

-----

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض - جبر

درباره‌ی نوارهای برخی از نیم‌گروه‌های خاص

استاد راهنما: دکتر بیژن دواز

استاد مشاور: دکتر سیدمحمد انوریه

پژوهش‌گر: فاطمه سپاهی بروجنی

مهر ۱۳۹۱



کلیه حقوق مادی و معنوی مرتبط بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه/ رساله متعلق به دانشگاه یزد است و هرگونه استفاده از نتایج علمی و عملی از این پایان‌نامه/ رساله برای تولید دانش فنی، ثبت اختراع، ثبت اثر بدیع هنری، همچنین چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه و اقتباس و ارائه مقاله در سمینارها و مجلات علمی از این پایان‌نامه/ رساله منوط به موافقت کتبی دانشگاه یزد است.



تقدیم بہ ہمدی کسانی کہ مرا آموختند حتی بہ یک کلام یا یک نگاه

و

تقدیم با عشق بہ سیکران مہر و عطفوت  
او کہ عالم در انتظار و گمنامی اوست...





## سپاس گزارى

سپاس و ستايش پروردگار يکبار که شوق آموختن را در قلم نهاد و ذهن و اندیشه ام را به انبازى مجتهد نمود تا جهان و نظم آن را بشتر درک کنم و باز هم سپاس آن يکبار که چشمه ساز زلال مهربانى و عشق را با حضور خانواده و دوستانم در کنارم، به من ارزاني داشت تا وجودشان حامى و اميدبخشم باشد و زندگى ام را به نور حضور اساتيدى روشن کرد که راهنما و مشوقم باشند و ياريم نمود تا در فضايى حضور يابم که برايم بهترين بود.

حال که به حکم همه ي آسمانى که همواره پشتيبان و راهنمايم بودند قدم کوچکى در راهى طولانى برداشته ام، بر خود لازم مى دانم از تمام کسانى که مراد اين مسير يارى نمودند تقدير و شکر کنم.

ابتدا از دو اقيانوس بى کران محبت، عزيزترين و گرانبها ترين هديه هاى آسمانى، پدر و مادر عزيزم که حضور گر مشان آرامش زندگيم، وجودشان اميدزيبستم، نگاهشان و بودنشان اميد خاطر م است کمال سپاس و قدر داني را دارم. از استاد راهنماى بزرگوارم، استاد فرزانه و گرانقدر جناب آقاى دکتر بشيرن دواز که در طول تحصيلم در اين مقطع و اين پايان نامه همواره راهنمايم بودند و بانهايت صبر و سنگينايى من را از راهنمايى هاى بى دريغ خود بهره مند ساختند، صادقانه نهايت شکر را دارم و برايشان سلامتى، بهروزي و توفيق روز افزون آرزو مند م.

از استاد مشاورم، جناب آقاى دکتر سيد محمد انوريه که بارها همينايى هاى سازنده شان موجب انجام اين اثر گرديده اند و هم چنين جناب آقاى دکتر قديرى و دکتر مير و کيلي که زحمت باز خوانى و داوري اين پايان نامه را به عهده گرفتند نهايت شکر و قدر داني را مى نمايم.

فاطمه سپاهى بروجنى



## چکیده

هدف این پایان نامه بررسی نوارهای برخی از نیم گروه‌هاست. ابتدا در فصل اول به ارائه‌ی برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد و با استفاده از رادیکال‌های اصلی، مشخصات کوچک‌ترین نیم‌مشبکه‌ی هم‌نهشت روی یک نیم‌گروه را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم ویژگی‌های نوارهای نیم‌گروه‌های  $\lambda$ -ساده،  $\lambda_n$ -ساده و  $T$ -ساده را مشخص می‌کنیم و در انتهای فصل ویژگی نیم‌گروه‌هایی را بیان می‌کنیم که یک نیم‌مشبکه از نیم‌گروه‌های  $\sigma_n$ -ساده‌اند.

در فصل سوم نیم‌گروه‌هایی را بررسی می‌کنیم که هر زیر نیم‌گروهشان ارشمیدسی است و مشبکه‌ی این نیم‌گروه‌ها را مطالعه می‌کنیم. هم‌چنین مشخصات نیم‌مشبکه‌ی ماتریس‌های نیم‌گروه‌های ارشمیدسی چپ و به طور خاص ماتریس‌های نیم‌گروه‌های ارشمیدسی چپ را ارائه می‌دهیم. در بخش آخر شرایط یک نوار از نیم‌گروه‌های ارشمیدسی را به دست می‌آوریم.

در آخرین فصل نیم‌گروه‌های الحاقی-توانی را تعریف کرده و نیم‌گروه‌هایی را مشخص می‌کنیم که نوارهایی از نیم‌گروه‌های الحاقی-توانی هستند.



# فهرست مطالب

مقدمه

## ۱ مفاهیم اولیه و مقدمات

۲	.....	نوارها	۱.۱
۷	.....	رابطه	۲.۱
۱۶	.....	رادیکال‌های اصلی	۳.۱
۲۸	.....	مشبکه	۴.۱
۲۹	.....	تجزیه‌ی نیم‌گروه‌ها	۵.۱

## ۲ نیم‌گروه‌های $\lambda$ -ساده

۳۶	.....	نوارهای نیم‌گروه‌های $\lambda$ -ساده	۱.۲
۴۵	.....	نتایج درباره‌ی $\lambda$ -هم‌ارزی‌ها	۲.۲
۴۷	.....	نیم‌مشبکه‌ی ماتریس‌های نیم‌گروه‌های $\lambda$ -ساده	۳.۲
۴۹	.....	نیم‌مشبکه‌ی نیم‌گروه‌های $\lambda$ -ساده	۴.۲
۵۹	.....	نیم‌مشبکه‌ی نیم‌گروه‌های $\sigma_n$ -ساده	۵.۲

## ۳ نیم‌گروه‌های ارشمیدسی

۶۳	.....	نیم‌مشبکه‌ی نیم‌گروه‌های ارشمیدسی	۱.۳
۶۶	.....	نیم‌مشبکه‌ی نیم‌گروه‌های ارشمیدسی ضعیف	۲.۳

۳.۳ نوار نیم‌گروه‌های ارشمیدسی چپ و راست ..... ۷۱

#### ۴ نیم‌گروه‌های الحاقی-توانی

۱.۴ نوارهای نیم‌گروه‌های الحاقی-توانی ..... ۷۷

۷۹ واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۸۲ مراجع

## مقدمه

یکی از بهترین روش‌های مطالعه‌ی ساختار نیم‌گروه‌ها روش تجزیه است. این روش بر اساس افراز یک نیم‌گروه، توصیف ساختار هر مؤلفه و برقرار کردن ارتباط بین آنها استوار است. هدف اصلی این روش تجزیه‌ی یک نیم‌گروه به مؤلفه‌های با ساختار ساده‌تر، با استفاده از روابط هم‌نهشتی، برای مطالعه‌ی جزئیات هر مؤلفه و برقرار کردن ارتباط متقابل بین مؤلفه‌ها و نیم‌گروه کامل است.

تجزیه‌ی نیم‌مشبکه‌ی نیم‌گروه‌ها برای اولین بار در سال ۱۹۴۱ توسط کلیفورد<sup>۱</sup> معرفی و مطالعه شد [۱۳]. تامورا و کیمورا در سال ۱۹۵۴ تجزیه‌ی نیم‌مشبکه‌ی نیم‌گروه‌های جابجایی را مورد مطالعه قرار دادند و مستقل از آنها دیرین<sup>۲</sup> در همان سال نماد نیم‌گروه‌های ارشمیدسی را معرفی کرد [۲۸] و ثابت شد که هر نیم‌گروه جابجایی یک نیم‌مشبکه از نیم‌گروه‌های ارشمیدسی است. اولین بار ویژگی‌های نیم‌گروهی که نیم‌مشبکه‌ای از نیم‌گروه‌های ارشمیدسی است، توسط پوتچا بیان شد. به همین دلیل تعدادی از نویسندگان این نیم‌گروه‌ها را نیم‌گروه‌های پوتچا می‌نامند. مشخصات این نیم‌گروه‌ها در [۲]، [۵]، [۸] و [۱۱] یافت می‌شود.

وجود بزرگترین تجزیه‌ی نیم‌مشبکه‌ی نیم‌گروه‌ها در سال ۱۹۵۵ توسط تامورا<sup>۳</sup>، کیمورا<sup>۴</sup> [۲۷] و یامادا<sup>۵</sup> [۲۹] ثابت شد. کوچک‌ترین نیم‌مشبکه‌ی هم‌نهشت را با نماد  $\sigma$  نشان می‌دهیم. تامورا در سال

---

<sup>۱</sup>(A. H. Clifford)

<sup>۲</sup>(T. Thierrin)

<sup>۳</sup>(T. Tamura)

<sup>۴</sup>(N. kimra)

<sup>۵</sup>(M. Yamada)

۱۹۶۴ هم‌نهشتی  $\sigma$  را شرح داد [۲۵]. پتریچ در سال ۱۹۶۴  $\sigma$  را با استفاده از ایده‌آل‌های کاملاً اولیه و صافی‌ها توضیح داد [۲۰]. ارتباط بین  $\sigma$ ، ایده‌آل‌های کاملاً اولیه و صافی‌ها توسط سولکا<sup>۶</sup> در سال ۱۹۷۰ داده شد [۲۴]. پوتچا در سال ۱۹۷۴<sup>۷</sup> ثابت کرد که  $\sigma$  بستارمتعدی رابطه‌ی  $\rightarrow^{-1} \cap \rightarrow$  است [۲۳]. در این پایان‌نامه مشخصات  $\sigma$  را با استفاده از رادیکال‌های اصلی نیم‌گروه‌ها بیان می‌کنیم.

مشخصات نیم‌گروه‌هایی که دارای تجزیه به یک نوار از نیم‌گروه‌ها هستند توسط پوتچا داده شد [۲۱]. مشخصات دیگر این نیم‌گروه‌ها توسط نویسندگانی چون بوجدانویک<sup>۸</sup> و سیریک<sup>۹</sup> داده شده است [۴] و [۸]. در این پایان‌نامه برخی از این نیم‌گروه‌ها را بررسی می‌کنیم.

---

<sup>۶</sup>(R. Sulka)

<sup>۷</sup>(M. Putcha)

<sup>۸</sup>(S. Bogdanović)

<sup>۹</sup>(M. Ćirić)



# فصل ۱

## مفاهيم اوليه و مقدمات

## ۱.۱ نوارها

تعریف ۱.۱.۱. یک نیم گروه عبارت است از یک مجموعه‌ی ناتهی مانند  $G$  همراه با عمل دوتایی  $*$  بر  $G$  به طوری که خواص زیر برقرار باشند:

(۱) نسبت به عمل  $*$  بسته باشد، یعنی

$$\forall a, b \in G, ab \in G.$$

(۲) عمل  $*$  روی  $G$  شرکت پذیر باشد، یعنی:

$$\forall a, b, c \in G, a(bc) = (ab)c.$$

اگر عضو  $1 \in S$  وجود داشته باشد به طوری که

$$\forall x \in S, x1 = 1x = x,$$

گوییم  $1$  عضو همانی  $S$  است و  $S$  نیم گروهی با همانی یا تکوار است.

نیم گروه  $S$  دارای حداکثر یک عضو همانی است، زیرا اگر  $1' \in S$  به طوری که

$$\forall x \in S, x1' = 1'x = x,$$

آن گاه

$$1' = 1.1' = 1.$$

اگر نیم گروه  $S$  دارای عضو همانی نباشد، آن گاه عضو  $1$  را به مجموعه‌ی  $S$  اضافه می کنیم. حال تعریف

می کنیم:

$$\forall s \in S, 1s = s1 = s,$$

و

$$1.1 = 1.$$

در این صورت  $S \cup \{1\}$  نیم گروهی با عضو همانی ۱ است. حال نماد  $S^1$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{اگر } S \text{ تکوار باشد،} \\ S \cup \{1\} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

**تعریف ۲.۱.۱.** فرض کنیم  $A$  زیر مجموعه‌ی ناتهی از نیم گروه  $(S, \cdot)$  است. در این صورت  $(A, \cdot)$  زیر نیم گروهی از  $S$  است، هرگاه تحت عمل  $S$  بسته باشد، یعنی

$$\forall x, y \in A, x \cdot y \in A.$$

**مثال ۳.۱.۱.** نیم گروه  $(\mathbb{Q}, +)$  را در نظر می گیریم.  $(\mathbb{N}, +)$  زیر نیم گروه  $S$  است، اما  $(\mathbb{N}, \cdot)$  زیر نیم گروه  $S$  نیست، زیرا عمل آن عمل  $\mathbb{Q}$  نیست.

یک تکوار همراه با شرط زیر را یک گروه می نامیم. هر عضو  $G$  وارون داشته باشد، یعنی:

$$\forall a \in G, \exists b \in G : ab = ba = e,$$

که  $e$  عضو همانی  $S$  است. در این صورت  $b$  را وارون  $a$  نامیده و آن را با  $a^{-1}$  نشان می دهیم.

**مثال ۴.۱.۱.** فرض کنیم  $\mathbb{N}^*$  مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی است. نگاشت  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^* : * \text{ را با ضابطه‌ی } m * n = m + n$  تعریف می کنیم. در این صورت  $*$  دارای خواص زیر است:

(۱) بسته بودن:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m * n \in \mathbb{N}.$$

(۲) شرکت پذیری:

$$\forall m, n, k \in \mathbb{N}, m * (n * k) = (m * n) * k.$$

(۳) عضو همانی:

$$\forall m \in \mathbb{N}, m * 0 = 0 * m = m.$$

$(\mathbb{N}, *)$  یک تکوار است. اما گروه نیست، زیرا بعضی از اعضای  $\mathbb{N}$  وارون ندارند.

نیم‌گروه  $S$  دارای خاصیت جابجایی است، هرگاه

$$\forall x, y \in S, x.y = y.x.$$

تعریف ۵.۱.۱. عضو  $e$  از نیم‌گروه  $S$  را خودتوان می‌نامیم، هرگاه  $e^2 = e.e = e$ .

مثال ۶.۱.۱. نیم‌گروه متناهی  $S$  به صورت زیر تعریف شده است:

.	e	a	f	b
e	e	a	f	b
a	a	e	b	f
f	f	b	f	b
b	b	f	b	f

$e$  و  $f$  خودتوانند و  $e$  عضو همانی است.

تعریف ۷.۱.۱. ([۱۶]) اگر هر عضو نیم‌گروه  $S$  خودتوان باشد، آن‌گاه  $S$  را یک نوار می‌نامیم. نواری که

دارای خاصیت جابجایی است، نیم‌مشبکه نامیده می‌شود و آن را با  $\mathcal{K}$  نشان خواهیم داد.

مثال ۸.۱.۱. نیم‌گروه  $S$  با جدول زیر تعریف شده است:

.	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	c

این نیم‌گروه یک نیم‌مشبکه است.

تعریف ۹.۱.۱. ([۱۶]) نیم‌گروه  $S$  که در شرایط زیر صدق کند، نوار صفر چپ نامیده می‌شود و آن را با

$\mathcal{LZ}$  نشان خواهیم داد.

$$\forall a, b \in S, ab = a.$$