وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

عنوان :

اعداد احاطه‌ای فراگیر تام در گراف‌ها

استاد راهنما :
دکتر سید محمود شیخ‌الاسلامی

پژوهشگر :
نسرین دهگردی

شهریور / ۱۳۸۸
تبریز / ایران

بسم اللّٰه الرّحمن الرّحیم

به نام مادر

بوسه ای باید زد

دستهایی را که می‌شویند غبار خستگی

روزگار را و سیراب می‌کنند روح تشنه را

به نام پدر

بوسه ای باید زد

دستهایی را که می‌تابانند نیرو را و محکم

می‌کنند استواری پایه‌های زیستن را

تشکر و قدردانی

با استعانت از خداوند متعال که همواره پشتیبان همگان است، بر خود وظیفه می‌دانم تا از تمامی عزیزانی که راهگشای این پروژه بوده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم. امید است که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.

استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر سید محمود شیخ الاسلامی که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری و سخاوت در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا در انجام این پروژه همراهی کردند.

دکتر امجدی و دکتر رضاپور که داوری این پروژه را پذیرفتند.

سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام.

در نهایت بر خود وظیفه میدانم از خانواده عزیزم که یاور و مشوق همیشگی من در زندگی و به ویژه در دوران تحصیلاتم بوده‌اند تشکر نمایم.

برای تمام این عزیزان، سربلندی و موفقیت و سلامتی در تمام مراحل زندگی آرزو می‌کنم.

نسرین دهگردی

شهریور ۱۳۸۸

تبریز—ایران

فهرست مندرجات

چکیده

فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی با مجموعه رأس‌های V و مجموعه یال‌های E باشد. زیر مجموعهٔ $D\subseteq V(G)$ مجموعهٔ احاطه‌گر است، هرگاه هر رأس در $V-D$ مجاور با حداقل یک رأس در D باشد. عدد احاطه‌ای، $\gamma(G)$، مینیمم کاردینال مجموعه‌های احاطه‌گر در G است. مجموعهٔ احاطه‌گر همبند S از گراف $G=(V,E)$ را مجموعهٔ احاطه‌گر فراگیر همبند (CGD$-$مجموعه) در G نامند هرگاه S مجموعهٔ احاطه‌گر همبند در $\overline{G}$ نیز باشد. عدد احاطه‌ای فراگیر همبند، $\gamma_{cg}(G)$، مینیمم کاردینال مجموعه‌های احاطه‌گر فراگیر همبند در G است.

در این پایان نامه، مفهوم عدد احاطه‌ای فراگیر همبند یک گراف را مورد مطالعه قرار داده و کرانهایی را برای $\gamma_{cg}(G)$ بدست می‌آوریم. همچنین پارامترهای وابسته به آن را بررسی خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: مجموعهٔ احاطه‌گر، عدد احاطه‌ای، عدد احاطه‌ای فراگیر، عدد احاطه‌ای فراگیر تام، عدد احاطه‌ای همبند، عدد احاطه‌ای همبند فراگیر، عدد احاطه‌ای فراگیر همبند.

پیشگفتار

در برخی از کاربردهای نظریه گراف، برای مثال شبکه‌ها، اگر پارامتر $\mu(G)$ از یک گراف دارای اهمیت بیشتری باشد، مطالعهٔ تأثیر تغییرات مختلف گراف بر پارامتر مورد نظر حائز اهمیت است. در سالهای گذشته اعداد احاطه‌ای یک گراف و تغییرات برروی این عدد به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است.

مجموعهٔ احاطه‌گر $D \subseteq V(G)$ در گراف G را می‌توان به مجموعه‌ای که احاطه‌گر G و $\overline{G}$ است، تعمیم داد. مجموعهٔ تعمیم داده شده را مجموعهٔ احاطه‌گر فراگیر می‌نامند و برای اولین بار توسط سمپت‌کومار[۱] در سال ۱۹۸۹ معرفی گردید. سپس توسط بیریگام[۲] و داتون[۳] در سال ۱۹۹۰ گسترش داده شد.

