دانشگاه الزهراء(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته‌ی ریاضی کاربردی

عنوان:

روش‌هائی از مرتبه‌ی دقت بالای زمانی برای حل برخی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی

استاد راهنما:

آقای دکتر علی‌مردان شاهرضائی

استاد مشاور:

آقای دکتر یداله اردوخانی

نگارش:

زهره عسگری

بهمن ۱۳۸۸

چکیده

در این پایان‌نامه، روش‌های عددی از مرتبه‌ی دقت بالا را برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سخت و غیرخطی وابسته به زمان به کار می‌بریم. برای این کار ابتدا مشتقات مکانی معادله‌ی دیفرانسیل را با روش‌های طیفی (طیفی فوریه برای مسائل متناوب و طیفی چبیشف برای مسائل با شرایط کرانه‌ای دیریکله و نیومن) گسسته‌سازی می‌نمائیم تا دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل شود. سپس روش‌هائی از مرتبه‌ی دقت چهار مانند روش‌های ضمنی — صریح، روش عامل انتگرال‌گیری، روش‌های تفاضلات زمانی نمائی و روش‌های تفاضلات زمانی رونگه— کوتا را برای حل دستگاه حاصل، مورد استفاده قرار می‌دهیم. پس از آن با بیان الگوریتم‌هائی، روش‌های تفاضلات زمانی نمائی و تفاضلات زمانی رونگه— کوتا را بهبود می‌دهیم. نتایج عددی حاصل از به کارگیری روش‌های فوق روی برخی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سخت و غیرخطی وابسته به زمان، نشان می‌دهد که روش تفاضلات زمانی رونگه— کوتای بهبود یافته دارای نتایج عددی بهتری نسبت به دیگر روش‌ها می‌باشد.

کلمات کلیدی :
روش‌های طیفی فوریه، روش‌های طیفی چبیشف، ماتریس مشتق، روش‌های ضمنی — صریح، روش عامل انتگرال‌گیری، روش‌های تفاضلات زمانی نمائی، روش‌های تفاضلات زمانی رونگه— کوتا، انتگرال کانتور، معادله‌ی برگرز، معادله‌ی KdV، معادله‌ی کورامُتو سیواشینسکی، معادله‌ی آلن— کاهن، مرتبه‌ی دقت چهار، سخت.

فهرست

فهرست شکل‌ها

پیش گفتار

معادلات دیفرانسیل، به خصوص معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDEs)، نقش مهمّی را در مدل سازی پدیده‌های فیزیکی ایفا می‌کنند. به دست آوردن جواب تحلیلی برای یک PDE، اغلب، کار دشواری می‌باشد. بخشی از این مشکل، از PDE موجود و بخشی دیگر از پیچیدگی مسأله‌ی فیریکی (مانند کرانه‌های نامنظم) ناشی می‌شود. بنابراین تعداد اندکی از PDEs دارای جواب‌های تحلیلی می‌باشند و از اینرو روش‌های عددی برای حل PDEs بسیار مورد توجه واقع شده‌اند. حل عددی PDEs وابسته به زمان در آنالیز عددی دارای یک تاریخچه‌ی طولانی شامل دو موضوع وابسته به هم، که هر دو به خوبی توسط محققین توسعه یافته‌اند، می‌باشد. اولّین موضوع مربوط به حل معادلات دیفرانسیل معمولی است که توسعه یافته‌ترین شاخه در آنالیز عددی است. موضوع دیگر تقریب مشتقات مکانی است. برخی روش‌های عددی برای حل PDEs وابسته به زمان ترکیبی از این دو موضوع می‌باشد. تاریخچه‌ی حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی (ODEs) به کار اویلر[۱] در سال ۱۷۶۸ بر می‌گردد. پس از آن، توسعه‌ی این روش‌ها توسط آدامز[۲] و بشفورث[۳] در سال ۱۸۸۵ صورت گرفته است. روش‌های رونگه– کوتا توسط رونگه[۴] در سال ۱۸۹۵ با ارائه‌ی مقاله‌ای در مرجع [۵۲] که بعداً توسط کوتا[۵] در سال ۱۹۰۱ در مرجع [۳۶] بهبود یافت، به وجود آمدند. دالکوئیست[۶] در سال ۱۹۵۰ [۱۷] به بررسی آنالیز خطا، همگرائی و پایداری این روش‌ها پرداخت. یکی از مهمّترین کشفیات در این زمینه، مفهوم سختی توسط کورتیس[۷] و هیشفلدر[۸] [۱۶] در سال ۱۹۵۲ می‌باشد. با این وجود، قدمت حل عددی PDEs به اندازه‌ی ODEs نمی‌باشد. یکی از مهمّترین دستاوردها در حل PDEs مربوط به مقاله‌ی کورانت[۹]، فردریش[۱۰] و لوی[۱۱] در سال ۱۹۲۸ [۱۳] می‌باشد. این مقاله به طور نظری به آنالیز روش تفاضلات متناهی برای تقریب مشتقات می‌پردازد. گرشگورین[۱۲] در سال ۱۹۳۰ آنالیز خطای روش تفاضلات متناهی را برای مسائل بیضوی در مرجع [۲۴] بیان نمود. با پیشرفت تکنولوژی کامپیوتر بعد از جنگ جهانی دوّم،

