مسأله‌ی فیزیکی (مانند کرانه‌های نامنظم) ناشی می‌شود. بنابراین تعداد اندکی از PDEs دارای جواب‌های تحلیلی می‌باشند و از این روش‌های عددی برای حل PDEs بسیار مورد توجه واقع شده‌اند. حل عددی PDEs وابسته به زمان در آنالیز عددی دارای یک تاریخچه‌ی طولانی شامل دو موضوع وابسته به هم، که هر دو به خوبی توسط محققین توسعه یافته‌اند، می‌باشد. اولین موضوع مربوط به حل معادلات دیفرانسیل معمولی است که توسعه یافته‌ترین شاخه در آنالیز عددی است. موضوع دیگر تقریب مشتقات مکانی است. برخی روش‌های عددی برای حل PDEs وابسته به زمان ترکیبی از این دو موضوع می‌باشد. تاریخچه‌ی حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی (ODEs) به کار اوپلر^۱ در سال ۱۷۶۸ برمی‌گردد. پس از آن، توسعه‌ی این روش‌ها توسط آدامز^۲ و بشفورث^۳ در سال ۱۸۸۵ صورت گرفته است. روش‌های رونگه – کوتا توسط رونگه^۴ در سال ۱۸۹۵ با ارائه‌ی مقاله‌ای در مرجع [۵۲] که بعداً توسط کوتا^۵ در سال ۱۹۰۱ در مرجع [۳۶] بهبود یافت، به وجود آمدند. دالکوئیست^۶ در سال ۱۹۵۰ [۱۷] به بررسی آنالیز خطا، همگرایی و پایداری این روش‌ها پرداخت. یکی از مهم‌ترین کشفیات در این زمینه، مفهوم سختی توسط کورتیس^۷ و هیشفلدر^۸ [۱۶] در سال ۱۹۵۲ می‌باشد. با این وجود، قدمت حل عددی PDEs به اندازه‌ی ODEs نمی‌باشد. یکی از مهم‌ترین دستاوردها در حل PDEs مربوط به مقاله‌ی کورانت^۹، فردریش^{۱۰} و لوی^{۱۱} در سال ۱۹۲۸ [۱۳] می‌باشد. این مقاله به طور نظری به آنالیز روش تفاضلات متناهی برای تقریب مشتقات می‌پردازد. گرشگورین^{۱۲} در سال ۱۹۳۰ آنالیز خطای روش تفاضلات متناهی را برای مسائل بیضوی در مرجع [۲۴] بیان نمود. با پیشرفت تکنولوژی کامپیوتر بعد از جنگ جهانی دوم،

Euler	۱
Adams	۲
Bashforth	۳
Runge	۴
Kutta	۵
Dahlquist	۶
Courtiss	۷
Hirschfelder	۸
Courant	۹
Friedrichs	۱۰
Lewy	۱۱
Gerschgorin	۱۲

مطالعه‌ی PDEs وابسته به زمان مورد توجه قرار گرفت. از جمله مقالات مهم در این زمینه، مقاله‌ی کرانک^{۱۳} و نیکلسون^{۱۴} در سال ۱۹۴۷ [۱۵]، پیسمن^{۱۵} و راجفورد^{۱۶} در سال ۱۹۵۵ [۵۰] و لکس^{۱۷} و وندروف^{۱۸} در سال ۱۹۶۴ [۳۹] می‌باشد.

در اواسط قرن بیستم، تکنیک جدیدی برای تقریب مشتقات مکانی به نام روش المان‌های محدود توسط کورانت در سال ۱۹۴۳ که در مرجع [۱۴] بیان شده است، به وجود آمد. این تکنیک توسط مهندسين و به خصوص توسط تورینگ^{۱۹} و همکارانش در سال ۱۹۵۲ به طور محاسباتی توسعه داده شد [۶۵].