در فصل اول این پایان نامه به ارائه تعاریف و مفاهیم مقدماتی می‌پردازیم. در فصل دوم کرانهایی برای عدد احاطه‌ای فراگیر و در فصل سوم کرانهایی برای عدد احاطه‌ای فراگیر تام و در فصل چهارم کرانهایی برای عدد احاطه‌ای همبند فراگیر بیان می‌کنیم و بالاخره در فصل آخر ضمن معرفی عدد احاطه‌ای فراگیر همبند کرانهایی برای آن بدست می آوریم.

---

[۱] Sampathkumar
[۲] Brigham
[۳] Dutton

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف ساده از مرتبه n و اندازه m باشد. گراف $\overline{G}$ را متمم گراف G می‌نامند هرگاه $V(G) = V(\overline{G})$ و $uv \in E(G)$ اگر و تنها اگر $uv \notin E(\overline{G})$.

فرض کنید $u, v \in V(G)$. در این‌صورت فاصلهٔ u و v، طول کوتاهترین مسیر بین u و v است. فاصلهٔ u و v با $d_G(u, v)$ نشان داده می‌شود. قطر G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{diam}(G) = \max_{u,v \in V(G)} d_G(u, v).$$

همسایگی باز رأس v از G، $N_G(v)$، مجموعه رئوسی از G است که با v مجاورند. به عبارت دیگر

$$N_G(v) = \{u \in V(G); uv \in E(G)\}.$$

همسایگی بستهٔ رأس v از G برابر است با $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. $|N_G(v)|$ را درجهٔ رأس v نامیده و با $\deg(v)$ نمایش می‌دهند. اگر $\deg(v) = ۰$، v را رأس منفرد و اگر $\deg(v) = ۱$، v را رأس پایانی می‌نامند. مینیمم و ماکزیمم درجه از رئوس گراف G را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نشان می‌دهند.

گراف‌های G و H را یکریخت می‌نامند هرگاه نگاشت دوسویی $f : V(G) \rightarrow V(H)$ وجود داشته باشد بطوریکه $uv \in E(G)$ اگر و تنها اگر $f(u)f(v) \in E(H)$. یکریختی از G و H را با $G \cong H$ نشان داده می‌شود. گراف G را خودمکمل می‌نامند هرگاه $G \cong \overline{G}$.

گراف G را دو بخشی می‌نامند هرگاه مجموعه رئوس $V(G)$ را بتوان به دو مجموعهٔ مستقل $V_۱$ و $V_۲$ افراز کرد بطوریکه هر یال G دارای یک انتها در $V_۱$ و یک انتها در $V_۲$ باشد. گراف G را دو بخشی کامل می‌نامند هرگاه به ازای هر $v \in V_۱$ و $u \in V_۲$، $uv \in E(G)$. هرگاه $|V_۱| = p$ و $|V_۲| = q$، آنگاه گراف دو بخشی کامل G را با $K_{p,q}$ نشان می‌دهند.

گراف G همبند است هرگاه بین هر دو رأس آن مسیری موجود باشد. اگر گراف G همبند نباشد، ناهمبند نامیده می‌شود.

درخت، گراف همبندی است که دور ندارد. رأس از درجه یک در درخت برگ نامیده می شود. گراف G را ستاره می‌نامند هرگاه $G \cong K_{۱,m}$ که در آن $m \geq ۱$. درخت T را ستاره مضاعف می‌نامند هرگاه شامل دو رأس مرکزی مانند u و v باشد بطوریکه هر رأس مرکزی با حداقل یک برگ مجاور باشد.

گراف k−منتظم، گرافی است که درجهٔ هر رأس آن برابر k است. گراف کامل، گرافی است که درجه هر رأس آن برابر $n - ۱$ است.

گراف H، زیرگراف G است هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. اگر $V(H) = V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$، آنگاه گراف H، زیرگراف فراگیر G است. گراف H، زیرگراف القایی از G است هرگاه زیرگراف G بوده و مجموعه یال‌های آن متشکل از یال‌هایی در G باشد که دو انتهای آن در $V(H)$ قرار دارند. زیرگراف القایی H از G را با $\langle H \rangle$ نشان می‌دهند.

پوشش رأسی از G، مجموعهٔ S از رئوس است بطوریکه هر یال از G، حداقل یک رأس انتهایی در S داشته باشد. عدد پوشش رأسی، $\alpha_۰(G)$، مینیمم کاردینال مجموعه‌های پوشش رأسی در G است.

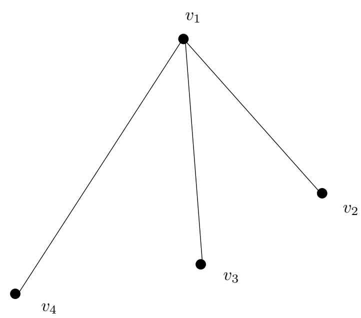
مجموعهٔ S از رئوس G، مستقل است هرگاه هیچ دو رأس از S مجاور نباشند. عدد استقلال، $\beta_۰(G)$، ماکزیمم کاردینال مجموعه‌های مستقل در G است.

یک k−رنگ آمیزی از گراف G، یک برچسب گذاری مانند $f : V(G) \rightarrow S$ است بطوریکه $|S| = k$. یک k−رنگ آمیزی از G مناسب است اگر رئوس مجاور برچسب‌های متفاوتی داشته باشند. گراف G، k−رنگ پذیر است اگر و فقط اگر k−رنگ آمیزی مناسب داشته باشد. عدد رنگی $\chi(G)$ کوچکترین k−ای است بطوریکه G k−رنگ پذیر باشد.

۲.۱ مجموعه‌های احاطه‌گر

مجموعهٔ $D \subseteq V(G)$ از رئوس گراف G را یک مجموعهٔ احاطه‌گر از G می‌نامند هرگاه هر رأس در $V - D$ باحداقل یک رأس از D مجاور باشد. عدد احاطه‌ای، $\gamma(G)$، مینیمم کاردینال مجموعه‌های احاطه‌گر در G است.

مثال ۱.۲.۱ مجموعهٔ $S = \{v_۱\}$ احاطه‌گر گراف شکل (۱) می‌باشد.



شکل۱

فرض کنید D یک مجموعهٔ احاطه‌گر از گراف G باشد و $x \in D$. رأس $v \in V - D$ همسایهٔ خصوصی x نسبت به D نامیده می‌شود هرگاه $N(v) \cap D = \{x\}$.

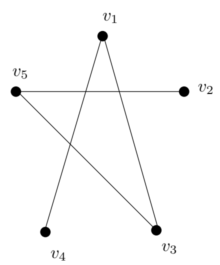
فصل ۲

عدد احاطه‌ای فراگیر یک گراف

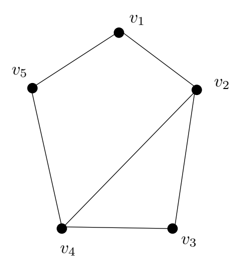
۱.۲ کرانهایی برای عدد احاطه‌ای فراگیر

تعریف ۱.۱.۲ مجموعهٔ احاطه‌گر D از G، یک مجموعهٔ احاطه‌گر فراگیر (GD$-$مجموعه) نامیده می‌شود هرگاه مجموعهٔ D یک مجموعه احاطه‌گر برای $\overline{G}$ نیز باشد. عدد احاطه‌ای فراگیر، $\gamma_g(G)$، مینیمم کاردینال مجموعه‌های احاطه‌گر فراگیر در G است.

مثال ۱.۱.۲ اگر G و $\overline{G}$ بترتیب گراف‌های نشان داده شده درشکل (۱) و (۲) باشند، آنگاه واضح است که مجموعهٔ $S = \{v_۱, v_۲, v_۵\}$ یک GD$-$مجموعه در گراف G است.



(1)



(2)

با توجه به تعریف قضیهٔ زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۱.۱.۲ مجموعهٔ احاطه‌گر D از رئوس G، یک مجموعهٔ احاطه‌گر فراگیر است اگر و تنها اگر برای هر رأس $v \in V - D$، رأس $u \in D$ وجود داشته باشد بطوریکه v مجاوربا u نباشد.

قضیه ۲.۱.۲ برای هرگراف G داریم،

۱) $\gamma_g(\overline{G}) = \gamma_g(G)$،

۲) $\gamma(G) \leq \gamma_g(G)$،

۳) $\frac{\gamma(G)+\gamma(\overline{G})}{2} \leq \gamma_g(G) \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G})$.

برهان.

۱) چون هر مجموعهٔ احاطه‌گر فراگیر G، یک مجموعهٔ احاطه‌گر فراگیر برای $\overline{G}$ است و بالعکس، (۱) نتیجه می‌شود.

۲) چون هر مجموعهٔ احاطه‌گر فراگیر G، یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای G است، لذا $\gamma(G) \leq \gamma_g(G)$.

۳) اگر D یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای G و $\overline{D}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای $\overline{G}$ باشد، آنگاه بوضوح $D \cup \overline{D}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر فراگیر برای G است و بنابراین $\gamma_g(G) \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G})$.

برای اثبات نامساوی طرف چپ، فرض کنید $\gamma(G) = \max\{\gamma(G), \gamma(\overline{G})\}$. در این‌صورت، بنابر (۲) خواهیم داشت

$$\frac{\gamma(G) + \gamma(\overline{G})}{2} \leq \gamma(G) \leq \gamma_g(G).$$

■

قضیه ۳.۱.۲

۱) فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد. در این‌صورت، $\gamma_g(G) = n$ اگر و تنها اگر $G = \overline{K_n}$ یا $G = K_n$،

۲) برای هر $m, n \geq ۱$، $\gamma_g(K_{m,n}) = ۲$،

۳) $\gamma_g(C_۴) = ۲$ و $\gamma_g(C_۵) = ۳$ و برای هر $n \geq ٦$، $\gamma_g(C_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$،

۴) $\gamma_g(P_۲) = ۲$ و $\gamma_g(P_۳) = ۲$ و برای هر $n \geq ۴$، $\gamma_g(P_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$.

برهان.

۱) چون $\overline{K_n}$، n رأس منفرد دارد لذا $\gamma_g(K_n) = \gamma_g(\overline{K_n}) = n$. فرض کنید $\gamma_g(G) = n$. گیرید حکم برقرار نباشد و $G \neq K_n, \overline{K_n}$. در این‌صورت یال $uv \in E(G)$ و رأس $w \in V(G)$ موجودند بطوریکه $vw \notin E(G)$. پس $V - \{v\}$ یک GD$-$مجموعه در G است و لذا $\gamma_g(G) \leq n - ۱$ و این یک تناقض است. پس $G = \overline{K_n}$ یا $G = K_n$.

۲) فرض کنید گراف $K_{m,n}$ دارای دو بخش X و Y با $|X| = m$ و $|Y| = n$ باشد. اگر $x \in X$ و $y \in Y$، دراین‌صورت $\{x, y\}$ یک GD$-$مجموعه در $K_{m,n}$ خواهد بود.

۳) دور $C_n = (v_۱, v_۲, ..., v_n, v_۱)$ با $n \geq ٦$ رأس را درنظر بگیرید. می‌دانیم که

$$\gamma(C_n) \geq \lceil \frac{n}{\Delta(G) + ۱} \rceil = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$$

بنابراین $\gamma_g(C_n) \geq \lceil \frac{n}{۳} \rceil$. حال فرض کنید

$$S = \begin{cases} \bigcup_{k=۱}^{\lceil \frac{n}{۳} \rceil - ۱} \{v_{۳k-۱}\} \cup \{v_n\} & n \equiv ۱ (\text{mod} \ \ ۳), \\ \bigcup_{k=۱}^{\lceil \frac{n}{۳} \rceil} \{v_{۳k-۱}\} & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

بوضوح S یک GD$-$مجموعه در C_n با $|S| = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$ است. بنابراین $\gamma_g(C_n) \leq \lceil \frac{n}{۳} \rceil$ که ایجاب می‌کند $\gamma_g(C_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$.

۴) اثبات این قسمت مشابه اثبات قسمت (۳) است. ■

قضیه ۴.۱.۲ فرض کنید S یک $\gamma(G)$—مجموعه باشد. اگر رأس v در $V-S$ وجود داشته باشد بطوریکه رأس v تنها با رئوس S مجاور باشد، آنگاه

$$\gamma_g(G) \leq \gamma(G) + ۱.$$

برهان. بوضوح $S \cup \{v\}$ یک GD—مجموعه در G است و این برهان را تمام می‌کند. ■

نتیجه ۱.۱.۲ فرض کنید G گرافی با یک رأس پایانی باشد، در این‌صورت $\gamma_g(G) \leq \gamma(G) + ۱$. به ویژه برای هر درخت این رابطه برقرار است.

قضیه ۵.۱.۲ برای هر گراف بدون رأس منفرد G از اندازه q،

$$\frac{۲q - n(n-۳)}{۲} \leq \gamma_g(G) \leq n - \beta_۰ + ۱.$$

برهان. فرض کنید S یک GD—مجموعه در G باشد. در این‌صورت هر رأس از $V-S$ حداقل با یک رأس از S مجاور نیست. بنابراین:

$$q \leq \frac{n(n-۱)}{۲} - n + \gamma_g(G).$$

رابطهٔ اخیر نتیجه می‌دهد

$$\frac{۲q - n(n-۳)}{۲} \leq \gamma_g(G).$$

حال فرض کنید B یک مجموعهٔ مستقل با $\beta_\circ$ رأس باشد. چون G رأس منفرد ندارد، $V-B$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر از G است. از طرف دیگر بوضوح به ازای هر $v \in B$، $(V-B)\cup\{v\}$ یک GD—مجموعه در G است. بنابراین

$$\gamma_g(G) \leq |V-B| + ۱ = n - \beta_\circ + ۱$$

و این برهان را تمام می‌کند. ■

از [۹] می‌دانیم که برای هر گراف بدون رأس منفرد G،

$$\alpha_\circ + \beta_\circ = n. \qquad (۱)$$

با توجه به کران بالای قضیهٔ ۵.۱.۲ و رابطهٔ (۱) نتیجهٔ زیر را خواهیم داشت:

نتیجه ۲.۱.۲ برای هر گراف بدون رأس منفرد G،

$$\gamma_g(G) \leq \alpha_\circ + ۱.$$

تعریف ۲.۱.۲ عدد احاطه‌ای مستقل گراف G مینیمم کاردینال مجموعه‌های احاطه‌گر مستقل در G است. عدد احاطه‌ای مستقل گراف G با $i(G)$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۶.۱.۲ برای هر گراف بدون رأس منفرد G،

۱) $\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_\circ$،

۲) $\gamma(G) + \gamma_g(G) \leq n + ۱$،

۳) $i(G) + \gamma_g(G) \leq n + ۱$.

برهان.

۱) بنابه تعاریف واضح است.

۲) چون $\gamma_g(G) \leq n - \beta_\circ + ۱$ و $\gamma(G) \leq \beta_\circ$، خواهیم داشت $\gamma(G) + \gamma_g(G) \leq n + ۱$.

۳) چون $\gamma_g(G) \leq n - \beta_\circ + ۱$ و $i(G) \leq \beta_\circ$، خواهیم داشت $i(G) + \gamma_g(G) \leq n + ۱$.

■

تعریف ۳.۱.۲ مجموعهٔ احاطه‌گر $D \subseteq V(G)$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر همبند (CD—مجموعه) در G نامیده می‌شود هرگاه زیرگراف القایی $\langle D \rangle$ در G همبند باشد. عدد احاطه‌ای همبند، $\gamma_c(G)$، مینیمم کاردینال مجموعه‌های احاطه‌گر همبند در G است.

قضیه ۷.۱.۲ برای هر گراف G حداقل یکی از گزاره‌های زیر درست است،

۱) $\gamma_c(G) \leq \gamma_g(G)$،

۲) $\gamma_c(\overline{G}) \leq \gamma_g(G)$.

برهان. فرض کنید D یک GD—مجموعه در G باشد. زیر گراف القایی $\langle D \rangle$ در G یا $\overline{G}$ همبند است. بنابراین D یک CD—مجموعه در G یا $\overline{G}$ است. ■

نتیجه ۳.۱.۲ برای هر گراف G حداقل یکی از گزاره‌های زیر درست است،

۱) $\gamma_c(G) \leq \alpha_\circ + ۱$،

۲) $\gamma_c(\overline{G}) \leq \alpha_\circ + ۱$.

برهان. بنابر نتیجهٔ ۲.۱.۲ و قضیهٔ ۷.۱.۲ برهان حاصل می‌شود. ■

قضیه ۸.۱.۲ برای هر گراف G،

$$\gamma_g(G) \leq \max\{\chi(G), \chi(\overline{G})\}.$$

برهان. فرض کنید $\chi(G) = m$ و $\chi(\overline{G}) = k$. بدون از دست دادن کلیت اثبات می‌توان فرض کرد $m \leq k$. گیرید $\{V_1, V_2, ..., V_m\}$ یک $\chi(G)$—افراز و $\{V'_1, V'_2, ..., V'_k\}$ یک $\chi(\overline{G})$—افراز باشند. بنابه تعریف هیچ دو رأسی از V_i نمی‌توانند به ازای j—ای به V'_j متعلق باشند و برعکس. از طرفی چون دو رأس در V_i در G مجاور نیستند بنابراین در $\overline{G}$ مجاورند. m رأس $v_1, v_2, ..., v_m$ را طوری انتخاب می‌کنیم که:

۱) برای هر $1 \leq i \leq m$، $v_i \in V_i$،

۲) $v_1, v_2, ..., v_m$ به مجموعه‌های مختلفی از $\{V'_1, V'_2, ..., V'_k\}$ تعلق داشته باشند. می‌توان فرض کرد برای هر $1 \leq j \leq m$، $v_j \in V'_j$.

فرض کنید برای هر $m + 1 \leq j \leq k$، $v_j \in V'_j$. واضح است که $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر $\overline{G}$ است. اینک k رأس $\{v_1, v_2, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_k\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای G است. بنابراین مجموعهٔ $\{v_1, v_2, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_k\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای G و $\overline{G}$ است. بنابراین

$$\gamma_g(G) \leq \max\{\chi(G), \chi(\overline{G})\} = k.$$

■

قضیه ۹.۱.۲ [۹]

۱) برای هر گراف G، $\chi(G) \leq \Delta(G) + ۱$.

۲) اگر G گراف همبندی باشد، بطوریکه گراف کامل نباشد و دور فرد نداشته باشد، آنگاه $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

نتیجهٔ زیر بلافاصله از قضایای ۸.۱.۲ و ۹.۱.۲ حاصل می‌شود.

نتیجه ۴.۱.۲ برای هر گراف G،

۱) $\gamma_g(G) \leq \max\{\Delta(G) + ۱, \Delta(\overline{G}) + ۱\} = \max\{n - \delta(G), n - \delta(\overline{G})\}$،

۲) اگر گراف G کامل نباشد و دور فرد نداشته باشد،

$$\gamma_g(G) \leq \max\{\Delta(G), \Delta(\overline{G})\} = \max\{n - \delta(G) - ۱, n - \delta(\overline{G}) - ۱\}.$$

تعریف ۴.۱.۲ مجموعهٔ $S \subseteq V(G)$ پُر نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $v \in S$، $N_G(v) \cap (V(G) - S) \neq \emptyset$. همچنین مجموعهٔ S، G−پُر نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $v \in S$، در G و $\overline{G}$، $N(v) \cap (V - S) \neq \emptyset$. عدد پُر گراف G ماکزیمم کاردینال مجموعه‌های پر در G است. عدد پُر در G را با $f = f(G)$ نشان می‌دهند. عدد G−پُر ماکزیمم کاردینال مجموعه‌های G−پُر در G است. عدد G−پُر در G را با $f_g = f_g(G)$ نشان می‌دهند. واضح است که $f_g(G) = f_g(\overline{G})$.

قضیه ۱۰.۱.۲ فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد. در این‌صورت $\gamma(G) + f = n$.

برهان. اگر S یک مجموعهٔ پُر با $|S| = f$ باشد، آنگاه $V(G) - S$ مجموعهٔ احاطه‌گر در G خواهد بود. بنابراین $n = |S| + |V(G) - S| \geq f + \gamma(G)$. حال فرض کنید $\gamma(G) < |V(G) - S|$ و $D \subseteq V(G) - S$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر در G با $|D| = \gamma(G)$ باشد. بنابراین $v \in V(G) - S$ موجود است بطوریکه v توسط D احاطه می‌گردد. بنابراین $N(v) \cap D \neq \emptyset$. پس $N(v) \cap (V(G) - S) \neq \emptyset$ و این با ماکزیمم بودن مجموعهٔ S در تناقض است. بنابراین $\gamma(G) = |V(G) - S|$ و $n = f + \gamma(G)$. ■

قضیه ۱۱.۱.۲ فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد. در این‌صورت $\gamma_g(G) + f_g = n$.

برهان. فرض کنید S یک GD–مجموعه در G و $v \in V(G) - S$. بنابراین در G و $\overline{G}$، $N(v) \cap S \neq \emptyset$. بنابراین $V(G) - S$ یک G–پُر است و $n - \gamma_g(G) = |V(G) - S| \leq f_g$. از طرف دیگر فرض کنید $D \subseteq V(G)$ یک G–پُر با $|D| = f_g$ است. بنابراین برای هر $v \in D$ در G و $\overline{G}$، $N(v) \cap (V(G) - D) \neq \emptyset$. که ایجاب می‌کند $V(G) - D$ یک GD–مجموعه در G است. بنابراین $\gamma_g(G) \leq |V(G) - D| = n - f_g$ و $\gamma_g(G) + f_g = n$. ■

نتیجه ۵.۱.۲ اگر مجموعهٔ $F \subseteq V(G)$ یک G–پُر باشد، بنابراین $\gamma_g(G) \leq n - |F|$. به ویژه اگر $T \ncong K_{1,m}$ درختی با مجموعه برگ‌های F باشد بنابراین مجموعهٔ F یک G–پُر است و $\gamma_g(G) \leq n - |F|$.

نتیجه ۶.۱.۲ برای هر گراف G، $f_g \leq f$.

برهان. از اینکه $\gamma(G) + f = n$ و $\gamma_g(G) + f_g = n$، خواهیم داشت $\gamma_g(G) + f_g = \gamma(G) + f$ و چون $\gamma(G) \leq \gamma_g(G)$، بنابراین $f_g \leq f$. ■

تعریف ۵.۱.۲ افراز $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ از مجموعهٔ رئوس $V(G)$، افراز دوماتیک (افراز دوماتیک فراگیر) G نامیده می‌شود هرگاه هر V_i مجموعهٔ احاطه‌گر (GD–مجموعه) باشد. عدد دوماتیک (عدد دوماتیک فراگیر) در G ماکزیمم مرتبه یک افراز دوماتیک (افراز دوماتیک فراگیر) است. عدد دوماتیک (عدد دوماتیک فراگیر) را با $d = d(G)$ ($d_g = d_g(G)$) نمایش داده می‌شود. واضح است که $d_g(G) = d_g(\overline{G})$.