بسم الله الرحمن الرحيم

١٥٢٦٨٨

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش محض

بررسی گراف های ناجابه جایی گروه های کوچک

استادان راهنما :

دکتر علی اکبر محمدی حسن آبادی

دکتر علیرضا عبدالهی

پژوهشگر:

سمیه محمدخانی

۱۳۸۷/۵/۲۸

اسفند ماه ۱۳۸۶

۱۵۲۶۸۸

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات
و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه
متعلق به دانشگاه اصفهان است.

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض خانم سمیه محمدخانی

تحت عنوان:

بررسی گرافهای ناجابجایی گروههای کوچک

در تاریخ ...۸۶/۱۲/۱۳..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالــی......... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر علی اکبر محمدی با مرتبه علمی استاد امضاء

۲- استاد راهنمای پایان نامه دکتر علیرضا عبدالهی با مرتبه علمی دانشیار امضاء

۳- استاد داور داخل گروه دکتر سعید اعظم با مرتبه علمی استاد امضاء

۴- استاد داور خارج گروه دکتر بیژن طائری با مرتبه علمی دانشیار امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

دانشگاه اصفهان ریاضی

تقدیم به

همسر عزیز و مهربانم

مرا کسی نساخت، خدا ساخت، نه آنچنان که کسی می خواست، که من کس نبودم،

کسم خدا بود کس بی کسان.

در باغ بی برگی زادم و در ثروت فقر غنی گشتم و ازچشمه ایمان سیراب شدم و در هوای دوست داشتن دم زدم و در آرزوی آزادی سر برداشتم و در بالای غرور قامت کشیدم و از دانش طعامم دادند و از شعر شرابم نوشاندند و از مهر نوازشم کردند تا حقیقت دینم شد و راه رفتنم و خیر حیاتم شد و کار ماندنم و زیبایی عشقم شد و بهانه زیستنم.

دکتر علی شریعتی

توجه ، عنایت و راهنماییهای اساتید ارجمند آقایان دکتر علیرضا عبدالهی و دکتر علی اکبر محمدی حسن آبادی اجرای این تحقیق را میسر نمود که از ایشان سپاسگزاری می نمایم.
همچنین از اساتید گرامی جناب آقای دکتر بیژن طائری و دکتر سعید اعظم که به عنوان اساتید داور زحمت بازبینی و تصحیح این پایان نامه را متقبل شدند. کمال تشکر و قدردانی را دارم.
از خانواده گرامی خود خصوصا پدر و مادر عزیزم که در تمامی ایام تحصیل همراه ومشوقم بوده اند، صمیمانه قدردانی می نمایم.

چکیده

در این پایان نامه گراف ناجابه جایی یک گروه را معرفی می کنیم. سپس درستی حدس زیر را برای خانواده ای از گروه ها ثابت می نماییم.

حدس : هرگاه G و H دو گروه ناآبلی متناهی بوده و گراف ناجابه جایی آن ها یک ریخت باشند آن گاه $|G| = |H|$.

همچنین ثابت می کنیم که حدس فوق در مورد گروه های از مرتبه ی کوچکتر از صد درست است، که مهم ترین هدف این پایان نامه می باشد. البته این حدس در حالت کلی درست نیست، در فصل آخر این پایان نامه یک مثال نقض ارائه شده است.

کلید واژه : گراف ناجابه جایی، مرکز گروه، مرکزی ساز.

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان نامه گراف ناجابه جایی یک گروه را معرفی می کنیم. این گراف اولین بار توسط اردوش[1] مورد بررسی قرار گرفت.

در فصل یک تعاریف و قضایایی مربوط به نظریه ی گروه ها و نظریه ی گراف را بیان می کنیم. در این فصل از منابع [۲]، [۶]، [۷]، [۸] و [۱۰] استفاده شده است.

سپس در فصل دو گراف ناجابه جایی یک گروه را تعریف می کنیم و قضایای مربوط به یکریختی گراف های ناجابه جایی و حدسی را که در این زمینه مطرح می شود، بیان می کنیم. این حدس به صورت زیر است:

حدس : هرگاه G و H دو گروه ناآبلی متناهی بوده و گراف ناجابه جایی آن ها یکریخت باشند آن گاه $|G|=|H|$.

در این فصل از منابع[۱]، [۳] و [۱۱] استفاده شده است.

در فصل سه نرم افزار GAP را معرفی کرده، سپس به کمک این نرم افزار برنامه ای می نویسیم و از داده های آن در بررسی درستی حدس فوق برای گروه های تا مرتبه صد استفاده می کنیم. در این فصل از منابع [۹] و [۱۲] استفاده شده است.

در فصل چهارم به بررسی درستی این حدس برای گروه های ناآبلی تا مرتبه صد می پردازیم.

در فصل پنجم یک مثال نقض در مورد عدم برقراری این حدس ارائه می دهیم. در این فصل از منابع [۴] و [۵] استفاده شده است.

1 P.Erdös

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل تعاریف و قضایای مربوط به نظریه‌ی گراف و نظریه‌ی گروه‌ها را می آوریم تا از آن ها در فصول بعدی استفاده کنیم.

۱—۱ تعاریف و قضایای مربوط به نظریه‌ی گروه‌ها

در این بخش ابتدا چند نمادگذاری انجام می‌دهیم. در سرتاسر این پایان نامه G یک گروه است و نمادهای D_{2n} و S_n و A_n به ترتیب برای گروه‌های دو وجهی از مرتبه $2n$ ، گروه متقارن روی n حرف و گروه متناوب روی n حرف به کارمی‌رود. نماد Q_{2^n} برای گروه چهارگان های 2^n عضوی و نماد C_n برای گروه دوری از مرتبه‌ی n به کار می‌رود.

P برای نمایش یک $p-$ گروه به کار می‌رود که در آن p یک عدد اول است .

تعریف ۱.۱ . فرض کنیم F یک میدان و n عددی طبیعی باشد. مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس های معکوس پذیر $n \times n$ را که درایه‌های هریک از آن‌ها در F اند، با $GL(n,F)$ نمایش می‌دهیم، که با ضرب ماتریس ها تشکیل یک گروه می‌دهد و آن را گروه خطی عام از درجه‌ی n بر F می‌نامیم .

تعریف ۲.۱ . مجموعه‌ی همه‌ی اعضایی از $GL(n,F)$ که دترمینان آن‌ها برابر ۱ است، زیرگروه نرمالی از $GL(n,F)$ است. این زیرگروه را با $SL(n,F)$ نشان می‌دهیم و آن را گروه خطی خاص از درجه‌ی n بر F می نامیم .

تعریف ۳.۱ . گروه $\frac{SL(n,F)}{Z(SL(n,F))}$ را گروه خطی خاص تصویری می‌نامیم و آن را با $PSL(n,F)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱ . فرض کنیم G یک گروه، و p یک عدد اول باشد. گروه G را یک $p-$ گروه می‌نامیم در صورتی که مرتبه‌ی هر عضو غیر بدیهی G توان مثبتی از p باشد. زیر گروه H از G را یک $p-$ زیرگروه G گوییم در صورتی که H یک $p-$ گروه باشد.

تعریف ۵.۱ . فرض کنیم G و H دو گروه دلخواه باشند. زیر مجموعه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم :

$$G \times H = \{(g,h) : g \in G, h \in H\}$$

عمل ضرب زیر را در $G \times H$ چنین تعریف می‌کنیم :

$$(g,h)(g',h') = (gg',hh')$$

که $g, g' \in G$ و $h, h' \in H$. با این عمل ضرب، $G \times H$ گروه است. این گروه را حاصل ضرب مستقیم G و H می‌نامیم.

در حالت کلی، اگر G_1 ، G_2 ،...، G_r گروه باشند، حاصل ضرب مستقیم $G_1 \times G_2 \times ... \times G_r$ عبارت است از :

$$\{(g_1, g_2, ..., g_r) : g_i \in G_i, 1 \le i \le r\}$$

اگر همه‌ی G_i ها متناهی باشند، $G_1 \times G_2 \times ... \times G_r$ نیز متناهی است و مرتبه‌ی آن برابر است با $|G_1| \times |G_2| \times ... \times |G_r|$.

تعریف ۶.۱ . فرض کنیم $x, y \in G$. گوییم x مزدوج y در G است اگر به ازای عضوی چون $g \in G$ داشته باشیم :

$$y = g^{-1}xg$$

مجموعه‌ی تمام عناصری که با x در G مزدوج‌اند عبارت است از :

$$x^G = \{g^{-1}xg \ : \ g \in G\}$$

این مجموعه را رده‌ی مزدوجی x در G می‌نامند.

تعریف ۷.۱ . فرض کنیم H و K دو گروه دلخواه باشند و $\phi \ : \ H \longrightarrow K$ یک همریختی باشد، روی مجموعه‌ی $H \times K$ عمل $*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(h_1, k_1) * (h_2, k_2) = (h_1 h_2, (k_1 \phi_{h_2} k_2))$$

که در آن $\phi_{h_2} : K \longrightarrow K$, $k_1\phi_{h_2} = k_1^{h_2}$ تابعی است که هر عضو K را به مزدوجش نسبت به h_2 تصویر می‌کند. دراین صورت $(H \times K, *)$ یک گروه است. این گروه را حاصل ضرب نیم مستقیم H و K با عمل ϕ می‌نامیم و آن را با $K \times_\phi H$ نشان

می‌دهیم. گاهی می‌گوییم گروه H بر گروه K با ϕ عمل می‌کند.

اگر در حاصل ضرب نیم مستقیم در مورد عمل ϕ ابهامی پیش نیاید از نوشتن آن صرف نظر می‌کنیم و به جای $K \times_\phi H$ می‌نویسیم $K \rtimes H$ یا $K : H$.

تعریف ۸.۱ . گیریم $x \in G$. مرکز ساز x در G، که آن را با $C_G(x)$ نشان می‌دهند، عبارت است از مجموعه عناصری از G که با x جابه‌جا می‌شوند، یعنی :

$$C_G(x) = \{g \in G \ : \ xg = gx\}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $C_G(x)$ زیر گروه G است. مشاهده می‌شود که $x \in C_G(x)$ و در واقع به ازای هر $x \in G$، $< x > \subseteq C_G(x)$.

قضیه ۹.۱ . فرض کنیم $x \in G$. در این صورت تعداد عناصر رده‌ی مزدوجی x^G برابر است با :

$$|x^G| = |G : C_G(x)|$$

که اگر G متناهی باشد $|x^G| = |G|/|C_G(x)|$ می باشد، لذا $|x^G|$ مرتبه‌ی گروه G را عاد می‌کند.

برهان . ابتدا توجه کنید که به ازای $g, h \in G$،

$$\begin{aligned} g^{-1}xg = h^{-1}xh &\Longleftrightarrow hg^{-1}x = xhg^{-1} \\ &\Longleftrightarrow hg^{-1} \in C_G(x) \\ &\Longleftrightarrow C_G(x)g = C_G(x)h \end{aligned}$$

با استفاده از این رابطه می‌توانیم تابعی یک به یک چون f از x^G به مجموعه‌ی هم مجموعه های راست $C_G(x)$ در G به صورت زیر تعریف کنیم :

$$f\ : g^{-1}xg \longrightarrow C_G(x)g \qquad g \in G$$

به وضوح دیده می‌شود که f پوشاست. بنابراین f دوسویی است و لذا $|x^G| = |G : C_G(x)|$.■

معادله‌ی رده‌ای : فرض کنیم x_1 ، x_2 ،...، x_t نماینده‌های رده‌های مزدوجی G باشند. در این صورت :

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} |x_i^G|$$

که در آن $|x_i^G| = |G : C_G(x_i)|$، و $|Z(G)|$ و $|x_i^G|$ مرتبه‌ی G را عاد می‌کنند.

تعریف ۱۰.۱ . گروه G را یک AC — گروه گوییم هرگاه برای هر $g \in G\backslash Z(G)$، مرکز ساز g آبلی باشد. بالاخص اگر G آبلی باشد آن گاه G ، یک AC — گروه است.

تعریف ۱۱.۱ . گروه G را چند دوری گوییم، هرگاه یک سری با عوامل دوری داشته باشد. پس گروه G چند دوری است، هرگاه سری

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \dots \trianglerighteq G_n = \{1\}$$

وجود داشته باشد که به ازای هر $i = 0, 1, \dots, n-1$، G_i/G_{i+1} دوری است. به گروه های چند دوری یک PC — گروه گوییم.

لم ۱۲.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت اگر $G/Z(G)$ دوری باشد آن گاه G آبلی است.

برهان . بنا به فرض به ازای برخی $aZ(G) \in G/Z(G)$ داریم :

$$G/Z(G) =< aZ(G) >= \{a^n Z(G) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

در این صورت $G = \cup_{n\in\mathbb{Z}} a^n Z(G)$. اکنون فرض کنیم g_1 و g_2 دو عنصر دلخواه و

متمایز G باشند. در این صورت به ازای برخی اعداد صحیح i و j، $g_1 \in a^i Z(G)$ و $g_2 \in a^j Z(G)$. لذا :

$$\exists\, z_1, z_2 \in Z(G) \quad s.t \quad g_1 = a^i z_1 \ , \ g_2 = a^j z_2$$

و در نتیجه :

$$g_1 g_2 = a^i z_1 a^j z_2 = a^{i+j} z_1 z_2 = a^{j+i} z_2 z_1 = a^j z_2 a^i z_1 = g_2 g_1$$

لذا G آبلی است.■

تعریف ۱۳.۱ . فرض کنیم که $m > 2$، در این صورت گروه دووجهی D_{2m} دارای نمایش زیر است :

$$D_{2m} = < x, y \mid x^m = y^2 = 1, y^{-1} x y = x^{-1} >$$

در نتیجه گروه D_{2m} دارای اعضایی به شکل $x^i y^j$ است که در آن $j = 0, 1$ و $i = 0, 1, ..., m-1$.

قضیه ۱۴.۱ . فرض کنید $G = D_{2m}$. در این صورت :

(۱) اگر m فرد باشد آن گاه $|Z(G)| = 1$.

(۲) اگر m زوج باشد آن گاه $|Z(G)| = 2$.

برهان . فرض کنیم $x^i y^j \neq x^\circ y^\circ = \{e\}$ و $x^i y^j \in Z(G)$. در این صورت $m \nmid i$ یا $2 \nmid j$.

اگر $m \nmid i$ آن گاه $x^i y^j$ به یکی از دو صورت زیر است :

$$x^i y^j = \begin{cases} x^i & 2 \mid j \\ x^i y & 2 \nmid j \end{cases}$$

حالت اول : اگر $x^i \in Z(G)$، آن گاه x^i با هر عضو G از جمله با y جابه‌جا می‌شود، در این صورت :

$$x^i y = yx^i \Longrightarrow y^{-۱}x^i y = x^i \Longrightarrow x^{-i} = x^i \Longrightarrow x^{۲i} = ۱$$

در نتیجه $m|۲i$. اگر m فرد باشد چون $(m, ۲) = ۱$ بنابراین $m|i$ که تناقض است زیرا $\circ < i < m$. اگر m زوج باشد آن گاه $۲i = mk$ ولی از آن جا که $i < m$ پس باید $k < ۲$ لذا k بایستی برابر ۱ و در نتیجه $i = \frac{m}{۲}$. یعنی تنها امکان برای آن که x^i در $Z(G)$ باشد آن است که $i = \frac{m}{۲}$.

حالت دوم : اگر $x^i y \in Z(G)$، آن گاه با هر عضو G به خصوص با x جابه‌جا می شود، در این صورت $x^i yx = xx^i y$ و لذا $yx = xy$ که تناقض است.

اگر $۲ \nmid j$، آن گاه $x^i y^j$ به یکی از دو صورت زیر است :

$$x^i y^j = \begin{cases} y & m|i \\ x^i y & m \nmid i \end{cases}$$

حالت اول : اگر $y \in Z(G)$، آن گاه y با هر عضو G از جمله با x جابه‌جا می‌شود، در این صورت $xy = yx$ که تناقض است.

حالت دوم : اگر $x^i y \in Z(G)$، آن گاه با هر عضو G به خصوص با x جابه‌جا می‌شود، در این صورت $x^i yx = xx^i y$ و لذا $yx = xy$ که تناقض است.

بنابراین اگر m فرد باشد، $Z(G) = \{۱\}$ و اگر m زوج باشد، $Z(G) = \{۱, x^{\frac{m}{۲}}\}$. ■

لم ۱۵.۱ . فرض کنید $G = D_{۲m}$. در این صورت :

الف) اگر m فرد باشد، آن گاه عضوی غیر مرکزی چون b در G وجود دارد به طوری که $|C_G(b)| = ۲$.

ب) اگر m زوج باشد، آن گاه عضوهایی غیر مرکزی چون b', b'' در G وجود دارد به طوری که $|C_G(b')| = ۴$ و $|C_G(b'')| = m$.

برهان . بنابر تعریف ۸.۱، $< x > \subseteq C_G(x)$. ثابت می‌کنیم $C_G(x) \subseteq < x >$. هر عضو در $C_G(x)$ به یکی از دو صورت x^i و $x^i y$ می‌باشد. اگر $x^i y \in C_G(x)$، آن گاه :

$$x^i y x = x x^i y \Longrightarrow yx = xy \Longrightarrow x^۲ = ۱$$

که تناقض است زیرا $m > ۲$. بنابراین $x^i \in C_G(x)$ می‌باشد. در نتیجه :

$$C_G(x) = \{۱, x, x^۲, ..., x^{m-۱}\} =< x >$$

حال عضو غیر مرکزی y را در نظر می‌گیریم. بنابر تعریف ۸.۱ $< y >= \{۱, y\} \subseteq C_G(y)$. هر عضو در $C_G(y)$ به یکی از دو صورت x^i و $x^i y$ می‌باشد. اگر y بخواهد با $x^i y$ جابه‌جا شود معادل با این است که با x^i جابه جا شود، بنابراین داریم :

$$x^i y = y x^i \Longrightarrow y^{-۱} x^i y = x^i \Longrightarrow x^{-i} = x^i \Longrightarrow x^{۲i} = ۱$$

در نتیجه $m | ۲i$. دو حالت در نظر می‌گیریم :

اگر m فرد باشد چون $(m, ۲) = ۱$ بنابراین $m | i$ که تناقض است زیرا $۰ < i < m$. لذا در این حالت $C_G(y) = \{۱, y\}$.

اگر m زوج باشد آن گاه $i = \frac{m}{۲}$، لذا در این حالت $C_G(y) = \{۱, y, x^{\frac{m}{۲}}, x^{\frac{m}{۲}} y\}$.

و برهان کامل می‌شود.■

قضیه ۱.۱۶ . اگر m فرد باشد، آن گاه $D_{4m} \cong D_{2m} \times C_2$.

برهان . داریم :

$$D_{4m} =< a, b \mid a^{2m} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} >$$

$$D_{2m} =< c, d \mid c^m = d^2 = 1, d^{-1}cd = c^{-1} >$$

که m فرد است. عناصر $D_{2m} \times C_2$ عبارت اند از :

$$(c^i d^j, (-1)^k)$$

که $0 \leq i \leq m-1$، $0 \leq j \leq 1$ و $0 \leq k \leq 1$. قرار می‌دهیم $x = (c^{\frac{(m+1)}{2}}, -1)$ و $y = (d, 1)$. آن گاه داریم :

$$x^{2m} = y^2 = 1 \ , \ y^{-1}xy = x^{-1}$$

حال تابع $f : D_{4m} \longrightarrow D_{2m} \times C_2$ با ضابطه‌ی :

$$f : a^i b^j \longrightarrow x^i y^j \qquad (0 \leq i \leq 2m-1, 0 \leq j \leq 1)$$

را تعریف می‌کنیم. ابتدا ثابت می‌کنیم f خوش تعریف است. فرض کنیم $a^i b^j, a^{i'} b^{j'} \in D_{4m}$ که $0 \leq i, i' \leq 2m-1$ و $0 \leq j, j' \leq 1$. چهار حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول : فرض کنیم $j = 0, j' = 0$. در این صورت اگر $a^i = a^{i'}$، آن گاه $a^{i-i'} = 1$ و در نتیجه $2m | i - i'$. از طرفی چون x از مرتبه‌ی $2m$ و $i - i'$ نیز مضربی از $2m$ است، می‌توان نوشت $x^{i-i'} = 1$ و در نتیجه :

$$x^i = x^{i'} \Longrightarrow f(a^i) = f(a^{i'})$$

حالت دوم : فرض کنیم $j = 0, j' = 1$. در این صورت تساوی $a^i = a^{i'} b$ امکان پذیر

نیست.

حالت سوم : فرض کنیم $j = ۱, j' = ۰$. در این صورت تساوی $a^ib = a^{i'}$ امکان پذیر نیست.

حالت چهارم : فرض کنیم $j = ۱, j' = ۱$. در این صورت اگر $a^ib = a^{i'}b$، آن گاه $a^i = a^{i'}$. لذا داریم $a^{i-i'} = ۱$ و در نتیجه $۲m|i - i'$. از طرفی چون x از مرتبه‌ی $۲m$ و $i - i'$ نیز مضربی از $۲m$ است، می‌توان نوشت $x^{i-i'} = ۱$ و در نتیجه :

$$x^i = x^{i'} \Longrightarrow x^iy = x^{i'}y \Longrightarrow f(a^ib) = f(a^{i'}b)$$

برای اثبات همریختی تابع f نیز چهار حالت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $a^ib^j, a^{i'}b^{j'} \in D_{۴m}$ که $۰ \leq i, i' \leq ۲m - ۱$ و $۰ \leq j, j' \leq ۱$.

حالت اول : فرض کنیم $j = ۰, j' = ۰$. در این صورت داریم :

$$f(a^ia^{i'}) = f(a^{i+i'}) = x^{i+i'} = x^ix^{i'} = f(a^i)f(a^{i'})$$

حالت دوم : فرض کنیم $j = ۰, j' = ۱$. در این صورت داریم :

$$f(a^ia^{i'}b) = f(a^{i+i'}b) = x^{i+i'}y = x^ix^{i'}y = f(a^i)f(a^{i'}b)$$

حالت سوم : فرض کنیم $j = ۱, j' = ۰$. این حالت مشابه حالت قبل است.

حالت چهارم : فرض کنیم $j = ۱, j' = ۱$. در این صورت داریم :

$$f(a^iba^{i'}b) = f(a^ib^{-۱}a^{i'}b) = f(a^ia^{-i'}) = f(a^{i-i'}) = x^{i-i'}$$

$$= x^ix^{-i'} = x^iy^{-۱}x^{i'}y = x^iyx^{i'}y = f(a^ib)f(a^{i'}b)$$

لذا f همریختی است.

چون $Im(f) =< x, y >$ پس $Im(f)$ شامل $x^m = (۱, -۱)$ و $x^۲ = (c, ۱)$ است و لذا

$Im(f) = D_{2m} \times C_2$. از آن جا که $|D_{4m}| = |D_{2m}| \times |C_2|$، نتیجه می‌گیریم که f یکریختی است.

به عنوان اثباتی دیگر می‌توان قرار داد :

$$G = D_{4m} \ , \ K = Z(G) = < x^m > = \{1, x^m\} \ , H = < x^2, y >$$

در این صورت شاخص H در G برابر ۲، لذا H در G نرمال است. از طرفی یک‌ریخت با گروه D_{2m} است. همچنین $H \cap K = \{1\}$ و $|HK| = 4m$. در نتیجه $G = HK$. ■

تعریف ۱.۱۷ . فرض کنیم که $n > 2$، در این صورت گروه چهارگان های تعمیم یافته Q_{2^n} دارای نمایش زیر است :

$$G = < x, y | x^{2^{n-1}} = 1, y^2 = x^{2^{n-2}}, y^{-1}xy = x^{-1} >$$

در نتیجه گروه Q_{2^n} دارای اعضایی به شکل x^iy^j است که در آن $j = 0, 1$ و $i = 0, 1, ..., 2^{n-1} - 1$.

قضیه ۱.۱۸ . فرض کنید $G = Q_{2^n}$. در این صورت $|Z(G)| = 2$.

برهان . فرض کنیم $x^iy^j \neq x^\circ y^\circ = \{e\}$ و $x^iy^j \in Z(G)$. در این صورت $2^{n-1} \nmid i$ یا $2 \nmid j$.

اگر $2^{n-1} \nmid i$، آن گاه x^iy^j به یکی از دو صورت زیر است :

$$x^iy^j = \begin{cases} x^i & 2 | j \\ x^iy & 2 \nmid j \end{cases}$$

حالت اول : اگر $x^i \in Z(G)$، آن گاه x^i با هر عضو G از جمله با y جابه‌جا می‌شود، در این صورت :

$$x^iy = yx^i \Longrightarrow y^{-1}x^iy = x^i \Longrightarrow x^{-i} = x^i \Longrightarrow x^{2i} = 1$$