وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

جواب های معادلات غیرخطی از نوع همرشتاین روی فضاهای هیلبرت و باناخ

نگارش

فائزه قربان نیا

اساتید راهنما

دکتر اسماعیل نظری و دکتر علی پارسیان

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحيم

بارالها

اگر روی کرامتت را از من برگردانی

یا نعمت بارزشت را از من دریغ نمایی

یا با من قطع رابطه کنی بجز تو راهی برای رسیدن به آرزوهایم ندارم

بارالها

تویی که هرچه اراده کنی حتما واقع می شود

هرچه مقدر نمایی از روی عدالت است

و تمام حکمهایت مصلحانه است

سپاس گزاری

«سپاس خداوندی که شیوه سپاسگزاری را به ما الهام فرمود و با پروردگاری خود درهای دانش رابه روی ما گشود.»

در آغاز بر خود لازم می‌دانم سپاس بی‌پایان خود را به اساتید گرانقدرم، جناب آقای دکتر اسماعیل نظری و جناب آقای دکتر علی پارسیان که با زحمات بی‌شایبه و راهنمایی‌های خردمندانه ، این‌جانب را در انجام امور آموزشی، پژوهشی، نگارش و تدوین این پایان‌نامه یاری فرمودند، تقدیم و مراتب امتنان خالصانه خود را نسبت به ایشان ابراز نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر محمد اکبری و جناب آقای دکتر مهدی رمضانی که داوری این پایان نامه را برعهده گرفتند سپاسگزارم. از همراهی پدر و مادر و خواهر عزیزم که این‌جانب را در مراحل سخت و دشوار کار یاری نمودند نهایت قدردانی را دارم.

قربان نیا،شهریور ۱۳۹۲

چکیده

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و F و K نگاشت‌های کراندار، پیوسته و یکنوا روی فضای H می‌باشند. همچنین فرض کنیم u^* یک جواب معادله همرشتاین $u + KFu = 0$ باشد. در این پایان نامه ابتدا یک روش تکراری بنا کرده و همگرایی قوی این روش را به جواب این معادله مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس این موضوع را به نگاشت‌های روی فضاهای باناخ که در شرایط هندسی خاص صدق می کند ، تعمیم دهیم.

کلمات کلیدی: عملگر یکنوا-معادلات از نوع همرشتاین-همگرایی قوی-فضاهای هیلبرت

فهرست مطالب

پیشگفتار

یک معادله انتگرال غیر خطی از نوع همرشتاین به شکل زیر است:

$$u(x) + \int_\Omega \ k(x,y)\ f(y,u(y))\ dy = h(x) \qquad (*)$$

که dy اندازه σ متناهی روی فضای اندازه Ω باشد. k هسته حقیقی روی $\Omega \times \Omega$ باشد. f تابعی حقیقی و غیرخطی روی $\Omega \times \mathbb{R}$ و h تابعی روی Ω است . اگر K را به‌صورت زیر تعریف کنیم :

$$Kv(x) = \int_\Omega \ k(x,y)\ v(y)\ dy \qquad , \quad x \in \Omega$$

در این‌صورت $Fu(y) := f(y,u(y))$ ترکیب یا عملگر نمیتسکی[1] گفته می‌شود .

در این‌صورت اگر $h \equiv ۰$ باشد ، (*) به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$u + KFu = ۰$$

معادلات از نوع همرشتاین نقش بسیار مهمی در نظریه سیستم های کنترل مطلوب و در اتوماسیون و نظریه شبکه ها ایفا می‌کنند. در این مسئله وجود و یکتایی جواب معادلات همرشتاین توسط افراد زیادی مورد بررسی قرار گرفته است (برای نمونه به براودر[2] و دی فیگوردو[3][۲] ، براودر و گوپتا[4] [۳] و براودر [۵] می‌توان اشاره کرد).در سال ۲۰۰۵ ، چیدوم [5] و زیگیه[6] در حالتی‌که K و F دو عملگر یکنوا باشند یک عملگر خطی

[1] Nemytskii

[2] Browder

[3] De Figueiredo

[4] Gupta

[5] Chidume

را برحسب K و F فرض کردند که در این‌صورت این عملگر نیز یکنوا است و با استفاده از این عملگر یک روش تکراری ارائه و همگرایی قوی این روش به جواب معادله همرشتاین را مورد بررسی قرار دادند .

این پایان نامه شامل چهار فصل می‌باشد .

در فصل اول برخی از تعریف ها و مفاهیم اولیه که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند ، ارایه می‌گردد.

در فصل دوم نامعادلات در فضاهای باناخ و کاربردشان بیان می‌گردد .

در فصل سوم همگرایی قوی دنباله‌های تکراری به جواب معادله همرشتاین در فضای هیلبرت بررسی می‌شود .

در نهایت در فصل چهارم همگرایی قوی دنباله‌های تکراری به جواب معادله همرشتاین در فضای q- یکنواخت هموار مورد بررسی قرار می‌گیرد .

مرجع اصلی این پایان نامه مرجع شماره [۱۴] می‌باشد.

---

[۶] Zegeye

فصل ۱

مفاهیم اولیه ومقدمات

۱.۱ مقدمه

در این فصل از پایان نامه به طور مختصر به بیان مفاهیم اولیه ، یادآوری هایی که در فصل های بعدی این پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، پرداخته ایم .

۲.۱ تعاریف

در این پایان نامه Xفضای باناخ حقیقی با نرم $\|\,.\,\|$ و X^* دوگان آن است.

Rدامنه اعدادحقیقی و B_r گوی بسته به مرکز صفر وشعاع r.

برای x داخل X و x^* در X^* ، $<x, x^*>$ مقداری از x^* در x است .

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X فضای حقیقی نرمدار باشد. فرض کنید$S := \{x \in X : \| x \| = ۱\}$ باشد. X نرم مشتق پذیر گاتکس [۱] دارد (X هموار است) اگر حد زیر برای هر$x, y \in S$ موجود باشد .

$$\lim_{t\to ۰} \frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$$

تعریف ۲.۲.۱. اگر حد زیر برای هر$x, y \in S$ موجود باشد آنگاه X هموار یکنواخت است .

$$lim_{t\to ۰} \frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$$

تعریف ۳.۲.۱. تابع φ مشتق پذیر گاتکس در نقطه $x \in X$ گفته می‌شود اگر تابعک خطی پیوسته j روی X موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $y \in X$ داشته باشیم:

$$< y, j >= \varphi'(x, y) = \lim_{t\to ۰} \frac{\varphi(x+ty)-\varphi(x)}{t}$$

مثال ۴.۲.۱. *فرض کنید $X = \mathbb{R}^۲$ فضای نرمدار با نرم $\|\ \|_۲$. باشد. تابع$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف می شود در صفر مشتق پذیر گاتکس است با مشتق گاتکس.* $\varphi'(۰) = ۰$

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^۳ y}{x^۴ + y^۲} & if \quad (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & if \quad (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

---

[۱] $Gateaux$

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای نرم دار باشد. در این‌صورت ضریب تحدب برای X به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall \ 0 \leq \epsilon \leq 2 \ , \delta_X(\epsilon) = \inf\{1 - \frac{\| x+y \|}{2} : \| x \| = \| y \| = 1, \| x-y \| = \epsilon\}$$

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای نرم دار باشد. در این‌صورت ضریب همواری برای X به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall \ t > 0 \ , \rho_X(t) = \sup\{\frac{1}{2}(\| x+y \| + \| x-y \|) - 1 : \| x \| = 1, \| y \| = t\}$$

به بیانی دیگرX هموار گفته می‌شود اگر $\forall \ t > 0, \rho_X(t) > 0$

تعریف ۷.۲.۱. X به‌طور یکنواخت محدب است اگر برای هر $2 \geq \epsilon > 0$ داشته باشیم $\delta_X(\epsilon) > 0$ و به‌طوریکنواخت هموار است اگر $\lim_{t\to 0} \frac{\rho_X(t)}{t} = 0$.

مثال ۸.۲.۱. *فضای هیلبرت H و فضای l_p فضاهای به‌طور یکنواخت محدب و به‌طور یکنواخت هموار هستند باضرایب محدب وهمواری زیر:*

$$\delta_H(\epsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}} \qquad , \ \epsilon \in (0, 2]$$

$$\delta_{l_p}(\epsilon) = 1 - (1 - (\frac{\epsilon}{2})^p)^{\frac{1}{p}} \quad , \ \epsilon \in (0, 2] \ , \ 2 \leq p < \infty$$

$$\rho_H(t) = \sqrt{1 + t^2} - 1 \qquad , \ t > 0$$

$$\rho_{l_p}(t) = (1 + t^p)^{\frac{1}{p}} - 1 \quad , \quad 1 < p \le 2$$

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید $p,q > 1$ اعداد حقیقی باشند. آنگاه X ، p - یکنواخت محدب است (q -یکنواخت هموار است) اگر ثابت $C > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که $\delta_X(\epsilon) \ge C\epsilon^p$ ($\rho_X(t) \le Ct^q$)

مثال ۱۰.۲.۱. *فضاهای هیلبرت،* L_p (l_p) $((1 < p < \infty))$ ، q - *یکنواخت هموارند.فضاهای هیلبرت ، ۲-یکنواخت هموارند درحالی‌که* L_p (l_p) ، p*-یکنواخت هموارند اگر* $1 < p \le 2$ *و ۲-یکنواخت هموارند اگر* $p \ge 2$.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید $f : X \longrightarrow \overline{R} := R \cup \{+\infty\}$ یک تابع سره [2] و D زیرمجموعه محدب ناتهی از X باشد آنگاه f روی D محدب گفته می‌شود اگر :

$$\forall \ 0 \le \lambda \le 1, x, y \in D \quad , f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \le \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

تعریف ۱۲.۲.۱. f روی D به‌طور یکنواخت محدب گفته می‌شود اگر یک تابع $\mu : R^+ = [0, \infty] \longrightarrow R^+$ با شرط $\mu(t) = 0$ اگروفقط اگر $t = 0$ موجود باشد به‌طوری‌که :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \ \le \ \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \lambda(1 - \lambda)\mu(\| x - y \|)$$
$$\forall \ 0 \le \lambda \le 1, x, y \in D \tag{1.1}$$

اگر در نامعادله (۱.۱) ، $\lambda = \frac{1}{2}$ آنگاه f در مرکز به‌طور یکنواخت محدب است .

[2] f تابعی سره است اگر $x \in X$ موجود باشد که $f(x) < \infty$

تابعک محدب f روی D به طور یکنواخت محدب است اگر و فقط اگر f در مرکز روی D به‌طور یکنواخت محدب باشد .

تعریف ۱.۲.۱۳. تابع مزدوج تابع محدب f :

$$f^{*}(x^{*})=\sup\{<x,x^{*}>-f(x):x\in X\} \ ،\ x^{*}\in X^{*}$$

اگر $f(x)=\frac{1}{p}\parallel x\parallel^{p}$ و $p>1$ باشد آنگاه $f^{*}(x^{*})=\frac{1}{q}\parallel x^{*}\parallel^{q}$ و $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ است .

$$\forall C>0 \ ،\ (Cf)^{*}(x^{*})=Cf^{*}(C^{-1}x^{*})$$

تعریف ۱.۲.۱۴. $\sigma f:X\longrightarrow X^{*}$ را زیردیفرانسیل از f می‌نامیم وبه‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma f(x)=\{x^{*}\in X^{*}:f(y)\geq f(x)+<y-x,x^{*}>\quad\forall\ y\in X\}$$

مثال ۱.۲.۱۵. $J(x)$ $J_{p}(x)=\parallel x\parallel^{p-2}$ *برای* $x\neq 0$ *زیر دیفرانسیل تابعک* $\frac{1}{p}\parallel.\parallel^{p}$ در x *است*

تعریف ۱.۲.۱۶. فرض کنید X فضای نرمدار باشد. تابع J_q $(q>1)$نگاشت دوگان تعمیم یافته ازXبه $2^{X^{*}}$ را نشان می‌دهد و به صورت زیر تعریف شود :

$$J_q(x)=\{f\in X^{*}:<x,f>=\parallel x\parallel^{q},\parallel f\parallel_{*}=\parallel x\parallel^{q-1}\}$$

برای $q=1$ داریم $J=J_2$ که نگاشتی ازX به X^{*} است ونگاشت دوگان نرمال شده نام دارد .

اگر X یکنواخت هموار باشد آنگاه J تک‌مقدار است .

تعریف ۱.۲.۱۷. نگاشت A ، $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ افزاینده است اگر برای هر $x,y \in D(A)$ ، $j(x-y) \in J(x-y)$ موجود باشدبه‌طوری‌که :

$$< Ax - Ay, j(x-y) > \geq 0$$

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنید $\eta > 0$ حقیقی موجود باشد.A ، η -قوی افزاینده گفته می‌شود اگر برای هر $x,y \in D(A)$ ، $j_q(x-y) \in J_q(x-y)$ موجود باشد به‌طوری‌که :

$$< Ax - Ay, j_q(x-y) > \geq \ \eta \parallel x-y \parallel^q$$

تعریف ۱.۲.۱۹. A ، m -افزاینده نامیده می‌شود اگر A افزاینده باشد و $R(I+rA) = E$ ، $\forall \ r > 0$

تعریف ۱.۲.۲۰. A در شرط برد صدق می‌کند اگر $CL(D(A)) \subseteq R(I+rA)$، $\forall \ r > 0$ [3]

تعریف ۱.۲.۲۱. فرض کنید E فضای خطی حقیقی باشد.نگاشت $T : D(T) \subset E \longrightarrow E$ لیپ شیتس تعمیم یافته گفته می‌شود اگر $L > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که :

$$\forall \ x,y \in D(T) \ , \parallel Tx - Ty \parallel \leq \ L(1 + \parallel x-y \parallel)$$

هرنگاشت لیپ شیتس،لیپ شیتس تعمیم یافته است .

هرنگاشت با برد کراندار نگاشت لیپ شیتس تعمیم یافته است .

هرنگاشت لیپ شیتس تعمیم یافته کراندار است .

مثال ۱.۲.۲۲. *فرض کنید* $E = (-\infty, +\infty)$ *و* $T : E \longrightarrow E$ *به‌صورت زیر تعریف شود :*

---

[3] $CL(D(A))$ بستار $D(A)$ است

$$Tx=\begin{cases} x-1 & if \quad x\in(-\infty,-1) \\ x-\sqrt{1-(x+1)^2} & if \quad x\in[-1,0) \\ x+\sqrt{1-(x-1)^2} & if \quad x\in[0,1] \\ x+1 & if \quad x\in(1,+\infty) \end{cases}$$

آنگاه T نگاشت لیپ شیتس تعمیم یافته است که لیپ شیتس نیست و برد آن کراندار نیست .

تعریف ۲۳.۲.۱. فضای باناخ شامل همه توابع کراندار از N بتوی R را با l^∞ نشان می دهیم. (دنباله های حقیقی کراندار با نرم سوپریمم)

تعریف ۲۴.۲.۱. اگر $\| \mu \| = \mu(I_N) = 1$ آنگاه $\mu \in (l^\infty)^*$ یک میانگین نامیده می شود.که معادل است با:

$$\forall \ a\in l^\infty, inf_{n\in N}\ a_n \le \mu(a) \le sup_{n\in N} a_n$$

$$\forall \ n\in N \ , a_n \le b_n \Longrightarrow \mu(a)\le\mu(b)$$

$\mu_n a_n$ را با مقدار $\mu \in l^\infty$.$\mu(a)$ نیز می توانیم نشان می دهیم و آنرا حد باناخ می نامیم اگر موارد زیر برقرارباشند:

i) μمیانگین است.

ii) $\forall \ a\in l^\infty, \mu(a)=\mu_n(a_{n+1})$

اگر برای $n\in N$ داشته باشیم $b_n=a_{n+1}$ آنگاه $\mu(a)=\mu(b)$ و به کمک استقرا داریم $\mu(a)=\mu_n(a_{n+k})$.

تعریف ۲۵.۲.۱. نگاشت $T: Dom(T)\subset X \longrightarrow 2^{X^*}$ ، کورارسیو[۴] روی یک زیرمجموعه C از $Dom(T)$ گفته می‌شود اگر یک تابع $c:(0,\infty)\longrightarrow[-\infty,+\infty]$ با شرط $c(t) \longrightarrow \infty$ که $t\longrightarrow\infty$ موجود باشد به‌طوری‌که $\forall \ x\in C \quad <x,Tx> \ \ge \ c(\|x\|)\|x\|$

.

---

[۴] Coercive

به‌عبارتی‌دیگر T ، کورارسیو روی C گفته می‌شود اگر :

$$\frac{<x,Tx>}{\| x \|} \longrightarrow \infty$$ زمانیکه $\| x \| \longrightarrow \infty$ و $x \in C$.

۳.۱ لم ها

لم ۱.۳.۱. *فرض کنید $(x_0, x_1, x_2, ...) \in l^{\infty}$ باشند به‌طوری‌که $\mu_n x_n \le 0$ برای همه حدهای باناخ μ .*

اگر $\limsup_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) \le 0$ آنگاه $\limsup_{n\to\infty} x_n \le 0$

لم ۲.۳.۱. *فرض کنید H فضای هیلبرت حقیقی باشد آنگاه :*

$$\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + 2 < x,y > + \| y \|^2 \quad : \quad \forall \ x,y \in H$$[5]

اثبات : به [۱] رجوع شود .

لم ۳.۳.۱. *فرض کنید $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد و در رابطه زیر صدق کند :*

$$a_{n+1} \le (1-\alpha_n)a_n + \alpha_n \sigma_n + \gamma_n \quad , \quad n \ge 1$$

به‌طوری‌که $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ در شرایط زیر صدق کنند :

i) $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1] \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$

ii) $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \ \sigma_n \le 0$

iii) $\gamma_n \ge 0 \quad \forall \ n \ge 1 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$

آنگاه $a_n \longrightarrow 0$ زمانی‌که $n \longrightarrow \infty$

اثبات : به [۱۷] رجوع شود .

لم ۴.۳.۱. *فرض کنید H فضای هیلبرت حقیقی باشد و $A : H \longrightarrow H$ نگاشت یکنوا با شرط $D(A) = H$ باشد.فرض کنید که $s_0 > 0$ وجود دارد که $R(I+s_0 A) = H$ آنگاه A در شرط برد صدق می‌کند به‌عبارتی‌دیگر:*

[5] $\forall \ x,y \in H \quad : \quad \| x+y \|^2 \le \| x \|^2 + 2 < y, x+y >$

$$R(I+sA)=H \quad \forall \quad s>0$$

اثبات : به [۱۰] رجوع شود .

لم ۵.۳.۱. *فرض کنید H فضای هیلبرت حقیقی باشد و $A:H\longrightarrow H$ نگاشت یکنوا با شرط $D(A)=H$ باشد. فرض کنید $t>0$, $J_tx=(I+tA)^{-1}x$ ، رزلونت A [۶] باشد و فرض کنید $A^{-1}(0)$ ناتهی باشد.اگر A در شرط برد صدق کند آنگاه برای هر $x\in H$ ، $\lim_{t\longrightarrow\infty} J_tx\in A^{-1}(0)$.*

اثبات : به [۱۹] رجوع شود .

لم ۶.۳.۱. *فرض کنید A یک نگاشت یکنوای پیوسته [۷] روی فضای هیلبرت H با شرط $D(A)=R(A)$ باشد آنگاه A یکنوای ماکسیمال است .*

اثبات : به [۸] رجوع شود .

لم ۷.۳.۱. *فرض کنید H فضای هیلبرت حقیقی باشد و $F,K:H\longrightarrow H$ نگاشتهای یکنوا باشرط $D(F)=H=D(K)$ باشند. فرض کنید F,K در شرط برد صدق کنند .*

اگر نگاشت $W:=H\times H$ $A:W\longrightarrow W$ به‌صورت زیر تعریف شود :

$$A\omega=(Fu-v,Kv+u) \ , \ \forall \quad \omega=(u,v)\in W$$

آنگاه A یکنوا است و در شرط برد صدق می کند .

اثبات : به [۱۴] رجوع شود .

تبصره ۱.۳.۱. *فرض کنید $u+KFu=0$ در H و $A:H\times H\longrightarrow H$ به‌صورت زیر تعریف شود :*

$$A\omega=(Fu-v,Kv+u) \quad \forall \quad (u,v)\in H$$

---

[۶] resolvent A

[۷] continuse monotone

$u^* \in H$ یک جواب معادله $u + KFu = 0$ است اگر و فقط اگر $\omega^* = (u^*, v^*)$ یک جواب $A\omega = 0$ در $H \times H$ باشد برای $v^* = Fu^*$

لم ۸.۳.۱. *فرض کنید E فضای خطی نرم دار باشد آنگاه نامعادله زیر برقرار است :*

$$\| x+y \|^2 \leq \| x \|^2 + 2 < y, j(x+y) > \qquad \forall \;\; x, y \in E \;\; , \;\; j(x+y) \in J(x+y)$$

اثبات : به [۱] رجوع شود .

لم ۹.۳.۱. *برای $q > 1$ فرض کنید X فضای باناخ q-یکنواخت هموار باشد.*

فرض کنید $E := X \times X$ با نرم $\| x \|_E := (\| x_1 \|_X^q + \| x_2 \|_X^q)^{\frac{1}{q}}$ برای $x = [x_1, x_2] \in E$ باشد.

فرض کنید $E^* := X^* \times X^*$ دوگان E باشد. برای $x = [x_1, x_2] \in E$ تعریف می‌کنیم :

$$j_q : E \longrightarrow E^*$$

$$j_q^E(x) = j_q^E[x_1, x_2] = [j_q^X(x_1) j_q^X(x_2)]$$

به‌طوری‌که برای $x = [x_1, x_2]$ و $y = [y_1, y_2]$ دلخواه در E زوج دوگان $< .,. >$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$< x, j_q^E(y) > = < x_1, j_q^X(y_1) > + < x_2, j_q^X(y_2) >$$

آنگاه :

i) j_q^E یک نگاشت دوگان روی E است.

ii) E ، q-یکنواخت هموار است.

اثبات : به [۹] رجوع شود .

لم ۱۰.۳.۱. *فرض کنید E فضای باناخ ۲-یکنواخت هموار باشد. آنگاه یک ثابت $k > 0$ موجود است*

به‌طوری‌که نامعادله زیر برقرار است :

$$\forall \quad x,y\in E \quad \| x+y \|^{2} \leq \| x \|^{2} + 2 < y, j(x) > +k \| y \|^{2}$$

اثبات : به [۱۸] رجوع شود .

لم ۱۱.۳.۱. فرض کنید $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد و در رابطه زیر صدق کند :

$$\lambda_{n+1} \leq (1-\omega_n)\lambda_n + \sigma_n \quad , \quad n \geq 0$$

که $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ و $\{\sigma_n\}_{n\geq 0}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی باشند.

به‌طوری‌که $[0,1] \supset \{\omega_n\}_{n\geq 1}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n = +\infty$

فرض کنید $n \geq 0 \ , \ \sigma_n = o(\omega_n)$ (به‌عبارتی‌دیگر $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sigma_n}{\omega_n} = 0$) یا

$\sum_{n=1}^{\infty} | \sigma_n | < +\infty$ یا $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \frac{\sigma_n}{\omega_n} \leq 0$

آنگاه $\lambda_n \longrightarrow 0$ زمانی‌که $n \longrightarrow \infty$.

اثبات : به [۱۷ – ۱۶ – ۴] رجوع شود .

لم ۱۲.۳.۱. برای $q>1$ فرض کنید X فضای باناخ حقیقیq- یکنواخت هموار باشد.

فرض کنید $E := X \times X \times ... \times X$ با N اندیس و

با نرم $\| x \|_E := (\| x_1 \|_X^q + \| x_2 \|_X^q + ... + \| x_N \|_X^q)^{\frac{1}{q}}$ برای $x = [x_1, x_2, ..., x_N] \in E$ باشد .

فرض کنید $E^* := X^* \times X^* \times ... \times X^*$ با N اندیس ،دوگان E باشد. برای $x = [x_1, x_2, ..., x_N] \in E$

تعریف می‌کنیم :

$$j_q : E \longrightarrow E^*$$

$$j_q^E(x) = j_q^E[x_1, x_2, ..., x_N] = [j_q^X(x_1) j_q^X(x_2), ..., j_q^X(x_N)]$$

به‌طوری‌که برای $x = [x_1, x_2, ..., x_N]$ و $y = [y_1, y_2, ..., y_N]$ دلخواه در E زوج دوگان $< .,. >$ به‌صورت زیر