---

۱ Euler
۲ Adams
۳ Bashforth
۴ Runge
۵ Kutta
۶ Dahlquist
۷ Courtiss
۸ Hirschfelder
۹ Courant
۱۰ Friedrishs
۱۱ Lewy
۱۲ Gerschgorim

مطالعه‌ی PDEs وابسته به زمان مورد توجّه قرار گرفت. از جمله مقالات مهم در این زمینه، مقاله‌ی کرانک [۱۳] و نیکلسون [۱۴] در سال ۱۹۴۷ [۱۵]، پیسمن[۱۵] و راچفورد[۱۶] در سال ۱۹۵۵ [۵۰] و لَکس[۱۷] و وندرُف [۱۸] در سال ۱۹۶۴ [۳۹] می‌باشد.
در اواسط قرن بیستم، تکنیک جدیدی برای تقریب مشتقات مکانی به نام روش المان‌های محدود توسط کورانت در سال ۱۹۴۳ که در مرجع [۱۴] بیان شده است، به وجود آمد. این تکنیک توسط مهندسین و به‌خصوص توسط تورینگ [۱۹] و همکارانش در سال ۱۹۵۲ به طور محاسباتی توسعه داده شد[۶۵].
در سال ۱۹۷۰، تکنیک دیگری برای تقریب مشتقات یک PDE به نام روش طیفی معرفی شد. این روش با دو تکنیک قبلی بیان شده متفاوت می‌باشد زیرا این تکنیک یک تقریب سراسری برای جواب به دست می‌دهد در حالی که روش‌های تفاضلات متناهی و المان‌های محدود، تقریب موضعی برای جواب دارند. در این پایان‌نامه از روش طیفی برای گسسته‌سازی مکانی برای معادلاتی که مورد بررسی قرار می‌دهیم، استفاده می‌کنیم. در حقیقت برای مسائلی که دارای شرایط کرانه‌ای متناوب می‌باشند از روش طیفی فوریه و برای مسائلی که دارای شرایط کرانه‌ای دیریکله[۲۰] یا نیومن[۲۱] می‌باشند، روش طیفی چبیشف[۲۲] را به کار می‌بریم. این روش‌ها به‌طور کامل در فصل‌های بعد توضیح داده خواهند شد. بیشتر PDEs مورد بحث در این پایان‌نامه شامل ترکیبی از قسمت غیرخطی از مرتبه پایین و قسمت خطی از مرتبه بالا می‌باشد. از نمونه این معادلات می‌توان به معادله‌ی آلن– کاهن[۲۳](AC)، برگرز[۲۴]، KdV[۲۵]، کورامُتو سیواشینسکی[۲۶] و نظایر آن اشاره نمود. برای به دست آوردن جواب‌های از مرتبه دقّت بالا، نیاز به استفاده از تقریب‌های بالا در هر دو مؤلفه زمان و مکان می‌باشد. با توجه به مشکلات ناشی از ترکیب سختی و غیرخطی بودن این مسائل، بیشتر تقریب‌های به کار رفته برای حل آنها، حداکثر از مرتبه دقّت دو زمانی می‌باشد. هدف اصلی این پایان‌نامه، به کارگیری روش‌های از مرتبه دقّت چهار زمانی برای حل این‌گونه مسائل می‌باشد. علاوه بر این، با انجام اصلاحی روی برخی روش‌ها، ناپایداری عددی آنها را تقلیل می‌دهیم. بعد از به کارگیری روش‌های طیفی برای گسسته‌سازی مکانی PDEs وابسته به زمان دستگاهی از

