بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **آقای فرزاد الله‌مرادی** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی ۸۸۵۲۶۵۱۰۱۷ تحت عنوان: «**مطالعه زیرخمینه‌های لاگرانژی در خمینه‌های نزدیک- کیلر**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر فرشته سعدی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر ناصر بروجردیان	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال در دانشکده دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب فرزاد الله‌مرادی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: فرزاد الله‌مرادی

تاریخ و امضا: ۱۳۹۰/۱۲/۱

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب...فرزاد الله‌وردی...دانشجوی رشته...ریاضی محض............ ورودی سال تحصیلی...۱۳۸۸........ مقطع ...کارشناسی ارشد... دانشکده ...علوم ریاضی... متعهد می شوم کلِیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:.......................

تاریخ: ...۱۳۹۰/۱۲/۱...

دانشگاه تربیت مدرّس

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه)

مطالعه زیرخمینه‌های لاگرانژی در خمینه‌های نزدیک-کیلر

نگارنده :

فرزاد الله مرادی

استاد راهنما :

دکتر سید محمدباقر کاشانی

بهمن ۱۳۹۰

یـــا هـو

تشکر

سپاس پروردگار یکتا را که توفیق دانش‌اندوزی به من بخشید. اکنون که به لطف او کار نگارش این پایان‌نامه به پایان رسیده است، برخود لازم می‌دانم تا از راهنمایی‌های استاد گرانقدر جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی سپاس‌گزاری کنم.

چکیده

در این پایان‌نامه نشان داده می‌شود زیرخمینه‌های لاگرانژی در خمینه‌های نزدیک-کیلر اکید ۶-بعدی و فضای پیچشی بر خمینه کیلر-کواترنیونی مینیمال است همچنین با توجه به اینکه هر خمینه نزدیک-کیلر به صورت موضعی حاصل‌ضرب ریمانی یک خمینه کیلر و یک خمینه نزدیک-کیلر اکید است، هر زیرخمینه لاگرانژی در یک خمینه نزدیک-کیلر نیز حاصل‌ضرب ریمانی دو زیرخمینه است که یکی در قسمت کیلر و دیگری در قسمت نزدیک-کیلر اکید، لاگرانژی است.

پایان‌نامه به تشریح مطالب مرجع [S S] می‌پردازد.

واژه‌های کلیدی : زیرخمینه لاگرانژی، خمینه نزدیک-کیلر، زیرخمینه مینیمال، فضای پیچشی، خمینه کیلر-کواترنیونی.

فهرست

پیش‌گفتار

خمینه‌های نزدیک-کیلر اولین بار در سال ۱۹۷۰، توسط گری در [G1] و [G3] مورد مطالعه قرار گرفته است. نگی با استفاده از [G3] نشان داد هر خمینه ریمانی نزدیک-کیلر به صورت موضعی حاصل‌ضرب یک خمینه کیلر و یک خمینه نزدیک-کیلر اکید است که با فرض ساده همبندی و تمام بودن خمینه نزدیک-کیلر این تجزیه سراسری است. نگی با بهره‌گیری از مطالعات کلیتن در [C] ثابت کرد هر خمینه نزدیک-کیلر اکید ساده همبند و تمام دارای ساختارحاصل‌ضرب ریمانی است که هر کدام از مولفه‌های آن یکی از خمینه‌های پایین است :

الف : فضای متقارن از درجه ۳ (همگن طبیعی تحویلی)

ب : فضای پیچشی بر یک خمینه کیلر-کواترنیونی مثبت با ساختار نزدیک-کیلر طبیعی بر آن

ج : خمینه نزدیک-کیلر اکید ۶-بعدی

فضای متقارن از درجه ۳ توسط گری و ولف در [G2] و [G4] و فضای پیچشی بر یک خمینه کیلر-کواترنیونی توسط سالامون در [S2] معرفی شده است.

هر خمینه کیلر با ۲-فرم بنیادی یک خمینه همتافته است ولی یک خمینه نزدیک-کیلر با ۲-فرم بنیادی لزوماً همتافته نیست و پیدا کردن زیرخمینه‌های لاگرانژی در یک خمینه نزدیک-کیلر ناکیلر حتی به صورت موضعی آسان نیست با این وجود مثال‌های زیادی از زیرخمینه‌های لاگرانژی در خمینه نزدیک-کیلر اکید $\mathbb{S}^6$ وجود دارد [V]. اجیری در [E] ثابت کرده است که زیرخمینه‌های لاگرانژی در خمینه نزدیک-کیلر اکید $\mathbb{S}^6$ مینیمال است.

این پایان‌نامه به تشریح مطالب مرجع [S S] می‌پردازد و ساختار آن چنین است :

در فصل اول پیش‌نیازهایی درباره‌ی خمینه‌های نزدیک-کیلر، فضای متقارن از درجه ۳، فضای پیچشی بر یک خمینه کیلر-کواترنیونی و زیرخمینه‌های لاگرانژی در خمینه‌های نزدیک-کیلر بیان شده است.

در فصل دوم نشان داده می‌شود که زیرخمینه‌های لاگرانژی در خمینه‌های نزدیک-کیلر اکید ۶-بعدی و فضای پیچشی بر یک خمینه کیلر-کواترنیونی مینیمال است همچنین تجزیه یک زیرخمینه لاگرانژی در یک خمینه ریمانی نزدیک-کیلر نیز زیرخمینه‌های تماماً ژئودزیک در یک فضای متقارن از درجه ۳ و سرانجام وردش یک زیرخمینه لاگرانژی در خمینه نزدیک-کیلر اکید ۶-بعدی مطالعه می‌شود.

فصل اول

پیش نیازها

در این فصل پیش‌نیازها کوتاه بیان می‌شود.

۱.۱ فضای ضرب اسکالر

تعریف ۱.۱.۱ *[O ; p . 47] : فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی با بعد باپایان باشد. اندیس v از یک فرم دو خطی متقارن b بر V عبارتست از بعد بزرگترین زیرفضای W از V که $b_{|W}$ منفی معین است.*

تعریف ۲.۱.۱ *[O ; p . 47] : فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی با بعد باپایان باشد. یک فرم دوخطی متقارن و ناتبهگون بر V را یک ضرب اسکالر بر V و V را با این فرم، فضای ضرب اسکالر نامند.*

لم ۳.۱.۱ *[O ; p . 49] : فرض کنید V یک فضای ضرب اسکالر با ضرب اسکالر g و W زیر فضای برداری V باشد آن‌گاه :*

$$\dim(W)+\dim(W^{\perp})=\dim(V) \tag{1.1}$$

که در آن $W^{\perp}=\{x\in V \mid g(x,y)=0, \forall y\in W\}$.

تعریف ۴.۱.۱ *[O ; p . 49] : فرض کنید g یک ضرب اسکالر بر V و $W\subset V$ زیرفضای برداری باشد. W را زیرفضای ناتبهگون نامند اگر $g_{|W}$ ناتبهگون باشد.*

لم ۵.۱.۱ [O ; p . 49] : فرض کنید V یک فضای ضرب اسکالر و $W\subset V$ زیرفضای برداری باشد. شرط‌های پایین هم‌ارز است.

الف) W زیرفضای ناتبهگون است.

ب) $W\oplus W^{\perp}=V$.

۲.۱ فرم بنیادی دوم و زیرخمینه مینیمال

تعریف ۱.۲.۱ [O ; p . 59] : یک هموستار ∇ بر یک خمینه هموار M عبارتست از نگاشت هموار $\nabla:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ که در شرط‌های پایین صدق کند :

۱) $\nabla_X Y$ در X ، $C^{\infty}(M)$–خطی است.

۲) $\nabla_X Y$ در Y ، $\mathbb{R}$–خطی است.

۳) $\forall f\in C^{\infty}(M):\nabla_X(fY)=(Xf)Y+f\nabla_X Y$.

گزاره ۲.۲.۱ [O ; p . 61] : بر هر خمینه شبه ریمانی (M,g) هموستار یکتای ∇ وجود دارد که

$$[X,Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X \quad \left(\forall X,Y\in\mathfrak{X}(M)\right) \tag{۲.۱}$$

$$X.g(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z) \quad \left(\forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)\right) \tag{۳.۱}$$

∇را هموستار لوی-چویتای M نامند. ∇ در فرمول پایین ، به نام فرمول کزول صدق می‌کند

$$2\langle\nabla_X Y,Z\rangle=X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle+\langle Y,[Z,X]\rangle+\langle Z,[X,Y]\rangle \quad \left(\forall X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)\right)$$

لم ۳.۲.۱ [O ; p . 99] : فرض کنید (M,g) خمینه شبه ریمانی با هموستار لوی-چویتای و $N\subset M$ زیرخمینه شبه ریمانی با هموستار ∇^N باشد آن‌گاه

$$\nabla_X^N Y=\tan\left(\nabla_X Y\right) \quad \left(\forall X,Y\in\mathfrak{X}\left(M\right)\right) \tag{۴.۱}$$

تعریف ۴.۲.۱ [O ; p . 100] : فرض کنید (M,g) خمینه شبه ریمانی با هموستار لوی-چویتای ∇ و $N\subset M$ زیرخمینه شبه ریمانی باشد آن‌گاه تابع

$$\begin{aligned}\mathrm{II}:\mathfrak{X}\left(N\right)\times\mathfrak{X}\left(N\right)&\to\mathfrak{X}\left(N\right)^{\perp}\\ \left(X,Y\right)&\mapsto \mathrm{nor}\left(\nabla_X Y\right)\end{aligned}$$

$C^{\infty}(N)$–دوخطی و متقارن است. II را فرم بنیادی دوم N در M نامند. از رابطه ۴.۱ داریم

$$\nabla_X Y=\tan\left(\nabla_X Y\right)+\mathrm{nor}\left(\nabla_X Y\right)=\nabla_X^N Y+\mathrm{II}\left(X,Y\right) \quad \left(\forall X,Y\in\mathfrak{X}\left(N\right)\right) \tag{۵.۱}$$

تعریف ۵.۲.۱ [O ; p . 101] : فرض کنید (M,g) خمینه شبه ریمانی، $N^n\subset M$ زیرخمینه شبه ریمانی و $p\in N$ باشد. اگر $e_1,\dots,e_n$ یک کنج (یکه و متعامد) مماسی برای T_pN باشد خمیدگی میانگین N در نقطه p چنین تعریف می‌شود

$$\vec{H}_p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\mathrm{II}\left(e_i,e_i\right) \tag{۶.۱}$$

که در آن II فرم بنیادی دوم N در M است و به ازای هر $1\le i\le n$، $\varepsilon_i=g\left(e_i,e_i\right)$.

تعریف ۶.۲.۱ [Kob,V2 ; p . 379] : زیرخمینه N^n در M را مینیمال نامند اگر در هر نقطه $p\in N$، خمیدگی میانگین N صفر باشد.

تعریف ۷.۲.۱ [O ; p . 104] : یک زیرخمینه شبه ریمانی N از M را تماماً ژئودزیک نامند هرگاه $\mathrm{II}=0$.

گزاره ۸.۲.۱ *[104. O ; p] : برای یک زیرخمینه شبه ریمانی N از M شرط‌های پایین هم‌ارز است.*

الف : N در M تماماً ژئودزیک است.

ب : هر ژئودزیک N یک ژئودزیک M است.

ج : اگر $v \in T_pM$ مماس بر N باشد آن‌گاه M-ژئودزیک γ_v در ابتدا در N قرار دارد. یعنی برای $t > 0$ به اندازه کافی کوچک $\gamma_v(t) \in N$.

د : اگر γ یک خم در N و $v \in T_{\gamma(0)}N$ آن‌گاه انتقال‌موازی v در امتداد γ در N و M یکسان است.

۳.۱ جهت‌پذیری و عملگر ستاره هاج

تعریف ۱.۳.۱ *[397. A ; p] : فرض کنید E یک فضای برداری حقیقی n–بعدی و $\Lambda^n(E)$ مجموعه n–فرم های E باشد آن گاه هر عضو ناصفر $\Lambda^n(E)$ را یک عنصر حجم E نامند. دو عنصر حجم ω_1 و ω_2 را هم‌ارز نامند (و می‌نویسند $\omega_1 \sim \omega_2$) اگر $c > 0$ موجود باشد که $\omega_1 = c\omega_2$. فرض کنید ω یک عنصر حجم E باشد. $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی بر عنصرهای حجم E است. کلاس یک عنصر حجم ω را با $[\omega]$ نمایش می‌دهند. چون $\Lambda^n(E)$ یک بعدی است بنابراین دو کلاس هم‌ارزی $[\omega]$ و $-[\omega] := [-\omega]$ برای $\Lambda^n(E)$ وجود دارد که $[\omega]$ و $-[\omega]$ جهت‌های E را مشخص می‌کند و $(E,[\omega])$ را فضای برداری جهت‌دار نامند.*

تعریف ۲.۳.۱ *[397. A ; p] : فرض کنید $(E,[\omega])$ فضای برداری جهت‌دار باشد. پایه مرتب $(e_1,...,e_n)$ را جهت مثبت (جهت منفی) می‌نامند اگر $\omega(e_1,...,e_n) > 0$ ($\omega(e_1,...,e_n) < 0$) .*

تعریف ۳.۳.۱ *[435. A ; p] : یک فرم حجم بر خمینه n–بعدی M عبارتست از یک n–فرم ω بر M که*

به ازای هر $p \in M$، $\omega(p) \neq 0$ یعنی $\omega(p)$ عنصر حجم بر T_pM باشد. خمینه M را جهت‌پذیر نامند اگر یک فرم حجم بپذیرد.

گزاره ۴.۳.۱ [A ; p . 399] : فرض کنید E یک فضای برداری حقیقی n–بعدی، $g \in T_2^0(E)$ ناتبهگون و متقارن باشد. اگر $[\omega]$ یک جهت E باشد آن‌گاه عنصر حجم یگانه $\mu = \mu(g) \in [\omega]$ وجود دارد که به ازای هر پایه یکه و متعامد مثبت $(e_1,...,e_n)$ با پایه دوگان $\{e^1,...,e^n\}$ برای E داریم :

$$\mu(e_1,...,e_n) = 1,\ \mu = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$$

μ را یک g–عنصر حجم نامند.

گزاره ۵.۳.۱ [A ; p . 400] : فرض کنید E یک فضای برداری حقیقی n–بعدی، $g \in T_2^0(E)$ ناتبهگون و متقارن و $(e_1,...,e_n)$ یک پایه مرتب، یکه و متعامد بر E باشد آن‌گاه $\langle\ \rangle \in T_2^0(\Lambda^k(E))$ با تعریف پایین ناوابسته به پایه، ناتبهگون و متقارن است.

$$\left\langle e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}, e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k} \right\rangle = g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} \qquad (i_1 < \cdots < i_k,\ j_1 < \cdots < j_k)$$

گزاره و تعریف ۶.۳.۱ [A ; p . 401] : فرض کنید $(E,[\omega])$ یک فضای برداری حقیقی n–بعدی جهت‌دار، $g \in T_2^0(E)$ ناتبهگون و متقارن و μ، g–عنصر حجم متناظر با $[\omega]$ باشد آن گاه به ازای هر $k = 0,1,...,n$ یک یکریختی یکتای $* : \Lambda^k(E) \to \Lambda^{n-k}(E)$ وجود دارد که :

$$\omega_1 \wedge * \omega_2 = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle \mu \qquad \left(\forall\, \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(E)\right)$$

که در آن $\langle\ \rangle \in T_2^0(\Lambda^k(E))$ در گزاره ۵.۳.۱ آمده است. اگر $(e_1,...,e_n)$ یک پایه مثبت بر E با پایه دوگان $\{e^1,...,e^n\}$ باشد آن‌گاه :

$$*\left(e^{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge e^{\sigma(k)}\right)=\varepsilon_{\sigma(1)}\cdots\varepsilon_{\sigma(k)}sign(\sigma)\left(e^{\sigma(k+1)}\wedge\cdots\wedge e^{\sigma(n)}\right) \tag{۷.۱}$$

که در آن σ یک جایگشت از اعضای $\{1,...,n\}$ است که $\sigma(1)<\cdots<\sigma(k)$ و $\sigma(k+1)<\cdots<\sigma(n)$ و به ازای هر $1\le i\le n$، $\varepsilon_i=g(e_i,e_i)$.

گزاره ۷.۳.۱ [A ; p . 402] : برای عملگر $*:\Lambda^k(E)\to\Lambda^{n-k}(E)$ در گزاره و تعریف ۶.۳.۱ داریم :

$$**\omega=(-1)^{r+k(n-k)}\,\omega \qquad \left(\forall\omega\in\Lambda^k(E)\right) \tag{۸.۱}$$

که در آن r اندیس g است.