در سال ۱۹۷۰، تکنیک دیگری برای تقریب مشتقات یک PDE به نام روش طیفی معرفی شد. این روش با دو تکنیک قبلی بیان شده متفاوت می‌باشد زیرا این تکنیک یک تقریب سراسری برای جواب به دست می‌دهد در حالی که روش‌های تفاضلات متناهی و المان‌های محدود، تقریب موضعی برای جواب دارند. در این پایان‌نامه از روش طیفی برای گسسته‌سازی مکانی برای معادلاتی که مورد بررسی قرار می‌دهیم، استفاده می‌کنیم. در حقیقت برای مسائلی که دارای شرایط کرانه‌ای متناوب می‌باشند از روش طیفی فوریه و برای مسائلی که دارای شرایط کرانه‌ای دیریکله^{۲۰} یا نیومن^{۲۱} می‌باشند، روش طیفی چیبیشف^{۲۲} را به کار می‌بریم. این روش‌ها به طور کامل در فصل‌های بعد توضیح داده خواهند شد. بیشتر PDEs مورد بحث در این پایان‌نامه شامل ترکیبی از قسمت غیرخطی از مرتبه پایین و قسمت خطی از مرتبه بالا می‌باشد. از نمونه این معادلات می‌توان به معادله‌ی آلن-کاهن^{۲۳} (AC)، برگرز^{۲۴}، 25KdV ، کوراموتو سیواشینسکی^{۲۶} و نظایر آن اشاره نمود. برای به دست آوردن جواب‌های از مرتبه دقت بالا، نیاز به استفاده از تقریب‌های بالا در هر دو مؤلفه زمان و مکان می‌باشد. با توجه به مشکلات ناشی از ترکیب سختی و غیرخطی بودن این مسائل، بیشتر تقریب‌های به کار رفته برای حل آنها، حداکثر از مرتبه دقت دو زمانی می‌باشد. هدف اصلی این پایان‌نامه، به کارگیری روش‌های از مرتبه دقت چهار زمانی برای حل این‌گونه مسائل می‌باشد. علاوه بر این، با انجام اصلاحی روی برخی روش‌ها، ناپایداری عددی آنها را تقلیل می‌دهیم. بعد از به کارگیری روش‌های طیفی برای گسسته‌سازی مکانی PDEs وابسته به زمان دستگاهی از

Crank	۱۳
Nicolson	۱۴
Peaceman	۱۵
Rachford	۱۶
Lax	۱۷
Wendroff	۱۸
Turner	۱۹
Dirichlet	۲۰
Neumann	۲۱
Chebyshev	۲۲
Allen-Cahn	۲۳
Burgers	۲۴
Korteweg-De Vries	۲۵
Kuramoto-sivashinsky	۲۶

ODEs حاصل می‌شود. برای حل دستگاه حاصل نیز روش‌های مرتبه‌ی چهارم را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

فرض کنیم شکل کلی PDE به صورت زیر باشد:

$$u_t = \bar{L}u + \bar{N}(u, t), \quad (۱.۵)$$

که در آن \bar{L} و \bar{N} به ترتیب نشان‌دهنده‌ی قسمت خطی و غیرخطی PDE می‌باشد. با گسسته‌سازی PDE فوق توسط روش‌های طیفی، دستگاه ODE زیر را به دست می‌آوریم:

$$u_t = Lu + N(u, t). \quad (۲.۵)$$

که در آن L قسمت خطی و N قسمت غیرخطی معادله است. برای حل دستگاه فوق از روش‌های ضمنی – صریح (IMEX)، روش عامل انتگرال‌گیری (IF)، روش‌های تفاضلات زمانی نمایی (ETD) یا روش‌های تفاضلات زمانی رونگه – کوتا (ETDRK) استفاده می‌کنیم.