---
۱۳ Crank
۱۴ Nicolson
۱۵ Peaceman
۱۶ Rachford
۱۷ Lax
۱۸ Wendroff
۱۹ Turner
۲۰ Dirichlet
۲۱ Neumann
۲۲ Chebyshev
۲۳ Allen-Cahn
۲۴ Burgers
۲۵ Korteweg-De Vries
۲۶ Kuramoto-sivashinsky

ODEs حاصل می‌شود. برای حل دستگاه حاصل نیز روش‌های مرتبه‌ی چهارم را مورد استفاده قرار می‌دهیم.
فرض کنیم شکل کلّی PDE به صورت زیر باشد:

$$u_t = \bar{L}u + \bar{N}(u,t), \qquad (۱.۰)$$

که در آن $\bar{L}$ و $\bar{N}$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی قسمت خطی و غیرخطی PDE می‌باشد. با گسسته‌سازی PDE فوق توسط روش‌های طیفی، دستگاه ODE زیر را به دست می‌آوریم:

$$u_t = Lu + N(u,t). \qquad (۲.۰)$$

که در آن L قسمت خطی و N قسمت غیرخطی معادله است. برای حل دستگاه فوق از روش‌های ضمنی– صریح (IMEX)، روش عامل انتگرال‌گیری (IF)، روش‌های تفاضلات زمانی نمائی (ETD) یا روش‌های تفاضلات زمانی رونگه– کوتا (ETDRK) استفاده می‌کنیم.
ساختار این پایان‌نامه به صورت زیر است: در فصل اوّل، مقدمات و تعاریف مورد نیاز بیان می‌شود. در فصل دوّم روش‌های گسسته‌سازی مکانی طیفی از قبیل روش‌های فوریه‌ی و چبیشف طیفی و ماتریس‌های مشتق متناظر بیان خواهد شد. فصل سوّم از این پایان‌نامه به معرفی روش‌های مرتبه‌ی دقّت دو، سه و چهار برای حل دستگاه‌های ODE سخت اختصاص دارد. در این فصل نحوه‌ی به دست آوردن هر کدام از روش‌ها را به تفصیل بیان می‌کنیم. در فصل چهار، مفهوم پایداری را بیان نموده و ناحیه‌ی پایداری هر کدام از روش‌ها را در مختصات دکارتی و قطبی ترسیم می‌کنیم. در فصل پنجم علّت ناپایداری روش‌های ETD و ETDRK را بیان نموده و برخی از الگوریتم‌ها مانند سری تیلور، فرمول انتگرال کوشی، الگوریتم‌های مقیاس‌گذاری و تربیع نوع اوّل و دوّم، الگوریتم تجزیه‌ی ماتریس و الگوریتم ماتریس مرکب را برای محاسبه‌ی دقیق ضرایب روش‌های ETD و ETDRK معرفی می‌نمائیم. در فصل ششم نتایج عددی حاصل از به‌کارگیری روش‌های IMEX، IF، ETD و ETDRK برای حل برخی PDEs سخت و غیرخطی را بیان می‌کنیم. با مقایسه‌ی نتایج عددی توسط خطای نسبی و زمان محاسبه نشان می‌دهیم که روش ETDRK برای حل اکثر مسائل نسبت به روش‌های دیگر مفیدتر می‌باشد.

