بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

توان‌های هادامارد و ماتریس‌های تمام مثبت

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

شهلا پورمحمدی

استاد راهنما

دکتر سید محمود منجگانی

اسفند ماه ۹۳

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض خانم شهلا پورمحمدی

تحت عنوان

توان‌های هادامارد و ماتریس‌های تمام مثبت

در تاریخ ۱۷ / ۱۲ / ۱۳۹۳ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تایید نهایی قرار گرفت.

۱) استاد راهنما دکتر سید محمود منجگانی

۲) استاد مشاور دکتر فرید بهرامی

۳) استاد داور۱ دکتر محمدرضا کوشش

۴) استاد داور۲ دکتر مهدی نعمتی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر فرید بهرامی

تقدیر و تشکر...

سپاس خداوند حکیم را که با لطف بیکران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه ی خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود آقای دکتر سید محمود منجگانی تشکر و قدردانی کنم که قطعا بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

سپس از استاد مشاورم جناب دکتر فرید بهرامی که همواره با رویی گشاده با من برخورد می کردند و زحمت بازبینی تصحیح پایان نامه را به عهده گرفتند سپاس گزاری می نمایم.

از اساتید گرانقدر آقایان دکتر مهدی نعمتی و دکتر محمدرضا کوشش که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را قبول کردند سپاس گزاری می نمایم.

در پایان بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا ستایش می کنم وجود مقدسشان را و تشکر می کنم از همسر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

شهلا پورمحمدی

اسفند ماه ۱۳۹۳

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا مفاهیم مختلف مثبت بودن ماتریس‌ها را ارائه می‌دهیم. آنگاه به بررسی خواص آن‌ها با ذکر مثال می‌پردازیم. هدف اصلی ما در این پایان‌نامه معرفی ماتریس‌های تمام مثبت (TP) و در نهایت ماتریس‌های نامنفی (TN) می‌باشد. همچنین معرفی برخی خواص ماتریس‌های تمام مثبت و تمام نامنفی و ماتریس‌هایی که تحت توان هادامارد تمام مثبت و تمام نامنفی باقی می‌مانند را ارائه خواهیم کرد. ارائه مثال‌هایی که از این خاصیت پیروی نمی‌کنند نیز از نتایج این پایان‌نامه است.

واژه‌های کلیدی

حاصلضرب هادامارد، توان‌های هادامارد، ماتریس‌های تمام نامنفی، ماتریس‌های تمام مثبت، ماتریس‌های نامنفی مضاعف، ماتریس‌های مثبت مضاعف

رده بندی موضوعی: $۱۵A۱۵, ۱۵A۴۸, ۱۵A۵۷$

فصل ۱

مقدمه

تصور از مثبت بودن در بحث‌های مختلف ریاضیات وجود دارد، عنصر مثبت، اعداد مثبت و ماتریس‌های مثبت. هنگامی که بحث از مثبت بودن ماتریس می‌شود، این سوال مطرح می‌شود که منظور از یک ماتریس مثبت چیست؟

ساده‌ترین تعریف برای مثبت بودن یک ماتریس این است که هر درایه‌ی آن مثبت باشد. این تعریف تا حد زیادی نیاز ما را در علوم مهندسی برطرف می‌کند. با خواص بیشتر این نوع مثبت بودن در بخش‌های بعدی آشنا خواهیم شد. تعاریف دیگری نیز برای مثبت بودن یک ماتریس وجود دارد که هر کدام کاربرد خاص خودش را در بخش‌های مختلف دارد.

در این پایان‌نامه سعی می‌کنیم تعاریف مختلف مثبت بودن ماتریس که تاکنون مطرح شده‌اند را بیان نماییم. یکی از تعاریف مثبت بودن، ماتریس تمام مثبت می‌باشد که کاربرد زیادی در سایر زمینه‌ها دارد. ممکن است مفهوم ماتریس‌های تمام مثبت ساختگی به نظر آید، هر چند که این دسته از ماتریس‌ها در کاربردهای مهم و گوناگون رخ می‌دهد. به عنوان مثال ماتریس‌های تمام مثبت (تمام نامنفی) در آمار [۲۱، ۱۹، ۱۸] ، ریاضی زیستی [۱۸] ، ترکیبات [۲۹، ۱۵، ۳، ۲] ، دینامیک [۱۳] ،نظریه اندازه [۳۰، ۱۸، ۵] ، نظریه عملگرها [۳۱] و هندسه [۳۲] کاربرد دارند. تاریخچه‌ی نظریه‌ی ماتریس‌های

تمام مثبت به کارهایی از گاندمجر و کرین [۱۲] ، برمی‌گردد که به طور دقیق در [۱۳] آمده است . یکی از اهداف اصلی این پایان‌نامه معرفی و بررسی خواص این نوع ماتریس‌ها می‌باشد. سوال دیگری که مطرح می‌شود این است که کدام یک از مفاهیم مثبت بودن تحت اعمال روی ماتریس‌ها، نظیر جمع، ضرب معمولی و ضرب هادامارد حفظ می‌شوند. همچنین چه نوع توابعی حافظ مثبت بودن ماتریس‌ها هستند، به این مفهوم که اگر A یک ماتریس مثبت باشد آن‌گاه $f(A)$ مثبت است. در بخش‌های بعدی بیان خواهیم کرد که اگر f یک تابع حقیقی باشد آن‌گاه چگونه $f(A)$ را تعریف می‌کنیم. در فصل دوم این پایان‌نامه به بیان ماتریس‌ها خواص آن و اعمال مربوط به ماتریس‌ها یعنی، حاصلضرب معمولی، حاصلضرب هادامارد و طیف آن‌ها که در فصل‌های آینده مورد نیاز است می‌پردازیم.

در فصل سوم معانی و تعاریف مختلف مثبت بودن ماتریس‌ها و خواص آن‌ها را با ذکر مثال می‌آوریم. این فصل بر اساس [۲۴، ۶] نوشته شده است.

در فصل چهارم قضایا و تعاریف مختلف ماتریس‌های مثبت (TP و TN) را همراه با خواص آن‌ها بررسی می‌کنیم. در نهایت در فصل پنجم نتایج حاصل از این نوع ماتریس‌ها و کاربردهای آن را، بیان می‌کنیم.

فصل ۲

پیش نیازها

مفهوم ماتریس برای اولین بار توسط آرتور کیلی در سال ۱۸۵۸ ارائه شد. آن زمان مسائل کاربردی از اهمیت بیشتری برخوردار بود لذا ماتریس‌ها مورد توجه قرار نگرفتند هر چند مدتی بعد چنان حائز اهمیت شد که امروزه بدون اغراق می‌توان گفت در هر زمینه‌ای با ماتریس‌ها سر و کار داریم.

کیلی ماتریس را آرایش منظم و مستطیل شکل از اعداد که از تعدادی سطر و ستون تشکیل می‌شوند تعریف نمود.

تعریف ۱.۰.۲. یک ماتریس با درایه‌های (i,j) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

به طوری‌که $1 \leqslant j \leqslant n$ و $1 \leqslant i \leqslant m$ و a_{ij} درایه واقع در سطر i ام و ستون j ام می‌نامیم.

تعریف ۲.۰.۲. (زیر ماتریس) ماتریسی که از حذف سطر و ستون‌های مشخصی از یک ماتریس بدست می‌آید را زیر ماتریس می‌گوییم.

تعریف ۳.۰.۲. هر ماتریس $m \times ۱$ یک ماتریس ستونی و هر زیر ماتریس $۱ \times n$ یک ماتریس سطری نامیده می‌شود. همچنین هرگاه $m = n$ ، A یک ماتریس مربعی و هرگاه تمام درایه‌های A صفر باشد A ، ماتریس صفر نامیده می‌شود.

تذکر ۴.۰.۲. دو ماتریس A و B را مساوی گوییم هرگاه A و B هم اندازه باشند و برای هر i و j

$$a_{ij} = b_{ij}$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که مجموعه ماتریس‌های $m \times n$ یک فضای برداری روی میدان اسکالر می‌باشند.

قضیه ۵.۰.۲. اگر A ، B و C ماتریس‌های $m \times n$ و c و d اسکالر باشند آن‌گاه:

(۱) $A + B = B + A$

(۲) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(۳) $\circ + A = A + \circ = A$

(۴) $A + (-A) = (-A) + A = \circ$

(۵) $C(A + B) = CA + CB$

(۶) $(c + d)A = cA + dA$

(۷) $(cd)A = c(dA)$

برهان. نتیجه مستقیم تعریف است. □

تذکر ۶.۰.۲. هرگاه A یک ماتریس مربع $n \times n$ باشد، آن‌گاه

(۱) درایه‌های $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ را درایه‌های قطر اصلی A نامند.

(۲) A را یک ماتریس قطری گویند هرگاه تمام درایه‌های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند. اغلب یک ماتریس قطری را به صورت زیر نشان می‌دهند.

$$A = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}) \tag{۱.۲}$$

(۳) A را یک ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) گویند، هرگاه تمام درایه‌های پایین(بالای) قطر اصلی صفر باشند.

تعریف ۷.۰.۲. اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $m \times n$ باشد، آن‌گاه از تعویض سطرها و ستون‌های ماتریس A ترانهاده ماتریس A بدست می‌آید، یعنی،

$$A^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}]$$

حال اگر A و B یک ماتریس و d یک اسکالر باشد، آن‌گاه داریم

(۱) $(A^T)^T = A$

(۲) $(dA)^T = dA^T$

(۳) $(A+B)^T = A^T + B^T$

تعریف ۸.۰.۲. ماتریس A را متقارن گوییم، هرگاه $A^T = A$ و پادمتقارن گوییم هرگاه $A^T = -A$.

مثال ۹.۰.۲. در زیر ماتریس A یک ماتریس متقارن و ماتریس B یک ماتریس پادمتقارن است.

$$A = \begin{bmatrix} e & a & b \\ a & f & c \\ b & c & g \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

تمام ماتریس‌های قطری متقارنند و در تمام ماتریس‌های پادمتقارن درایه‌های قطر اصلی‌شان صفر است.

هر ماتریس مربعی را می‌توان به صورت جمع دو ماتریس متقارن و پادمتقارن به صورت زیر نوشت

$$X = \frac{۱}{۲}(X + X^T) + \frac{۱}{۲}(X - X^T).$$

تذکر ۱۰.۰.۲. ماتریس مربعی A متقارن است اگر ماتریس‌های قطری D و متقارن S وجود داشته باشند به طوریکه

$$A = DS.$$

تعریف ۱۱.۰.۲. اگر A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد، آنگاه اثر A را که با $tr(A)$ نشان می‌دهیم عبارت است از مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی A ، یا به عبارتی

$$tr(A) = a_{۱۱} + a_{۲۲} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii}.$$

تعریف ۱۲.۰.۲. اگر A و B دو ماتریس هم اندازه باشند، آنگاه تفاضل دو ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A - B = A + (-B).$$

۱.۲ برخی از انواع ماتریس‌ها و خواص مربوط به آن‌ها

تعریف ۱.۱.۲. **(ماتریس متعامد)** ماتریس A را متعامد گوییم هرگاه

$$A^T = A^{-۱}$$

یک ماتریس متعامد الزاما هم مربعی و هم وارون پذیر است.

تعریف ۲.۱.۲. ماتریس مربعی A را یکه گوییم، هرگاه

$$A^T A = AA^T = I$$

که I ماتریس همانی است.

تعریف ۳.۱.۲. **(ماتریس هادامارد)** ماتریس مربعی A را که تمام درایه‌های آن منفی یک یا مثبت یک هستند و سطرهای آن دو به دو بر هم عمودند را، ماتریس هادامارد می‌نامند.

مثال ۴.۱.۲. $H_1 = [1]$ و $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ماتریس‌های هادامارد هستند.

فرم کلی یک ماتریس هادامارد از مرتبه n به صورت زیر بیان می‌شود:

$$H^T H = nI_n$$

که در آن I_n ماتریس همانی $n \times n$ می‌باشد. مرتبه یک ماتریس هادامارد از مرتبه یک و دو یا مضربی از چهار می‌باشد. مثال‌هایی از ماتریس هادامارد اولین بار توسط جیمز سیلوستر در سال ۱۸۶۷ شناخته شد.

تعریف ۵.۱.۲. **(ماتریس کهاد)** هر زیر ماتریس A که از حذف یک یا چند سطر و ستون A بدست می‌آید را ماتریس کهاد می‌نامیم.

اگر فقط سطر i ام و ستون j ام از ماتریس A را حذف کنیم آن‌گاه کهاد مرتبه اول i ام و j ام را بدست آورده‌ایم، اگر دو سطر و دو ستون را حذف کنیم یکی از کهادهای مرتبه دوم را بدست آورده‌ایم. منظور از کهاد معمولا کهاد مرتبه اول است.ازکهاد برای محاسبه ماتریس همسازه و همسازه‌ی درایه‌های ماتریس، استفاده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۲. (ماتریس همسازه) اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آن‌گاه همسازه درایه a_{ij} از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$Cofactor(a_{ij}) = c_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

که M_{ij} ، ij امین کهاد ماتریس A است.

تعریف ۷.۱.۲. (ماتریس همسازه) اگر در یک ماتریس مربعی به جای هر درایه‌ی آن، همسازه‌ی نظیر آن درایه را قرار دهیم ماتریس همسازه حاصل می‌شود.

تعریف ۸.۱.۲. (ماتریس الحاقی) اگر A یک ماتریس مربعی باشد آن‌گاه ماتریس الحاقی A برابر است با ترانهاده‌ی همسازه ماتریس A .

۲.۲ ضرب ماتریس‌ها

در این‌جا دو نوع از ضرب ماتریس‌ها را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۲. (ضرب معمولی) یکی از رایج‌ترین ضرب‌ها در ماتریس‌ها، ضرب معمولی می‌باشد. این نوع ضرب تنها زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های ماتریس اولی با تعداد سطرهای ماتریس دومی برابر باشد. حاصلضرب یک ماتریس $m \times n$ در یک ماتریس $n \times p$ یک ماتریس $m \times p$ است. به همین ترتیب اگر لیستی از ماتریس‌ها را برای ضرب داشته باشیم که ابعاد مختلفی دارند. (مانند: $q \times r$ و $p \times q$ و $n \times p$ و $q \times r$) بعد ماتریس حاصلضرب از تعداد سطرهای اولین ماتریس و تعداد ستون‌های آخرین ماتریس بدست می‌آید. توجه به این نکته ضروری است که ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه جایی ندارد.

تذکر ۲.۲.۲. ضرب داخلی و ضرب خارجی در حقیقت صورت‌های خاص و ساده شده‌ای از ضرب معمولی ماتریس‌ها هستند. ضرب داخلی دو ماتریس A و B به صورت زیراست.

$$\langle A, B\rangle = tr(A^T B).$$

ضرب خارجی دو ماتریس A و B به صورت زیر است.

$$A \times B = AB^T.$$

ویژگی‌های ضرب معمولی

فرض کنیم A، BوC سه ماتریس دلخواه بر روی $\mathbb{F}$ باشند و k یک اسکالر دلخواه باشد. در این صورت

(۱) $A(BC) = (AB)C$

(۲) $A(B+C) = AB + AC$ و $(A+B)C = AC + BC$

(۳) $IA = AI = A$

(۴) $k(BC) = (kB)C = B(kC)$

(۵) $(AB)^T = B^T A^T$

مثال ۳.۲.۲. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. ماتریس $n \times n$ ، B را معکوس چپ A گوییم هرگاه $BA = I$ و معکوس راست A گوییم هرگاه $AB = I$. اگر $AB = BA = I$ آن‌گاه B را معکوس A نامیم و A را معکوس‌پذیر یا نامنفرد گوییم.

مثال ۴.۲.۲. برای ماتریس‌های ۲ × ۲ داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = B = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

با این شرط که

$$ad - bc \neq 0$$

لم ۵.۲.۲. اگر A دارای معکوس چپ B و معکوس راست C باشد آن‌گاه $B = C$.

برهان. فرض کنیم $BA = I$ و $AC = I$ ، آن‌گاه:

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

□

بنابراین اگر A دارای یک معکوس چپ و یک معکوس راست باشد آن‌گاه A دارای یک معکوس منحصربه فرد است که آن را با A^{-1} نشان می‌دهیم.

قضیه ۶.۲.۲. فرض کنیم A و B ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند.

(۱) اگر A معکوس‌پذیر باشد آن‌گاه A^{-1} نیز معکوس‌پذیر است و $(A^{-1})^{-1} = A$.

(۲) اگر A و B هر دو معکوس‌پذیر باشند آن‌گاه حاصل‌ضرب AB نیز معکوس‌پذیر است و داریم:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(۳) اگر A معکوس‌پذیر باشد آن‌گاه A^t نیز معکوس‌پذیر است و $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

برهان. اثبات به راحتی از تعریف نتیجه می‌شود. □

تعریف ۷.۲.۲. **(حاصل‌ضرب هادامارد)** اگر $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ دو ماتریس دلخواه و هم اندازه $(m \times n)$ باشند، آن‌گاه ماتریس $m \times n$ ، AoB را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$AoB = [a_{ij}b_{ij}]$$

که آن را حاصل‌ضرب هادامارد یا درایه‌وار دو ماتریس A و B می‌نامند. هر درایه ماتریس حاصل‌ضرب از ضرب درایه‌های متناظر در ماتریس‌های A و B به دست می‌آید.

در جبرخطی دترمینان به تابعی گفته می‌شود که به هر ماتریس مربعی یک عدد نسبت می‌دهد . دترمینان بیشتر برای تعیین معکوس ماتریس‌ها استفاده می‌شود به طوری‌که اگر دترمینان ماتریس مخالف صفر باشد آن‌گاه آن ماتریس معکوس‌پذیر است. از این رو از طریق دترمینان می‌توان مقادیر ویژه یک ماتریس را نیز تعیین کرد.

قضیه ۸.۲.۲. اگر A و B ماتریس‌های $n \times n$ باشند، آن‌گاه

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

برهان. به مرجع [۶] رجوع شود. □

قضیه زیر شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری یک ماتریس را بر اساس دترمینان بیان می‌کند.

قضیه ۹.۲.۲. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $\det A \neq ۰$ و در این حالت

$$\det(A^{-۱}) = \frac{۱}{\det(A)} \tag{۲.۲}$$

برهان. به مرجع [۶] رجوع شود. □

در مثال زیر نشان می‌دهیم که نتیجه فوق برای حاصلضرب هادامارد برقرار نیست.

مثال ۱۰.۲.۲. فرض کنیم A و B ماتریس‌های زیر باشند.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

داریم:

$$\det A = 1, \qquad \det B = -1.$$

و

$$\det AoB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

و لذا

$$\det(AoB) \neq \det A . \det B.$$

قضیه زیر که به قضیه دترمینان هادامارد معروف می‌باشد در مرجع [۶] اثبات شده است.

قضیه ۱۱.۲.۲. اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آن‌گاه

$$\det A \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{۳.۲}$$

برهان. به مرجع [۶] رجوع شود. □

تذکر ۱۲.۲.۲. در بخش‌های بعدی راجع به ماتریس‌های نیمه معین مثبت صحبت می‌کنیم.

قضیه ۱۳.۲.۲. برای هر دو ماتریس $n \times n$ نیمه معین مثبت A و B داریم:

$$\det AoB \geqslant \det B \prod_{n=1}^{\infty} a_{ii}. \tag{۴.۲}$$

برهان. قضیه فوق در مرجع [۶] اثبات شده است. □

نامساوی (۴.۲) را نامساوی اپن هم می‌نامیم.

از ترکیب نامساوی اپن هم و نامساوی هادامارد برای دترمینان (A و B) نتیجه می‌گیریم

$$\det(AB) \leqslant \det(AoB).$$