ساختار این پایان‌نامه به صورت زیر است: در فصل اول، مقدمات و تعاریف مورد نیاز بیان می‌شود. در فصل دوم روش‌های گسسته‌سازی مکانی طیفی از قبیل روش‌های فوریه‌ی و چبیشف طیفی و ماتریس‌های مشتق متناظر بیان خواهد شد. فصل سوم از این پایان‌نامه به معرفی روش‌های مرتبه‌ی دو، سه و چهار برای حل دستگاه‌های ODE سخت اختصاص دارد. در این فصل نحوه‌ی به دست آوردن هر کدام از روش‌ها را به تفصیل بیان می‌کنیم. در فصل چهارم، مفهوم پایداری را بیان نموده و ناحیه‌ی پایداری هر کدام از روش‌ها را در مختصات دکارتی و قطبی ترسیم می‌کنیم. در فصل پنجم علت ناپایداری روش‌های ETD و ETDRK را بیان نموده و برخی از الگوریتم‌ها مانند سری تیلور، فرمول انتگرال کوشی، الگوریتم‌های مقیاس‌گذاری و تربیع نوع اول و دوم، الگوریتم تجزیه‌ی ماتریس و الگوریتم ماتریس مرکب را برای محاسبه‌ی دقیق ضرایب روش‌های ETD و ETDRK معرفی می‌نمائیم. در فصل ششم نتایج عددی حاصل از به‌کارگیری روش‌های IMEX، IF، ETD و ETDRK برای حل برخی PDEs سخت و غیرخطی را بیان می‌کنیم. با مقایسه‌ی نتایج عددی توسط خطای نسبی و زمان محاسبه نشان می‌دهیم که روش ETDRK برای حل اکثر مسائل نسبت به روش‌های دیگر مفیدتر می‌باشد.

فصل ۱

تعاریف و پیش‌نیازها

در این فصل برخی تعاریف و پیش‌نیازها که در فصل‌های بعد مورد نیاز می‌باشد را بیان می‌کنیم:

۱.۱ معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۱ یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) مرتبه‌ی n ام معادله‌ای است بر حسب متغیر مستقل x ، تابع حقیقی u و n مشتق اول آن یعنی u' ، u'' ، ... و $u^{(n)}$ به صورت زیر:

$$F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0; \quad a \leq x \leq b.$$

یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام با n شرط اولیه زیر را یک مسأله‌ی مقدار اولیه می‌نامند.

$$u(a) = a_1, \quad u'(a) = a_2, \dots, \quad u^{(n-1)}(a) = a_n.$$

تعریف ۲.۱ یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) و یا دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی را خودمدار گویند هرگاه به طور صریح شامل متغیر مستقل، که معمولاً با x نمایش می‌دهند، نباشد. یک معادله دیفرانسیل خودمدار مرتبه دوم عبارت است از $F(u, u', u'') = 0$ که در آن $u' = \frac{du}{dx} = v$ و $u'' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du}v$ می‌باشد.

تعریف ۳.۱ نقطه‌ی $u_0 \in \mathbb{R}^n$ را نقطه‌ی تعادل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی:

$$u' = f(u), \tag{1.1}$$

نامند هرگاه داشته باشیم $f(u_0) = 0$.

برای خطی‌سازی دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی (۱.۱)، ابتدا لازم است نقطه‌ی تعادل دستگاه را با توجه به تعریف فوق به دست آوریم. پس از آن توسط دستگاه خطی $u' = Df(u_0)u$ که در آن D ماتریس ژاکوبین^۱ می‌باشد، دستگاه غیرخطی (۱.۱) را تقریب می‌زنیم.

تعریف ۴.۱ اگر u تابعی از n متغیر مستقل x_1, x_2, \dots, x_n باشد آنگاه یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی معادله‌ای است بر حسب متغیرهای مستقل x_1, x_2, \dots, x_n و تابع حقیقی u و مشتقات جزئی u نسبت به متغیرهای مستقل.

۱.۱.۱ سختی در معادلات دیفرانسیل

معادلات ODE سخت، مفهومی آشنا در آنالیز عددی می‌باشد. این مفهوم برای اولین بار توسط دو شیمیدان به نام‌های کورتیس و هیشفلدر در مرجع [۱۶] معرفی شد. از سال ۱۹۷۰ به بعد مقالات زیادی در این زمینه به چاپ رسیده است. علی‌رغم توجه زیاد محققان به این موضوع، تعریف واحدی که مفهوم سختی در ODE را نشان دهد، وجود ندارد. شاید یکی از مشکلات در این زمینه وسیع بودن مجموعه‌ی ODE‌هایی است که می‌توانند به عنوان ODE سخت معرفی شوند. بنابراین تعاریف متفاوتی از سختی وجود دارد. در مسائل سخت، پایداری نسبت به دقت محدودیت‌های بیشتری را روی گام زمانی اعمال می‌نماید و از اینرو ساده‌ترین تعریف برای مسائل سخت این است که توسط روش‌های صریح به سادگی نمی‌توان این مسائل را حل کرد و برای حفظ پایداری نیاز به گام‌های بسیار کوچک می‌باشد. مشخصه‌های سختی را برای برخی سیستم‌ها به صورت زیر بیان می‌کنیم:

(۱) مسائلی به شکل $u' = ku + f(t)$ که در آن $k \in \mathbb{C}$ و $|k|$ بزرگ است و نیز $\text{Re}(k) < 0$ (قسمت حقیقی k)،

(۲) دستگاهی از معادلات به شکل $U' = KU + f(t)$ که K ماتریس مربعی می‌باشد که حداقل یک مقدار ویژه‌ی $l \in \mathbb{C}$ با $|l|$ بزرگ دارد که $\text{Re}(l) < 0$ ،

(۳) دستگاهی از معادلات به صورت $U' = f(U, t)$ که ماتریس ژاکوبین f حداقل یک مقدار ویژه‌ی $l \in \mathbb{C}$ با $|l|$ بزرگ دارد که $\text{Re}(l) < 0$.

مفهوم سختی در PDEs نیز مشابه ODEs می‌باشد. در حقیقت با گسسته‌سازی مکانی یک PDE سخت، یک دستگاه ODE سخت به دست می‌آید. دکر^۲ و ورور^۳ در مرجع [۱۸] نشان دادند که

Jacobian ۱
Dekker ۲
Verwer ۳

سختی علاوه بر این که برای مسائل نیمه‌گسسته شده، ذاتی است می‌تواند متأثر از گسسته‌سازی نیز باشد. یعنی هر مسأله‌ی نیمه‌گسسته‌سازی شده، هنگامی که شبکه‌ی مکانی ریز می‌شود، سخت‌تر می‌شود. بخشی از منشأ سختی در مسائل نیمه‌گسسته‌سازی شده مربوط به توزیع مقادیر ویژه ماتریس مشتق می‌شود. در اصل برای اینکه روشی پایدار باشد باید مقادیر ویژه‌ی عملگر خطی (پس از گسسته‌سازی کردن) در ناحیه‌ی پایداری روش حل ODE حاصل، قرار گیرد. بنابراین مسائلی که دارای توزیع مقادیر ویژه‌ی گسترده هستند، سخت می‌باشند. مقادیر ویژه‌ی ماتریس مشتق به طول گام شبکه‌ی مکانی گسسته‌سازی شده بستگی دارد و سختی با ریز کردن شبکه‌ی مکانی افزایش می‌یابد.

۲.۱.۱ انواع معادلات با مشتقات جزئی

معادله‌ی مرتبه دوم:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0,$$

که در آن a, b, c, d, e, f و g ممکن است توابعی از متغیرهای مستقل x و y یا متغیر وابسته‌ی $u(x, y)$ باشند را در نظر می‌گیریم. این معادله یک معادله‌ی بیضوی است اگر $b^2 - 4ac < 0$ ، یک معادله‌ی سهموی است اگر $b^2 - 4ac = 0$ و یک معادله‌ی هذلولوی است اگر $b^2 - 4ac > 0$ باشد. اگر $g = 0$ ، معادله را همگن گویند، در غیر این صورت معادله ناهمگن می‌باشد. اگر تمامی ضرایب a, b, c, d, e, f و g توابعی از x و y باشند، معادله خطی می‌باشد و در غیر این صورت معادله غیرخطی است [۵۹].

۳.۱.۱ انواع شرایط کرانه‌ای

یک مسأله در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا با شرایط کرانه‌ای [۵۹] (مثل مسأله‌ی لاپلاس، پواسن و نظایر آن)، و یا با شرایط کرانه‌ای و اولیه (مانند مسأله‌ی گرما، موج و نظایر آن) همراه می‌باشد. انواع شرایط کرانه‌ای نیز عبارت‌اند از:

- (۱) دیریکله: در این نوع شرط کرانه‌ای، مقدار تابع روی مرز ناحیه‌ی حل مشخص می‌باشد.
- (۲) نیومن: در این نوع شرط کرانه‌ای، مقدار مشتق تابع روی مرز ناحیه‌ی حل مشخص می‌باشد.
- (۳) روبین^۴: در این نوع شرط کرانه‌ای، مقدار تابع در بخشی از مرز ناحیه‌ی حل و مقدار مشتق تابع در بخش دیگر مرز ناحیه‌ی حل مشخص می‌باشد.

۲.۱ پایداری روش‌های مقدار اولیه

در این بخش، مفهوم پایداری را برای یک روش k گامی بیان می‌کنیم [۳۷]. فرمول کلی روش k گامی برای حل معادلات دیفرانسیل به شکل $u' = f(u, t)$ به صورت زیر است:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i u_{i+j} = \Delta t \sum_{i=0}^k \beta_i f_{i+j}; \quad j = 0, 1, \dots, N-k, \quad (2.1)$$

که در آن طول گام زمانی، $t_i = i\Delta t$ ، $u_i = u(i\Delta t)$ و $f_i = f(u_i, t_i)$ می‌باشد.

تعریف ۵.۱ یک چندجمله‌ای با درجه‌ی k را یک چندجمله‌ای شُر^۵ گویند هرگاه تمامی صفرهای این چندجمله‌ای داخل یک دایره با شعاع واحد واقع شوند.

تعریف ۶.۱ یک چندجمله‌ای با درجه‌ی k را یک چندجمله‌ای نیومن^۶ گویند هرگاه تمامی صفرهای این چندجمله‌ای داخل یا روی دایره به شعاع واحد واقع شوند و صفرهایی که روی دایره واقع می‌شوند ساده باشند.

چندجمله‌ای‌های زیر را با توجه به رابطه‌ی (۲.۱) در نظر می‌گیریم:

$$\rho(z) = \sum_{i=0}^k \alpha_i z^i, \quad \sigma(z) = \sum_{i=0}^k \beta_i z^i.$$

تعریف می‌کنیم:

$$\pi(z, q) = \rho(z) - q\sigma(z); \quad q \in \mathbb{C}.$$

تعریف ۷.۱ ناحیه‌ی پایداری مطلق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D = \{q \in \mathbb{C} \mid \pi(z, q) \text{ شُر باشد}\}.$$

تعریف ۸.۱ یک روش مقدار اولیه را 0 -پایدار گویند هرگاه $\rho(z)$ یک چندجمله‌ای نیومن باشد.

منظور از روش مقدار اولیه روشی است که برای حل ODEs به کار می‌رود.

تعریف ۹.۱ یک روش مقدار اولیه را A -پایدار گویند هرگاه ناحیه‌ی D ، شامل سمت چپ صفحه‌ی مختلط باشد، یعنی $\mathbb{C}^- \subseteq D$.

Schur^۵
Neumann^۶

۳.۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول و دوم مرتبه‌ی n به ترتیب توسط T_n و U_n نمایش داده می‌شوند [۴۴]. این چندجمله‌ای‌ها به ترتیب هنگام مطالعه‌ی معادلات دیفرانسیل:

$$(1 - x^2)u'' - xu' + n^2u = 0,$$

و

$$(1 - x^2)u'' - 2xu' + n(n+2)u = 0,$$

به عنوان جواب این معادلات شناخته شده‌اند.

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول توسط رابطه‌ی بازگشتی زیر تعریف می‌شوند:

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x); \quad n \in \mathbb{N}.$$

تعریف مثلثاتی چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول عبارت است از:

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc} \cos(x))$$

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم توسط رابطه‌ی بازگشتی زیر تعریف می‌شوند:

$$U_0(x) = 1,$$

$$U_1(x) = 2x,$$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x); \quad n \in \mathbb{N}.$$

تعریف مثلثاتی چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم به صورت زیر می‌باشد:

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \operatorname{Arc} \cos(x))}{\sin(\operatorname{Arc} \cos(x))}.$$

هر دو نوع چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبه‌ی n دارای n ریشه‌ی متفاوت‌اند که متعلق به بازه‌ی

$[-1, 1]$ می‌باشند. با توجه به قاعده‌ی زیر:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\right) = 0,$$

ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف نوع اول و دوم به ترتیب عبارت‌اند از:

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right); \quad k = 1, \dots, n,$$

$$x_k = \cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right); \quad k = 1, \dots, n. \quad \text{و}$$

۴.۱ روش‌های رونگه – کوتای صریح

در آنالیز عددی، روش‌های رونگه – کوتا [۲۵] یک خانواده‌ی مهم در بین روش‌های ضمنی و صریح برای تقریب جواب یک معادله دیفرانسیل معمولی می‌باشند. شکل کلی روش‌های رونگه – کوتا مرتبه s برای تقریب جواب عددی معادله دیفرانسیل معمولی،

$$\frac{du}{dt} = f(t, u),$$

به صورت زیر می‌باشد:

$$k_i = f\left(t_n + c_i h, u_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right),$$

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i.$$

روش‌های فوق را می‌توان به صورت جدول بوچر زیر نمایش داد:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_s \end{array}$$

روش‌های رونگه- کوتای صریح مرتبه s در حالت کلی به صورت زیر می‌باشند:

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i,$$

که در آن

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, u_n), \\ k_2 &= f(t_n + c_2 h, u_n + a_{21} h k_1), \\ k_3 &= f(t_n + c_3 h, u_n + a_{31} h k_1 + a_{32} h k_2), \\ &\vdots \\ k_s &= f(t_n + c_s h, u_n + a_{s1} h k_1 + a_{s2} h k_2 + \dots + a_{s,s-1} h k_{s-1}). \end{aligned}$$

روش‌های صریح فوق را می‌توان به صورت جدول بوچر زیر نمایش داد:

$$\begin{array}{c|cccc}
 \circ & & & & \\
 c_2 & a_{21} & & & \\
 c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
 \vdots & \vdots & & \ddots & \\
 c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s-1} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s
 \end{array}$$

حال به استخراج روش رونگه - کوتای مرتبه‌ی دوّم می‌پردازیم. برای این عمل، ثابت‌های c_2 ، a_{21} ، b_1 و b_2 را طوری به دست می‌آوریم که رابطه‌ی

$$k_1 = f(t_n, u_n),$$

$$k_2 = f(t_n + c_2 h, u_n + h a_{21} k_1),$$

$$u_{n+1} = u_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2),$$

با قرار دادن بسط تیلور مرتبه اول

$$k_2 = f(t_n, u_n) + f_t(t_n, u_n) c_2 h + f_u(t_n, u_n) f(t_n, u_n) h a_{21} + O(h^2),$$

به ازای هر $n = 0, 1, \dots, N-1$ با بسط تیلور مرتبه دوّم

$$u_{n+1} \approx u_n + h f(t_n, u_n) + \frac{h^2}{2} (f_{tt}(t_n, u_n) + f_{uu}(t_n, u_n) f(t_n, u_n)),$$

برابر باشد. بدین منظور دستگاه سه معادله با چهار مجهول زیر به دست می‌آید که دارای بی‌شمار جواب است:

$$b_1 + b_2 = 1, \quad b_2 c_2 = \frac{1}{3}, \quad b_2 a_{21} = \frac{1}{3}.$$

اگر $c_2 = a_{21} = \frac{1}{3}$ و $b_1 = 0$ و $b_2 = 1$ آنگاه روش رونگه - کوتای مرتبه‌ی دوّم مورد نظر حاصل می‌شود. با توجه به نمایش فوق، روش رونگه - کوتای صریح مرتبه‌ی دوّم به صورت:

$$\begin{array}{c|cc}
 \circ & \circ & \circ \\
 \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \circ \\
 \hline
 & \circ & 1
 \end{array}$$

و روش رونگه - کوتای صریح مرتبه‌ی سوم به شکل:

$$\begin{array}{c|ccc}
 \circ & \circ & \circ & \circ \\
 \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \circ & \circ \\
 1 & -1 & 2 & \circ \\
 \hline
 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}
 \end{array}$$

و روش رونگه - کوتای صریح مرتبه‌ی چهارم به صورت: