بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

نگاشتهای حافظ تعامد تقریبی روی C^*–مدولها

نگارش:

سمیه مهر نوش

اساتید راهنما:

دکترامیرقاسم غضنفری و دکتر بهمن غضنفری

استاد مشاور:

دکتر علی بارانی

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

بهمن ماه ۱۳۸۸

بسمه تعالی

دانشگاه لرستان

مدیریت تحصیلات تکمیلی

صورتجلسه ی ارزشیابی پایان نامه ی کارشناسی ارشد

جلسه ی دفاع ازپایان نامه ی کارشناسی ارشد خانم سمیه مهرنوش

تحت عنوان :

نگاشتهای حافظ تعامد تقریبی روی C^* – مدولها

درتاریخ پانزدهم بهمن ماه یکهزاروسیصدوهشتادوهشت (۱۳۸۸/۱۱/۱۵) دردانشکده علوم پایه دانشگاه لرستان ارائه گردید و هیئت داوران براساس کیفیت پایان نامه ، استماع دفاعیه ونحوه ی پاسخ به سوال ها ، پایان نامه ایشان رابرای دریافت درجه ی کارشناسی ارشد دررشته ریاضی ،گرایش محض معادل با ۶ واحد بانمره ی(به حروف) (به عدد) وبادرجه ی موردتایید قرارداد.

هیات داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- اساتید راهنما : دکترامیرقاسم غضنفری / دکتربهمن غضنفری	استادیار / استادیار	
۲- استاد مشاور: دکترعلی بارانی	استادیار	
۳- استادمدعو : سیداحمد آهوقلندری	دانشور	
۴- استادمدعو : دکترناصرعباسی	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده : دکتربهمن غضنفری	استادیار	

سیداحمد آهوقلندری
مدیر گروه ریاضی

دکتر علیرضا غیاثوند
رئیس دانشکده علوم پایه

دکتر ناصر اکبری
مدیر تحصیلات تکمیلی دانشگاه

تقدیم به:

زحمات بی دریغ پدرم

و

دستان پر مهر مادرم

قدردانی و تشکر

سپاس خدای را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشه ی تیز گام در راه شناسایی او لنگ است و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ.

اکنون که با عنایت خداوند سبحان کار تدوین این پایان‌نامه به اتمام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم از تمامی عزیزانی که در به ثمر رسیدن این پژوهش مرا همراهی نمودند تشکر و قدردانی کنم.

از زحمات بی دریغ استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر امیر قاسم غضنفری که علیرغم نبودشان، همواره از راهنماییهای بی دریغشان بهره مند بودم، کمال تشکر و سپاسگذاری دارم.

از زحمات استاد محترم جناب آقای دکتر محمود شکوری، که در نبود استاد راهنما، از هیچ کمک و مساعدتی نسبت به اینجانب دریغ ننمودند، کمال تشکر و سپاسگذاری را دارم.

از جناب آقای دکتر بهمن غضنفری، استاد راهنما و جناب آقای دکتر علی بارانی، استاد مشاور، که با راهنمایی های ارزشمندشان همواره مرا مورد بذل عنایت خود قرار دادند، کمال تشکر و سپاسگذاری رادارم.

از جناب آقای دکتر احمد آهو قلندری و دکتر ناصر عباسی که داوری این پروژه را به عهده داشتند و زحمت مطالعه این پایان نامه را تقبل نمودند، سپاسگذارم.

در پایان از همه دوستان وعزیزانی که در به ثمر رساندن این پژوهش همراه من بودند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

با احترام

سمیه مهرنوش

فهرست مندرجات

چکیده :

نام خانوادگی: مهرنوش	**نام:** سمیه
عنوان پایان نامه: نگاشتهای حافظ تعامد تقریبی روی C^*- مدول ها	
استاد راهنما: دکتر امیر قاسم غضنفری و دکتر بهمن غضنفری	
استاد مشاور : دکتر علی بارا نی	
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته :** ریاضی محض **گرایش :** آنالیز **محل تحصیل(دانشگاه):** لرستان **دانشکده:** علوم پایه **گروه آموزشی:** ریاضی	
تاریخ فارغ التحصیلی: بهمن ماه ۱۳۸۸	**تعداد صفحه:** ۶۲

کلید واژه ها:

فارسی: هیلبرت C^*- مدول، تعامد تقریبی، نگاشت حافظ تعامد ، پایداری

انگلیسی:

Hilbert C-module; Approximately orthogonality; Orthogonality preserving mapping ; Stability*

چکیده: در این پژوهش نگاشتهای حافظ تعامد وحافظ تعامد تقریبی را در دستگاههای C^*- مدولها ی ضرب داخلی مورد مطالعه قرار داده ایم. به ویژه اگر V,W ، C^*- مدولهای ضرب داخلی روی C^*-جبر $\mathcal{A}$ باشند و این مطلب که هر مضرب اسکالر از یک طولپای $\mathcal{A}$-خطی ، یک نگاشت حافظ تعامد است، که البته عکس این مطلب به طور کلی برقرار نیست. مگر این که $\mathcal{A}$ شامل $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ (C^*-جبری از همه ی عملگرهای فشرده روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$) باشد. علاوه براین تخمینی از $\left\| < Tx,Ty > - \|T\|^{2} < x,y > \right\|$ برای نگاشت $\mathcal{A}$-خطی حافظ تعامد تقریبی $T:V \to W$ به دست می آوریم که V,W ، C^*- مدولهای ضرب داخلی روی C^*-جبری شامل $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ می باشند. همچنین در حالتی که $\mathcal{A}=\mathcal{K}(\mathcal{H})$ و V,W، هیلبرت باشند، ثابت می کنیم که یک نگاشت $\mathcal{A}$- خطی حافظ تعامد تقریبی را می توان به وسیله یک نگاشت $\mathcal{A}$-خطی حافظ تعامد تقریب زد.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

این فصل شامل تعاریف و قضایای مقدماتی می باشد. که در فصل های بعدی این رساله مورد استفاده قرار می گیرد.

۱.۱ فضای ضرب داخلی وفضای هیلبرت

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک فضای خطی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، یک نیم نرم یا شبه نرم[۱] روی X نگاشتی چون ρ از X به $\mathbb{F}$ است، به طوری که برای تمام $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ شرایط زیر برقرار باشد :

(۱) $\rho(x) \geq 0$

(۲) $\rho(\alpha x) = |\alpha| \rho(x)$

(۳) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

.نیم نرمی که واجد شرایط زیر باشد را نرم [۲] گوییم.

(۴) $x = 0 \Longleftrightarrow \rho(x) = 0$

تعریف ۲.۱.۱. نرم جبری (نیم نرم) روی $\mathcal{A}$ نرم (نیم نرم) ρ روی $\mathcal{A}$ است، به طوری که زیر ضربی باشد. به بیان دیگر:

(۵) $\rho(xy) \leqslant \rho(x)\rho(y)$

نرم را با $\|\cdot\|$ نشان می دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. فضای نرم دار X فضایی خطی است که یک نرم روی آن تعریف شده است. فضای نرم دار کامل یا فضای باناخ[۳]، فضایی است که هر دنباله کشی در آن همگرا است.

تعریف ۴.۱.۱. برای فضاهای خطی و نرم دار X و Yیک یکریختی خطی و طولپا[۴] از X به Y نگاشت خطی و دوسویی T از X به Y است، به طوری که برای هر $x \in X$، $\|Tx\| = \|x\|$.

---

[۱] Seminorm

[۲] Norm

[۳] Banach

[۴] Isometry

نمادگذاری. فرض کنید X و Y فضاهایی خطی و نرم دار روی میدان اسکالر یکسان $\mathbb{F}$ باشند $L(X,Y)$ را فضای همه نگاشتهای خطی از X به Y در نظر می گیریم. زیر فضای خطی $L(X,Y)$ که شامل همه نگاشتهای خطی کراندار (پیوسته) از X به Y است را با $B(X,Y)$ نشان می دهیم.

به طور معمول $B(X,Y)$ به عنوان یک فضای خطی نرم دار با نرم زیر معرفی می شود:

$$\| T \| = sup\{\| Tx \| : x \in X \ , \| x \| \leq ۱ \} \qquad (۱.۱.۱)$$

$B(X)$ را به جای $B(X,X)$ به کار می بریم. $B(X,\mathbb{F})$ با X^* نشان داده می شود و آن را فضای دوگان X می نامیم و عناصرش تابعک های خطی وپیوسته گفته می شوند .

می دانیم $B(X,Y)$ کامل است وقتی که Y کامل باشد. به ویژه فضای دوگان X^* از X همیشه کامل است.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید X یک فضای خطی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. یک ضرب داخلی روی X تابعی است مانند:

$$< .,. >: X \times X \longrightarrow \mathbb{F}$$

به طوری که برای هر $a,b \in \mathbb{F}$ و $x,y,z \in X$ داشته باشیم:

(۱) $< ax+by, z > = a < x,z > + b < y,z >$

(۲) $< x, ay+bz > = \overline{a} < x,y > + \overline{b} < x,z >$

(۳) $< x,y > = \overline{< y,x >}$

(۴) $< x,x > \geq ۰$

(۵) $< x,x > = ۰$ اگر وتنها اگر $x = ۰$

$< x,y >$ را ضرب داخلی x,y نامیم. تابع ضرب داخلی $< x,y >$ نسبت به متغیر x خطی ونسبت به متغیر y خطی - مزدوج است، به بیان دیگر برای هر $x,y,z \in X$ $\alpha \in \mathbb{F}$ داریم:

$$< x, y+z > = < x,y > + < x,z >$$

$$< x, \alpha y > = \overline{\alpha} < x,y >$$

تعریف ۶.۱.۱. فضای خطی X همراه با یک ضرب داخلی تعریف شده روی آن فضای ضرب داخلی[1] می شود.
بااستفاده از ضرب داخلی نرمی به صورت زیر روی فضا تعریف می شود:

$$\|x\| = < x, x >^{\frac{1}{2}}$$

تعریف ۷.۱.۱. یک فضای ضرب داخلی X را یک فضای هیلبرت[2] نامیم، هرگاه X نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی، باناخ (کامل) باشد. یک فضای هیلبرت به طور معمول را با $\mathcal{H}$ نشان می دهیم.

مثال ۱.۱.۱. $\mathbb{R}^n$ یک فضای هیلبرت است.

مثال ۲.۱.۱. $\mathbb{C}^n$ با ضرب داخلی

$$< x, y >= x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n}$$

که در آن $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ یک فضای ضرب داخلی و با نرم

$$\|x\| = \sqrt{| x_1 |^2 + | x_2 |^2 + \ldots + | x_n |^2}$$

که به وسیله ی ضرب داخلی تولید شده است، یک فضای نرم دار باناخ و در نتیجه هیلبرت می باشد.
همچنین فضای دنباله ای ℓ^2 متشکل از تمام دنباله های $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ از اسکالرهایی که در مورد آنها داریم $\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^2 < \infty$ با نرم $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^2)^{\frac{1}{2}}$ یک فضای باناخ و در نتیجه هیلبرت است. ℓ^2 را فضای دنباله ای هیلبرت گوییم.

همان طور که پیشتر گفته شد، همواره ضرب داخلی، نرمی روی فضا القا می کند. اما عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نمی باشد.
در قضیه ی زیرشرط لازم وکافی برای این که یک نرم، نرم القا شده به وسیله ضرب داخلی

[1] Innr product
[2] Hilbrt

باشد را بیان می کنیم.
اثبات قضیه زیر در [۳] بیان شده است .

قضیه ۱.۱.۱. نرم روی فضای خطی مختلط X به وسیله یک ضرب داخلی القا می شود اگر وفقط اگردر قانون متوازی الاضلاع[۱] صدق کند. به عبارت دیگر برای هر x,y داشته باشیم:

$$\|x+y\|^{۲}+\|x-y\|^{۲}=۲\|x\|^{۲}+۲\|y\|^{۲}$$

در این صورت ضرب داخلی توسط اتحاد قطبی [۲] به صورت زیر تعریف می شود:

$$<x,y>=\frac{۱}{۴}\sum_{k=0}^{۳} i^k\|x+i^k y\|^{۲} \qquad ,i=\sqrt{-۱}$$

۲.۱ جبر

تعریف ۱.۲.۱. یک جبر[۳] روی میدان $\mathbb{F}$ یک فضای خطی $\mathcal{A}$ روی $\mathbb{F}$ همراه با نگاشت $xy \longrightarrow (x,y)$ از $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ به توی $\mathcal{A}$ است، به طوری که برای هر $\alpha\in\mathbb{F}$ و $x,y,z\in\mathcal{A}$ شرایط زیر برقرار باشد :

(۱) $x(yz)=(xy)z$

(۲) $x(y+z)=xz+xy$ و $(x+y)z=xz+yz$

(۳) $(\alpha x)y=\alpha(xy)=x(\alpha y)$

تذکر ۱. نام کامل یک جبر، جبر شرکت پذیر خطی است، اما به خاطر سادگی تنها از کلمه جبر استفاده می کنیم.
۲) میدان $\mathbb{F}$ را میدان اسکالر جبر $\mathcal{A}$ می نامند. اگر $\mathbb{F}=\mathbb{R}$، $\mathcal{A}$ را جبر حقیقی و اگر $\mathbb{F}=\mathbb{C}$، آن را جبر مختلط می نامیم .

---
[۱] Parallelogram
[۲] Polarization identity
[۳] Algebra

تعریف ۲.۲.۱.

آ) فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر و $\|.\|$ یک نرم جبری روی $\mathcal{A}$ باشد در این صورت $(\mathcal{A}, \|.\|)$ را یک جبر نرم دار می گویند.

ب) $\mathcal{B}$ را یک زیر جبر از $\mathcal{A}$ می نامیم، هرگاه برای هر $b, b' \in \mathcal{B}$، $b.b' \in \mathcal{B}$.

ج) جبر $\mathcal{A}$ را کامل گویند، هرگاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد. هر جبر نرم دار کامل را یک جبر باناخ می گویند.

د) جبر $\mathcal{A}$ را یکانی گویند، هر گاه عضو ۱ در $\mathcal{A}$ موجود باشد، به طوری که به ازای هر عضو $a \in \mathcal{A}$، $a = ۱a = a۱$ و $\|۱\| = ۱$. ۱ را عضو یکانی جبر $\mathcal{A}$ می نامند.

تعریف ۳.۲.۱.

آ) فرض کنید $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ جبرهایی روی میدان اسکالر یکسان $\mathbb{F}$ باشند، یک همریختی [۱] از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ نگاشت $\varphi \in L(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ است ، به طوری که برای هر $x, y \in \mathcal{A}$:

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

به آسانی ثابت می شود که $Ker(\varphi)$ یک ایده آل در $\mathcal{A}$ است. همچنین $Im(\varphi) = \varphi(\mathcal{A})$ یک زیر جبر از $\mathcal{B}$ است.

ب) φ را یکانی نامند، هر گاه $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ یکانی باشند و $\varphi(۱) = ۱$.

تعریف ۴.۲.۱. یک هما نریختی [۲] بین فضاهای توپولوژیکی X و Y نگاشت دوسویی وپیوسته $T : X \longrightarrow Y$ است که معکوس آن نیز پیوسته است.

مثال ۱.۲.۱. فرض کنید S یک مجموعه ناتهی باشد. $\ell^{\infty}(S)$ را مجموعه ی تمام توابع مختلط مقدار کراندار روی S در نظر می گیریم. همچنین فرض کنید Ω یک فضای توپولوژیکی و $C_b(\Omega)$ مجموعه تمام توابع مختلط مقدار پیوسته کراندار روی Ω باشد. $C_b(\Omega)$ یک زیر جبربسته از $\ell^{\infty}(s)$ است و شامل تابع کراندار وپیوسته $f = ۱$ است، بنابراین یک جبر باناخ

[۱] Homomorphism
[۲] Homeomorphism

یکانی است.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید Ω یک فضای هاسدورف فشرده موضعی باشد. تابع پیوسته $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ در بی نهایت صفر می شود، اگر برای هر عدد مثبت ε مجموعه ی زیر فشرده باشد

$$\{\omega \in \Omega \ :| \ f(\omega) \ |\geq \varepsilon \ \}$$

مجموعه چنین توابعی را با $C_\circ(\Omega)$ نشان می دهیم. $C_\circ(\Omega)$ یک زیر جبر بسته از $C_b(\Omega)$ است، بنابراین یک جبر باناخ است .

تعریف ۵.۲.۱. جبرتقسیم، جبریکه ای (لزوماً جابه جایی نیست) است که هر عضو غیر صفر آن معکوس دارد.

۳.۱ مدول ها

تعریف ۱.۳.۱. هر گاه A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ و M یک زیر فضای خطی روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، M را $A-$ مدول چپ[1] گویند، اگر نگاشت $(a, m) \longrightarrow am$ از $A \times M$ به توی M وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) برای هر $a \in A$ ثابت، نگاشت $m \longrightarrow am$ روی M خطی باشد.

(۲) برای هر $m \in M$ ثابت، نگاشت $a \longrightarrow am$ روی A خطی باشد.

(۳) برای هر $a_1, a_2 \in A$ و $m \in M$ داشته باشیم: $a_1(a_2m) = (a_1a_2)m$.

نگاشت $(a, m) \longrightarrow am$ ضرب مدولی[2] نامیده می شود.

LeftA-module[1]
Module product[2]

$\mathcal{A}$– مدول راست نیز به طور مشابه تعریف می شود.

تعریف ۲.۳.۱. $\mathcal{A}$– مدول M یک زیر فضای خطی روی $\mathbb{F}$ است، هرگاه هم $\mathcal{A}$–مدول راست و هم $\mathcal{A}$– مدول چپ باشد و برای هر $a, b \in \mathcal{A}\,, m \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $a(mb) = (am)b$.

تعریف ۳.۳.۱. ۲ هرگاه $\mathcal{A}$ یک جبر نرم دار روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و M یک فضای خطی نرم دار روی $\mathbb{F}$ باشد، M را یک $\mathcal{A}$– مدول چپ نرم دار می نامند، هرگاه M یک $\mathcal{A}$ مدول چپ باشد ودر شرط (NLM) صدق کند.

(NLM) : یک ثابت k وجود دارد، به طوری که $(a \in \mathcal{A}, m \in M)$ $\quad \|am\| \leq k\|a\|.\|m\|$.

به طور مشابه $\mathcal{A}$– مدول نرم دار تعریف می شود.

تعریف ۴.۳.۱. یک $\mathcal{A}$– مدول چپ نرم دار را باناخ می گوییم، هرگاه به عنوان یک فضای خطی نرم دار، کامل باشد.

مثال ۱.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر نرم دار باشد.

(۱) ضرب روی $\mathcal{A}$ را می توان به عنوان ضرب مدولی در نظر گرفت، در این صورت $\mathcal{A}$ یک $\mathcal{A}$– مدول نرم دار خواهد بود.

(۲) هر ایده ال چپ از $\mathcal{A}$ ، $\mathcal{A}$– مدول چپ نرم دار و هر ایده ال راست یک $\mathcal{A}$– مدول راست نرم دار است. (با ضرب $\mathcal{A}$ که به عنوان ضرب مدولی منظور می شود) و هر ایده ال از $\mathcal{A}$ یک $\mathcal{A}$– مدول نرم دار است .

تذکر ۲.

(۱) اگر $\mathcal{A}$ یک جبر نرم دار و M یک $\mathcal{A}$–مدول چپ نرم دار باشد، آن گاه M^* (فضای دوگان M) با ضرب زیر یک $\mathcal{A}$–مدول راست باناخ است.

$$(fa)m = f(am) \qquad f \in M^*\,, m \in M,\; a \in A$$

(۲) اگر $\mathcal{A}$ یک جبر نرم دار و M یک $\mathcal{A}$–مدول راست نرم دار باشد، آن گاه M^* با ضرب زیر یک $\mathcal{A}$– مدول چپ باناخ است.

$$(af)(m) = f(am) \qquad f \in M^* \ , m \in M, \ a \in A$$

(۳) اگر $\mathcal{A}$ یک جبر نرم دار و M یک $\mathcal{A}$– مدول چپ (راست) نرم دار باشد، آنگاه M^{**}(فضای دوگان M^*) با ضرب های زیر یک $\mathcal{A}$– مدول چپ (راست) باناخ است.

$$(aF)f = f(Fa) \qquad F \in M^{**}, a \in \mathcal{A} \ , \ f \in M^*$$

$$(Fa)f = f(aF) \qquad F \in M^{**}, a \in \mathcal{A} \ , f \in M^*$$

$$(Fa)f = F(af) \qquad F \in M^{**}, a \in \mathcal{A} \ , \ f \in M^*$$

۴.۱ طیف و شعاع طیفی

تعریف ۱.۴.۱. عضو $a \in \mathcal{A}$ را معکوس پذیر گوییم، اگر b در $\mathcal{A}$ وجود داشته باشد، به طوری که $ab = ba = ۱$. مجموعه ی تمام اعضای معکوس پذیر $\mathcal{A}$ را با $Inv(\mathcal{A})$ نشان می دهیم. بنابراین:

$$Inv(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} : \ \exists b \in \mathcal{A} \qquad ab = ba = ۱\}$$

تعریف ۲.۴.۱. برای هر $a \in \mathcal{A}$ طیف[۱] a را که با $\sigma(a)$ نشان داده می شود، به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \lambda ۱ - a \ \notin Inv(\mathcal{A})\}$$

اثبات قضایای زیر را می توانید در [۱] بیابید در این بخش$\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبرهای یکانی هستند.

قضیه ۱.۴.۱. اگر $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ یک همریختی یکانی باشد. آنگاه $\varphi(Inv\mathcal{A}) \subseteq Inv(\mathcal{B})$ لذا $\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a)$.

Spectrum[۱]

مثال ۱.۴.۱. فرض کنید Ω هاسدورف و فشرده موضعی باشد و $\mathcal{A} = C(\Omega)$. در این صورت به ازای هر $f \in \mathcal{A}$ داریم:

$$\sigma(f) = f(\Omega).$$

گزاره ۱.۴.۱. فرض کنید a, b اعضایی از جبر یکانی $\mathcal{A}$ باشند. اگر $۱ - ab$ معکوس پذیر باشد، آنگاه $۱ - ba$ معکوس پذیر است و در نتیجه $\sigma(ab) - \{۰\} = \sigma(ba) - \{۰\}$.
زیرا اگر c معکوس $۱ - ab$ باشد ، یعنی $c(۱ - ab) = (۱ - ab)c = ۱$ آنگاه $۱ + bca$ معکوس $۱ - ba$ است.

قضیه ۲.۴.۱. فرض کنید a یک عضو از جبر یکانی $\mathcal{A}$ باشد. برای هر a در $\mathcal{A}$، $\sigma(a) \neq \varnothing$ و برای هر $p \in C[z]$ داریم $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$.

قضیه ۳.۴.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکانی و $\|a\| \leq ۱$ باشد، آنگاه $۱ - a$ معکوس پذیر است و $(۱ - a)^{-۱} = \sum_{n=۱}^{\infty} a^n$.

تعریف ۳.۴.۱. اگر a عضوی از جبر باناخ یکانی باشد. شعاع طیفی [۱] a به صور ت زیر تعریف می شود:

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$$

مثال ۲.۴.۱. فرض کنید $\mathcal{A} = C(\Omega)$ که Ω فضای هاسدورف و فشرده است، آنگاه برای هر $f \in \mathcal{A}$ داریم :

$$\sigma(f) = f(\Omega) \quad , \quad r(f) = \|f\|_\infty$$

Spectrum radius[1]

زیرا

$$r(f) = \sup_{\omega\in\Omega} | f(\omega) | = \|f\|_\infty$$

لم ۱.۴.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکانی و $a \in \mathcal{A}$. طیف $\sigma(a)$ از a یک زیر مجموعه ی بسته از گوی به مرکز مبدأ و شعاع $\|a\|$ در صفحه مختلط است و نگاشت $\begin{cases} \mathbb{C} - \sigma(a) \longrightarrow \mathcal{A} \\ \lambda \longrightarrow (a-\lambda)^{-1} \end{cases}$ مشتق پذیر است .

قضیه ۴.۴.۱. (قضیه برلینگ [1]) : اگر a یک عضو ازجبر باناخ یکانی $\mathcal{A}$ باشد، آنگاه:

$$r(a) = \inf_{n\geq 1} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\geq 1} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

۵.۱. همپیچی

اثبات قضایایی که در این بخش ذکر می شود ، در [۱] بیان شده است دراین بخش X یک فضای خطی و $\mathcal{A}$ جبری مختلط است .

تعریف ۱.۵.۱. یک همپیچی [2] خطی روی X نگاشت $x \longrightarrow x^*$ از X به X است که برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ در اصول زیر صدق می کند:

(۱)$(x+y)^* = x^* + y^*$

(۲)$(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$

(۳)$(x^*)^* = x$

اصل(۳) به این مطلب که هر همپیچی ، دوسویی است اشاره دارد.

تعریف ۲.۵.۱. همپیچی جبری یا به طور ساده تر همپیچی روی $\mathcal{A}$ یک همپیچی خطی روی $\mathcal{A}$ است که در اصل زیر صدق می کند.

$$(xy)^* = y^* x^*$$

---

[1] Bearling

[2] Involution