تعریف ۸.۳.۱ [A ; p . 442,513] : اگر شرط‌های ۶.۳.۱ برقرار باشد آن‌گاه عملگرهای $\delta:\Lambda^{k+1}(E)\to\Lambda^k(E)$ و لاپلاس $\Delta:\Lambda^k(E)\to\Lambda^k(E)$ چنین تعریف می‌شود

$$\delta\left(\Lambda^0(E)\right)=0\ ,\quad \delta(\omega)=(-1)^{nk+1+r}*d*\omega \tag{۹.۱}$$

$$\Delta=\delta d+d\delta \tag{۱۰.۱}$$

که در آن r اندیس g است.

نکته ۹.۳.۱ [A ; p . 442] : با توجه به این که هر k–فرم دیفرانسیل بر یک خمینه هموار در هر نقطه یک k–فرم بر فضای مماس در آن نقطه است ۶.۳.۱ ، ۷.۳.۱ و ۸.۳.۱ را می توان برای خمینه‌های شبه ریمانی جهت-پذیر گسترش داد.

تعریف ۱۰.۳.۱ [L ; p . 235] : فرض کنید $X\in\mathfrak{X}(M)$ و $\omega\in\Omega^{K+1}(M)$. $i_X\omega\in\Omega^k(M)$ را ضرب درونی X و ω نامند و چنین تعریف می‌شود :

$$i_X\omega(X_1,...,X_k)=\omega(X,X_1,...,X_k) \qquad \left(\forall X_1,...,X_k\in\mathfrak{X}(M)\right) \tag{۱۱.۱}$$

گزاره ۱۱.۳.۱ *[L ; p .341] : فرض کنید* $i_X : \Omega^{k+1} \to \Omega^k$، $k = 0,\dots,n-1$، $X \in \mathfrak{X}(M)$ *و* L_X *مشتق لی نسبت به* X *باشد آن‌گاه*

$$L_X \omega = i_X d\omega + di_X \omega \qquad \left(\forall \omega \in \Omega^{k+1}(M)\right) \tag{۱۲.۱}$$

۴.۱ خمینه همگن طبیعی تحویلی

تعریف ۱.۴.۱ *[O ; p .300] : یک همریختی (یکریختی) گروه لی عبارتست از یک نگاشت هموار* $\phi : G \to H$ *که همریختی (یکریختی) گروهی نیز هست.*

لم ۲.۴.۱ *[O ; p .300] : فرض کنید* G *یک گروه لی با جبر لی* $\mathfrak{g}$ *و* $\phi : G \to G$ *یکریختی باشد. اگر* $X \in \mathfrak{g}$ *آن‌گاه* $d\phi(X) \in \mathfrak{g}$ *و* $d\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *یک یکریختی جبر لی است که دیفرانسیل* ϕ *نامیده می‌شود.*

تعریف ۳.۴.۱ *[O ; p .301] : فرض کنید* G *یک گروه لی باشد، به ازای هر* $a \in G$ *تعریف کنید*

$$\begin{aligned} C_a : G &\to G \\ g &\mapsto aga^{-1} \end{aligned}$$

بنابراین C_a *یکریختی گروه لی است. قرار می‌دهیم*

$$\mathrm{Ad}_a = dC_a \qquad (\forall a \in G)$$

تعریف و گزاره ۴.۴.۱ *[O ; p .307] : اگر* H *یک زیرگروه بسته یک گروه لی* G *و* $G/H = \{gH : g \in H\}$ *باشد آن‌گاه یک ساختار هموار یکتا بر* G/H *وجود دارد که*

$$\begin{aligned} \pi : G &\to G/H \\ g &\mapsto gH \end{aligned}$$

یک استغراق است. G/H را با این ساختار یک خمینه همدسته‌ای نامند.

تعریف ۵.۴.۱ [O ; p .310] : فرض کنید گروه لی G بر خمینه M عمل کند. یک متریک بر M را G–ناوردا نامند اگر به ازای هر $g \in G$ وابرسانی $p \mapsto gp$ طولپایی باشد.

تعریف ۶.۴.۱ [O ; p .310] : یک خمینه همدسته‌ای $M = G/H$ را تحویلی نامند اگر یک زیرفضای $\mathrm{Ad}(H)$–ناوردای $\mathfrak{m}$ از $\mathfrak{g}$ موجود باشد که مکمل $\mathfrak{h}$ در $\mathfrak{g}$ باشد، یعنی $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. $\mathrm{Ad}(H)$–ناوردا بودن $\mathfrak{m}$ یعنی به ازای هر $h \in H$ داشته باشیم

$$\mathrm{Ad}_h(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$$

$\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ را یک زیرفضای لی برای G/H نامند.

گزاره ۷.۴.۱ [O ; p .311] : فرض کنید $M = G/H$ یک خمینه همدسته‌ای تحویلی با زیرفضای لی $\mathfrak{m}$ باشد، آن‌گاه $d\pi : \mathfrak{m} \approx T_pM$، $p = \pi(e)$ یک تناظر یک به یک بین ضرب‌های اسکالر $\mathrm{Ad}(H)$–ناوردا بر $\mathfrak{m}$ و متریک‌های G– ناوردا بر M برقرار می‌کند.

تعریف ۸.۴.۱ [O ; p .312] : یک خمینه همگن طبیعی تحویلی عبارتست از یک خمینه همگن تحویلی $M = G/H$ با یک متریک G–ناوردا بر آن چنان که

$$\langle [X,Y]_{\mathfrak{m}}, Z \rangle = \langle X, [Y,Z]_{\mathfrak{m}} \rangle \qquad (\forall X,Y,Z \in \mathfrak{m}) \tag{۱۳.۱}$$

که در آن $\mathfrak{m}$ زیرفضای لی و $\langle , \rangle$ ضرب اسکالر متناظر (با متریک G–ناوردا بر M) بر $\mathfrak{m}$ است.

لم ۹.۴.۱ [O ; p .313] : اگر $M = G/H$ یک خمینه طبیعی تحویلی با هموستار لوی-چویتای ∇ باشد آن‌گاه

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y] \qquad (\forall X,Y \in \mathfrak{m}) \tag{۱۴.۱}$$

۵.۱ گروه هولونومی و قضیه تجزیه درام

تعریف و گزاره ۱.۵.۱ *[O ; p . 66] و [D ; p. 25] : فرض کنید (M,g) یک خمینه شبه ریمانی با هموستار لوی-چویتای ∇ باشد. اگر $\gamma:[0,1]\to M$ یک خم هموار باشد که $\gamma(0)=p$ و $\gamma(1)=q$ آن‌گاه به ازای هر $x\in T_pM$، $Z\in\mathfrak{X}(\gamma)$ یکتا وجود دارد که*

$$Z(0)=x \quad , \quad \nabla_{\gamma'(t)}Z(t)=0 \quad (\forall t\in[0,1])$$

بگیرید $P_\gamma(x)=Z(1)$، آن‌گاه $P_\gamma:T_pM\to T_qM$ یک نگاشت خطی طولپایی است. P_γ را نگاشت انتقال موازی در امتداد γ از p به q نامند.

این تعریف را می‌توان با فرض پیوستگی و قطعه‌وار هموار بودن γ گسترش داد به این ترتیب که Z پیوسته و هر جا که γ هموار است، Z نیز هموار باشد.

تعریف و گزاره ۲.۵.۱ *[D ; p . 25] : فرض کنید (M,g) مانند ۱.۵.۱، $p\in M$، $x\in T_pM$ و $\gamma:[0,1]\to M$ یک خم قطعه‌وار هموار باشد که $\gamma(0)=\gamma(1)=p$. γ را یک طوقه به پایه p نامند. بگیرید $\mathfrak{L}$ مجموعه همه طوقه‌های به پایه p باشد و تعریف کنید*

$$\mathrm{Hol}_p(\nabla)=\{P_\gamma:\gamma\in\mathfrak{L}\}\subset \mathrm{GL}(T_pM)$$

آن‌گاه $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$ زیرگروه $\mathrm{GL}(T_pM)$ است که آن را گروه هولونومی M به پایه p نامند.

تعریف و گزاره ۳.۵.۱ *[D ; p . 26] : فرض کنید (M,g) یک خمینه شبه ریمانی همبند n-بعدی با هموستار لوی-چویتای ∇ و $p,q\in M$ باشد. اگر $\gamma:[0,1]\to M$ یک خم قطعه‌وار هموار باشد که، $\gamma(0)=p$ و $\gamma(1)=q$ آن‌گاه*