فصل ۱

تعاریف و پیش‌نیازها

در این فصل برخی تعاریف و پیش نیازها که در فصل‌های بعد مورد نیاز می‌باشد را بیان می‌کنیم:

۱.۱ معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۱ یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) مرتبه‌ی nام معادله‌ای است بر حسب متغیر مستقل x، تابع حقیقی u و n مشتق اوّل آن یعنی u'، u''، ... و $u^{(n)}$ به صورت زیر:

$$F(x, u(x), u'(x), ..., u^{(n)}(x)) = \circ; \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

یک معادله دیفرانسیل مرتبه nام با n شرط اوّلیه زیر را یک مسأله‌ی مقدار اوّلیه می‌نامند.

$$u(a) = a_{۱},\ u'(a) = a_{۲}, ...,\ u^{(n-۱)}(a) = a_n.$$

تعریف ۲.۱ یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) و یا دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی را خودمدار گویند هرگاه به طور صریح شامل متغیر مستقل، که معمولاً با x نمایش می‌دهند، نباشد. یک معادله دیفرانسیل خودمدار مرتبه دوّم عبارت است از $F(u, u', u'') = \circ$ که در آن $u' = \frac{du}{dx} = v$ و $u'' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du}v$ می‌باشد.

تعریف ۳.۱ نقطه‌ی $u_\circ \in \mathbb{R}^n$ را نقطه‌ی تعادل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی:

$$u' = f(u), \qquad (۱.۱)$$

نامند هرگاه داشته باشیم $f(u_\circ) = \circ$.

برای **خطی‌سازی** دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی (۱.۱)، ابتدا لازم است نقطه‌ی تعادل دستگاه را با توجه به تعریف فوق به دست آوریم. پس از آن توسط دستگاه خطی $u' = Df(u_0)u$، که در آن D ماتریس ژاکوبین[1] می‌باشد، دستگاه غیرخطی (۱.۱) را تقریب می‌زنیم.

تعریف ۴.۱ اگر u تابعی از n متغیر مستقل x_1، x_2، ... و x_n باشد آنگاه یک **معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی** معادله‌ای است بر حسب متغیرهای مستقل x_1، x_2، ... و x_n، تابع حقیقی u و مشتقات جزئی u نسبت به متغیرهای مستقل.

۱.۱.۱ سختی در معادلات دیفرانسیل

معادلات ODE سخت، مفهومی آشنا در آنالیز عددی می‌باشد. این مفهوم برای اوّلین بار توسط دو شیمیدان به نام‌های کورتیس و هیشفلدر در مرجع [۱۶] معرفی شد. از سال ۱۹۷۰ به بعد مقالات زیادی در این زمینه به چاپ رسیده است. علی‌رغم توجّه زیاد محققان به این موضوع، تعریف واحدی که مفهوم سختی در ODE را نشان دهد، وجود ندارد. شاید یکی از مشکلات در این زمینه وسیع بودن مجموعه‌ی ODEهائی است که می‌توانند به عنوان ODE سخت معرفی شوند. بنابراین تعاریف متفاوتی از سختی وجود دارد. در مسائل سخت، پایداری نسبت به دقّت محدودیت‌های بیشتری را روی گام زمانی اعمال می‌نماید و از اینرو ساده‌ترین تعریف برای مسائل سخت این است که توسط روش‌های صریح به سادگی نمی‌توان این مسائل را حل کرد و برای حفظ پایداری نیاز به گام‌های بسیار کوچک می‌باشد. مشخصه‌های سختی را برای برخی سیستم‌ها به صورت زیر بیان می‌کنیم:

۱) مسائلی به شکل $u' = ku + f(t)$ که در آن $k \in \mathbb{C}$ و $|k|$ بزرگ است و نیز $Re(k) < 0$ (قسمت حقیقی k)،

۲) دستگاهی از معادلات به شکل $U' = KU + f(t)$ که K ماتریس مربعی می‌باشد که حداقل یک مقدارویژه‌ی $l \in \mathbb{C}$ با $|l|$ بزرگ دارد که $Re(l) < 0$،

۳) دستگاهی از معادلات به صورت $U' = f(U, t)$ که ماتریس ژاکوبین f حداقل یک مقدارویژه‌ی $l \in \mathbb{C}$ با $|l|$ بزرگ دارد که $Re(l) < 0$.

مفهوم سختی در PDEs نیز مشابه ODEs می‌باشد. در حقیقت با گسسته‌سازی مکانی یک PDE سخت، یک دستگاه ODE سخت به دست می‌آید. دکر [2] و ورور[3] در مرجع [۱۸] نشان دادند که

[1] Jacobian
[2] Dekker
[3] Verwer

سختی علاوه بر این که برای مسائل نیمه‌گسسته شده، ذاتی است می‌تواند متأثر از گسسته‌سازی نیز باشد. یعنی هر مسأله‌ی نیمه‌گسسته‌سازی شده، هنگامی که شبکه‌ی مکانی ریز می‌شود، سخت‌تر می‌شود. بخشی از منشأ سختی در مسائل نیمه‌گسسته‌سازی شده مربوط به توزیع مقادیر ویژه ماتریس مشتق می‌شود. در اصل برای اینکه روشی پایدار باشد باید مقادیر ویژه‌ی عملگر خطی (پس از گسسته‌سازی کردن) در ناحیه‌ی پایداری روش حل ODE حاصل، قرار گیرد. بنابراین مسائلی که دارای توزیع مقادیر ویژه‌ی گسترده هستند، سخت می‌باشند. مقادیر ویژه‌ی ماتریس مشتق به طول گام شبکه‌ی مکانی گسسته‌سازی شده بستگی دارد و سختی با ریز کردن شبکه‌ی مکانی افزایش می‌یابد.

۲.۱.۱ انواع معادلات با مشتقات جزئی

معادله‌ی مرتبه دوّم:

$$a\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+b\frac{\partial^۲ u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu+g=۰,$$

که در آن a، b، c، d، e، f و g ممکن است توابعی از متغیرهای مستقل x و y یا متغیر وابسته‌ی $u(x,y)$ باشند را در نظر می‌گیریم. این معادله یک معادله‌ی **بیضوی** است اگر $b^۲-۴ac<۰$، یک معادله‌ی **سهموی** است اگر $b^۲-۴ac=۰$ و یک معادله‌ی **هذلولوی** است اگر $b^۲-۴ac>۰$ باشد. اگر $g=۰$، معادله را همگن گویند، در غیر این صورت معادله ناهمگن می‌باشد. اگر تمامی ضرایب a، b، c، d، e، f و g توابعی از x و y باشند، معادله خطی می‌باشد و در غیر این صورت معادله غیرخطی است [۵۹].

۳.۱.۱ انواع شرایط کرانه‌ای

یک مسأله در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا با شرایط کرانه‌ای [۵۹] (مثل مسأله‌ی لاپلاس، پوآسن و نظایر آن،) و یا با شرایط کرانه‌ای و اولیّه (مانند مسأله‌ی گرما، موج و نظایر آن) همراه می‌باشد. انواع شرایط کرانه‌ای نیز عبارت‌اند از:

۱) **دیریکله:** در این نوع شرط کرانه‌ای ، مقدار تابع روی مرز ناحیه‌ی حل مشخص می‌باشد.

۲) **نیومن :** در این نوع شرط کرانه‌ای ، مقدار مشتق تابع روی مرز ناحیه‌ی حل مشخص می‌باشد.

۳) **روبین**[۴] : در این نوع شرط کرانه‌ای ، مقدار تابع در بخشی از مرز ناحیه‌ی حل و مقدار مشتق تابع در بخش دیگر مرز ناحیه‌ی حل مشخص می‌باشد.

[۴] Robin

۲.۱ پایداری روش‌های مقدار اوّلیه

در این بخش، مفهوم پایداری را برای یک روش k گامی بیان می‌کنیم [۳۷]. فرمول کلّی روش k گامی برای حل معادلات دیفرانسیل به شکل $u' = f(u,t)$ به صورت زیر است:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i u_{i+j} = \triangle t \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{i+j}; \qquad j = 0, 1, ..., N-k, \tag{۲.۱}$$

که در آنΔt طول گام زمانی، $t_i = i\triangle t$، $u_i = u(i\triangle t)$ و $f_i = f(u_i, t_i)$ می‌باشد.

تعریف ۵.۱ یک چندجمله‌ای با درجه‌ی k را یک چندجمله‌ای شُر [۵] گویند هرگاه تمامی صفرهای این چندجمله‌ای داخل یک دایره با شعاع واحد واقع شوند.

تعریف ۶.۱ یک چندجمله‌ای با درجه‌ی k را یک چندجمله‌ای نیومن [۶] گویند هرگاه تمامی صفرهای این چندجمله‌ای داخل یا روی دایره به شعاع واحد واقع شوند و صفرهایی که روی دایره واقع می‌شوند ساده باشند.

چندجمله‌ای‌های زیر را با توجّه به رابطه‌ی (۲.۱) در نظر می‌گیریم:

$$\rho(z) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i z^i \quad , \qquad \sigma(z) = \sum_{i=0}^{k} \beta_i z^i.$$

تعریف می‌کنیم:

$$\pi(z,q) = \rho(z) - q\sigma(z); \quad q \in \mathbb{C}.$$

تعریف ۷.۱ ناحیه‌ی پایداری مطلق به صورت زیر تعریف می شود:

$$D = \{q \in \mathbb{C} \mid \text{یک چندجمله‌ای شُر باشد } \pi(z,q)\}.$$

تعریف ۸.۱ یک روش مقدار اوّلیه را $0-$پایدار گویند هرگاه $\rho(z)$ یک چندجمله‌ای نیومن باشد.

منظور از روش مقدار اولیّه روشی است که برای حل ODEs به کار می‌رود.

تعریف ۹.۱ یک روش مقدار اوّلیه را $A-$پایدار گویند هرگاه ناحیه‌ی D، شامل سمت چپ صفحه‌ی مختلط باشد، یعنی $\mathbb{C}^- \subseteq D$.

---

[۵] Schur
[۶] Neumann

۳.۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اوّل و دوّم مرتبه‌ی n به ترتیب توسط T_n و U_n نمایش داده می‌شوند[۴۴]. این چندجمله‌ای‌ها به ترتیب هنگام مطالعه‌ی معادلات دیفرانسیل:

$$(1-x^2)u''-xu'+n^2u=0,$$

و

$$(1-x^2)u''-3xu'+n(n+2)u=0,$$

به عنوان جواب این معادلات شناخته شده‌اند.
چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اوّل توسط رابطه‌ی بازگشتی زیر تعریف می‌شوند:

$$T_0(x)=1,$$

$$T_1(x)=x,$$

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x);\quad n\in\mathbb{N}.$$

تعریف مثلثاتی چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اوّل عبارت است از:

$$T_n(x)=\cos(n\,Arc\cos(x))$$

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوّم توسط رابطه‌ی بازگشتی زیر تعریف می‌شوند:

$$U_0(x)=1,$$

$$U_1(x)=2x,$$

$$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x);\quad n\in\mathbb{N}.$$

تعریف مثلثاتی چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوّم به صورت زیر می‌باشد:

$$U_n(x)=\frac{\sin((n+1)Arc\cos(x))}{\sin(Arc\cos(x))}.$$

هر دو نوع چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبه‌ی nام دارای n ریشه‌ی متفاوت‌اند که متعلق به بازه‌ی $[-1,1]$ می‌باشند. با توجه به قاعده‌ی زیر:

$$\cos(\frac{\pi}{2}(2k+1))=0,$$

ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف نوع اوّل و دوّم به ترتیب عبارت‌اند از:

$$x_k = \cos(\frac{\pi}{۲}\frac{۲k-۱}{n}); \qquad k = ۱, ..., n,$$

و

$$x_k = \cos(\frac{k}{n+۱}\pi); \qquad k = ۱, ..., n.$$

۴.۱ روش‌های رونگه– کوتای صریح

در آنالیز عددی، روش‌های رونگه– کوتا [۲۵] یک خانواده‌ی مهم در بین روش‌های ضمنی و صریح برای تقریب جواب یک معادله دیفرانسیل معمولی می‌باشند. شکل کلّی روش‌های رونگه– کوتا مرتبه s برای تقریب جواب عددی معادله دیفرانسیل معمولی،

$$\frac{du}{dt} = f(t, u),$$

به صورت زیر می‌باشد:

$$k_i = f(t_n + c_i h, u_n + h\sum_{j=۱}^{s} a_{ij}k_j),$$

$$u_{n+۱} = u_n + h\sum_{i=۱}^{s} b_i k_i.$$

روش‌های فوق را می‌توان به صورت جدول بوچر زیر نمایش داد:

$$\begin{array}{c|ccc} c_۱ & a_{۱۱} & \dots & a_{۱s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s۱} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_۱ & \dots & b_s \end{array}$$

روش‌های رونگه- کوتای صریح مرتبه sام در حالت کلّی به صورت زیر می‌باشند:

$$u_{n+۱} = u_n + h\sum_{i=۱}^{s} b_i k_i,$$

که در آن

$$\begin{aligned} &k_۱ = f(t_n, u_n), \\ &k_۲ = f(t_n + c_۲h, u_n + a_{۲۱}hk_۱), \\ &k_۳ = f(t_n + c_۳h, u_n + a_{۳۱}hk_۱ + a_{۳۲}hk_۲), \\ &\vdots \\ &k_s = f(t_n + c_sh, u_n + a_{s۱}hk_۱ + a_{s۲}hk_۲ + \dots + +a_{s,s-۱}hk_{s-۱}). \end{aligned}$$

روش‌های صریح فوق را می‌توان به صورت جدول بوچر زیر نمایش داد:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots a_{s,s-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots\ b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

حال به استخراج روش رونگه — کوتای مرتبه‌ی دوّم می‌پردازیم. برای این عمل، ثابت‌های c_2، a_{21}، b_1 و b_2 را طوری به دست می‌آوریم که رابطه‌ی

$$k_1 = f(t_n, u_n),$$

$$k_2 = f(t_n + c_2 h, u_n + h a_{21} k_1),$$

$$u_{n+1} = u_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2),$$

با قرار دادن بسط تیلور مرتبه اوّل

$$k_2 = f(t_n, u_n) + f_t(t_n, u_n) c_2 h + f_u(t_n, u_n) f(t_n, u_n) h a_{21} + O(h^2),$$

به ازای هر $n = 0, 1, ..., N - 1$ با بسط تیلور مرتبه دوّم

$$u_{n+1} \approx u_n + h f(t_n, u_n) + \frac{h^2}{2}(f_t(t_n, u_n) + f_u(t_n, u_n) f(t_n, u_n)),$$

برابر باشد. بدین منظور دستگاه سه معادله با چهار مجهول زیر به دست می‌آید که دارای بی‌شمار جواب است:

$$b_1 + b_2 = 1 \quad , \quad b_2 c_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad b_2 a_{21} = \frac{1}{2}.$$

اگر $c_2 = a_{21} = \frac{1}{2}$، $b_1 = 0$ و $b_2 = 1$ آنگاه روش رونگه — کوتای مرتبه‌ی دوّم مورد نظر حاصل می‌شود. با توجه به نمایش فوق، روش رونگه—کوتای صریح مرتبه‌ی دوّم به صورت:

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}
$$

و روش رونگه—کوتای صریح مرتبه‌ی سوم به شکل:

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
1 & -1 & 2 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

و روش رونگه—کوتای صریح مرتبه‌ی چهارم به صورت: