دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

# بعد گورنشتاین مدول ها روی همریختی ها

نگارش:

سعید یزدانی

استاد راهنما:

دکتر محمد علی اسم خانی

اسفند ماه ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به پدر و مادر گرامیم

آنان که وجودم برایشان همه رنج بود

و وجودشان برایم همه مهر

توانشان رفت تا به توانائی برسم

و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند.

آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان

و روشنی رویشان سرمایه های جاودانی من است.

در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می نهم

و با دلی مملو از عشق و محبت و خضوع

بر دستانشان بوسه می زنم:

سر و وجودشان همیشه سرسبز و ماندگار...

و نیز تقدیم به الگو و تکیه گاهم

برادر عزیزم مهدی

و رایحه های شاداب و دوست داشتنی زندگیم

بهانه های خوش تپش قلبم: خواهرانم

# تقدیر و سپاس

شکر شایان و سپاس فراوان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان نامه را با تمام مشقت‌ها وسختی‌هایش به اتمام برسانم و درود بی‌پایان به محضر امام عصر، حضرت مهدی (عج) یگانه منجی عالم.

در این‌جا بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای عزیزم، جناب آقای دکتر محمدعلی اسم‌خانی که در طول این مدت همواره بنده را مورد لطف و محبت و راهنمایی‌های دلسوزانه‌ی خود قرار داده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را بنمایم. از نویسنده‌ی مقاله‌ی اصلی پایان نامه ام جناب آقای پروفسور ”$LarsWintherChristensen$“ که کتاب‌ها، مقالات و رهنمودهای ارزنده ایشان پیوسته برایم الهام بخش بوده و سهم به‌سزایی در پیشبرد کارم داشته قدردانی می‌کنم. همچنین از اساتید بزرگوار، جناب آقای دکتر مسعود آرین نژاد و جناب آقای دکتر سید مجید جعفریان امیری که زحمت مطالعه و داوری این کار را بر عهده داشته‌اند تشکر می‌نمایم.

به پاس قدردانی از قلبی مهربان و آکنده از عشق و معرفت که همواره در تمامی لحظات جمع آوری و نگارش این رساله همراه و یاور من بوده و همدلی که با واژه‌ی نجیب و مغرور تلاش آشنایی دارد و معنای راستین آن‌را می‌شناسد، یعنی همسرم صمیمانه و با خلوص نیت مراتب تقدیر و تشکر خود را تقدیم می‌دارم.

در خاتمه از دو دوست گرامیم جناب آقای هادی پولادی و آقای میثم مردانی تشکر و قدردانی می‌نمایم.

همتم بدرقه‌ی راه کن ای طائر قدس      که دراز است ره مقصد و من نو سفرم

# چکیده

همریختی حلقه‌ای $S \longrightarrow R$ از حلقه‌های جابجایی و نوتری و $S$-مدول $N$ مفروضند. ثابت می‌شود زمانی‌که $N$ دارای بعد یکدست گورنشتاین متناهی است بعد مذکور روی حلقه‌ی $R$ می‌تواند به‌صورت موضعی روی $S$ محاسبه شود. علاوه بر این، زمانی‌که همریختی موضعی باشد، $N$ به‌عنوان $S$-مدول متناهی مولد است. بعد یکدست گورنشتاین، برابر $sup\{m \in \mathbb{Z} | Tor_m^R(E, N) \neq 0\}$ می‌باشد که در آن $E$، پوشش انژکتیو میدان باقی‌مانده‌ی حلقه‌ی $R$ است. این نتیجه شبیه قضیه‌ای از آندره در مورد بعد یکدست می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** *بعد یکدست گورنشتاین، همولوژیکی متناهی، همبافت، همریختی‌های موضعی، تکمیل سازی، رسته‌های مشتق شده.*

# فهرست مطالب

# پیشگفتار

فرض کنید $R$یک حلقه ی جابجایی نوتری و $N$ یک $R$-مدول باشد. $N$ را روی یک همریختی متناهی گوییم هرگاه یک همریختی حلقه‌ای $S \longrightarrow R$ موجود باشد به‌طوری که $S$ نوتری بوده و $N$ یک $S$-مدول متناهی‌مولد باشد، و ساختار $N$ به‌عنوان $R$-مدول، منطبق با ساختار $R$-مدولی اولیه‌اش باشد.

در مواردی که $S \longrightarrow R$ یک همریختی موضعی است، این کلاس از مدول‌ها توسط آپاساو[1] [۱] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند که به آن‌ها مدول‌های تقریبا متناهی گفته می‌شود. آوراموو[2]، فاکسبی[3]، میللر[4]، ساتر-واگستاف[5] و ... نیز در این زمینه فعالیت داشته اند. رجوع شود به[۳، ۵، ۲۳].

کارهای این اشخاص و دیگر نویسندگان نشان می‌دهد که خواص هومولوژیکی مدول‌های متناهی روی همریختی‌ها (ی موضعی)، به‌صورت توسیعی از خواص هومولوژیکی مدول‌های متناهی‌مولد (روی حلقه های موضعی)، می‌باشند. یک خاصیت مهم بسیاری از ناورداهای $R$-مدول‌ها این است که به‌صورت موضعی روی حلقه‌ی $R$ قابل محاسبه هستند. بنابراین سوال اساسی این است که آیا وضعیت مشابهی برای مدول‌های روی همریختی‌ها نیز برقرار است؟ به عبارت دیگر، آیا یک ناوردای مدول $N$، به‌صورت موضعی روی حلقه‌ی $S$، قابل محاسبه است؟

برای بعد یکدست، این سوال قابل بررسی است. یکی از اهداف ما، تمرکز روی بعد یکدست گورنشتاین است که ایناکس[6]، جندا[7] و تورسیلاس [8]در[۱۶]، به آن پرداخته‌اند.

نشان می‌دهیم اگر $Gfd_RN$، بعد یکدست گورنشتاین مدول $N$، متناهی باشد آن‌گاه می‌توان آن را به‌صورت

$$Gfd_RN = sup\{Gfd_{R_{\mathfrak{p}}}N_{\mathfrak{q}} | \mathfrak{q} \in SpecS, \mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{q}\}$$

نمایش داد. این قضیه، نتیجه‌ای مشهور برای حالتی که $S \overset{=}{\longrightarrow} R$ است را تعمیم می‌دهد.

نتیجه‌ی بالا، روی مدول‌های روی همریختی‌های موضعی متمرکز می‌شود و در این حالت طبق قضیه‌ای از آندره، اگر $N$،

[1] Appasav
[2] Avramov
[3] Foxby
[4] Miller
[5] sather-wagstaff
[6] Enochs
[7] Jenda
[8] Torrecilas

متناهی‌مولد باشد آن‌گاه بعد یکدست $N$، روی $R$، برابر با

$$sup\{m \in \mathbb{Z} | Tor_m^R(k, N) \neq 0\}$$

خواهد بود که در آن $k$ میدان باقی مانده‌ی حلقه‌ی $R$ است.

همچنین ثابت می‌کنیم که اگر همریختی $S \longrightarrow R$ موضعی، و $N$ به عنوان $S$-مدول، روی همریختی موضعی، متناهی باشد و $Gfd_R N$ متناهی باشد آن‌گاه

$$Gfd_R N = sup\{m \in \mathbb{Z} | Tor_m^R(E, N) \neq 0\}$$

است که $E$ پوشش انژکتیو میدان باقی‌مانده‌ی $R$ می‌باشد. تفاوت اساسی بین این نتیجه و قضیه‌ی آندره آن است که در این‌جا ابتدا باید فرض شود که $Gfd_R N$ متناهی است.

همچنین توسط یک فرع به نتیجه‌ی زیر خواهیم رسید که اگر $N$، روی یک همریختی موضعی متناهی باشد و $Gfd_R N$ متناهی باشد آن‌گاه می‌توان $Gfd_R N$ را به‌صورت

$$Gfd_R N = Gfd_{\hat{R}}(\hat{S} \otimes N)$$

محاسبه کرد. نتیجه‌ی متناظر برای بعد یکدست ساده است. ولی برای یکدست گورنشتاین دارای پیچیدگی‌هایی است. در راستای نیل به اهداف فوق، این رساله بر شش فصل تنظیم گردیده است. در فصل اول مفاهیم و مطالب مقدماتی جبر جابه‌جایی و جبر همولوژی مورد نیاز برای درک بهتر فصل‌های بعدی، در گذری کوتاه تنظیم و گرد آوری شده‌اند. در این فصل همچنین طی دو بخش دیگر به تعریف و بررسی خواص یک همبافت و نیز تابعگون همولوژی پرداخته‌ایم و سپس دو تابعگون مهم در جبر ابر همولوژی معرفی گشته‌اند.

در فصل دوم تفاوت‌ها و شباهت‌های اساسی بین جبر همولوژی و جبر ابر همولوژی به‌وضوح آشکار می‌گردد و در سه بخش مفصل به مطالعه‌ی خواصی چند در مورد همبافت‌ها می‌پردازیم. مرجع اصلی این فصل، [۷] می‌باشد.

فصل سوم که به مطالعه‌ی مفهوم $G$-بعد مدول و همبافت پرداخته است، در واقع بستر مناسبی برای درک مفهوم بعد یکدست گورنشتاین مدول‌ها و همبافت‌ها را فراهم می‌سازد تا خواننده بتواند در فصل‌های بعدی فارغ از هر ابهام به مطالعه‌ی مفاهیم و قضایای مربوطه بپردازد. مرجعی که در شکل گیری هرچه زیباتر و منسجم‌تر این فصل نقش اساسی دارد [۱۱] می‌باشد.

فصل چهارم در دو بخش تهیه و تنظیم شده است.در بخش اول به موازات معرفی محمل برای یک مدول، این مفهوم را در مورد همبافت‌ها نیز معرفی کرده‌ایم و سپس تحت عنوان چند قضیه به مطالعه‌ی خواص آن پرداخته‌ایم. در بخش دوم نیز برآنیم نشان دهیم هرگاه بعد یکدست گورنشتاین همبافت‌های روی همریختی‌ها متناهی باشد، می‌توان آن‌را به‌صورت موضعی محاسبه کرد.

اساس کار فصل‌های پنج و شش که هدف نهایی این رساله می‌باشند، این است که در ابتدای هر فصل قضیه‌ای ارایه گردیده و سپس برای تحلیل و اثبات آن به جمع‌آوری مطالب مورد نیاز پرداخته‌ایم و سر انجام در پایان هر فصل آن‌را اثبات کرده‌ایم.

لازم به ذکر است که ارایه‌ی برهان در مورد تعدادی از قضایا، خصوصاً قضایای فصل دوم به شیوه‌های ابتکاری و با صرف وقت فراوان انجام گرفته است. در این رساله فرض بر این است که خواننده با مفاهیم ابتدایی جبر جابه‌جایی و جبر همولوژی آشناست لیکن خاطر نشان می‌کنیم به ازای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از حلقه‌ی $R$، علامت $E(\frac{R}{\mathfrak{p}})$ نشان دهنده‌ی پوشش انژکتیو $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ است. سایر علامت‌های به‌کار رفته، در مکان‌های مورد نیاز معرفی گشته‌اند.

# فصل ۱

# مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در سرتاسر این رساله $R$ و $S$، حلقه های جابه‌جایی نوتری هستند، مگر آن‌که تصریح شود. فرض کنید همریختی حلقه‌ای $\varphi : R \longrightarrow S$ داده شده باشد. هر $S$- مدول را می‌توان به عنوان یک $R$-مدول، با ضربی که توسط $\varphi$ مشخص می‌شود، در نظر گرفت. در این فصل سعی بر آن داریم که تعاریف و قضایای مقدماتی و لازم برای درک بهتر فصل‌های بعدی را بیان و اثبات کنیم.

## ۱.۱ مفاهیم اولیه‌ی مدول‌ها و حلقه‌ها

**تعریف ۱.۱.۱.** *حلقه‌ی $R$ را یک حلقه‌ی موضعی می‌نامیم، هرگاه دارای تنها یک ایده‌آل ماکزیمال باشد. اگر $\mathfrak{m}$، تنها ایده‌آل ماکزیمال $R$ باشد، $R$ به‌صورت $(R, \mathfrak{m})$ نمایش داده می‌شود.*

**تعریف ۲.۱.۱.** *رادیکال جیکوبسون حلقه‌ی $R$ که با $J(R)$ نمایش داده می شود، به‌صورت*

$$J(R) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in MaxR} \mathfrak{m}$$

*تعریف می‌گردد.*

**نکته ۳.۱.۱.** *فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه ی موضعی باشد. دراین‌صورت، $J(R) = \mathfrak{m}$ است.*

**گزاره ۴.۱.۱.** *فرض کنید $\varphi : R \longrightarrow S$ یک همریختی حلقه ای پوشا باشد. آن گاه $\varphi(J(R)) \subseteq J(S)$ است.*

برهان . فرض کنید $x$ عنصری در $\varphi(J(R))$ باشد. $x$ متعلق به $J(R)$ است اگر وفقط اگر به ازای هر $a$ متعلق به $R$، $1 - ax$ وارون چپ داشته باشد. بنابراین برای نشان دادن این‌که $x$ متعلق به $J(S)$ است کافی است نشان دهیم به ازای هر عنصر $s$ در $S$، $1 - sx$ وارون چپ دارد.

چون $x$ متعلق به $\varphi(J(R))$ است پس $t$ متعلق به $J(R)$ موجود است به‌طوری که $x = \varphi(t)$. فرض کنید $s$ عنصر دلخواهی از $S$ باشد. بنابر پوشا بودن $\varphi : R \longrightarrow S$

$$\exists r_1 \in R \qquad st: \ \varphi(r_1) = s$$

در نتیجه باجایگذاری مقادیر $s$ و $x$ تساوی‌های

$$\begin{aligned} 1 - sx &= 1 - \varphi(r_1)\varphi(t) &&= 1 - \varphi(r_1 t) \\ &= \varphi(1) - \varphi(r_1 t) &&= \varphi(1 - r_1 t), \end{aligned}$$

نتیجه می‌شوند. حال چون $t$ متعلق به $J(R)$ و $r - 1$ متعلق به $R$ است لذا $1 - r_1 t$ وارون چپ دارد. در نتیجه یک $u$ متعلق به $R$ موجود است به‌طوری که $u(1 - r_1 t) = 1$. همچنین از آن‌جا که

$$\begin{aligned} \varphi(u)(1 - sx) &= \varphi(u)\varphi(1 - r_1 t) \\ &= \varphi(u(1 - r_1 t)) = 1, \end{aligned}$$

$\varphi(u)$ وارون چپ $1 - sx$ می باشد و حکم برقرار است. $\square$

**تعریف ۵.۱.۱.** *همریختی حلقه‌ای $\varphi : R \longrightarrow S$ که در آن حلقه‌های $R$ و $S$ موضعی، با ایده‌آل‌های ماکزیمال به ترتیب $\mathfrak{m}$ و $\mathfrak{n}$ می‌باشند را در نظر بگیرید. هرگاه $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$ باشد، $\varphi$ یک همریختی موضعی نامیده می‌شود.*

**نتیجه ۶.۱.۱.** *با فرض موضعی بودن حلقه های $R$ و $S$، هر همریختی پوشای $\varphi : R \longrightarrow S$ موضعی است.*

**تعریف ۷.۱.۱.** *فرض کنید $R$ یک حلقه باشد. در این‌صورت، طول طولانی‌ترین زنجیر سره از ایده آل‌های اول حلقه‌ی $R$ را بعد $R$ می‌نامیم و با $dimR$ نمایش می‌دهیم.*

**تعریف ۸.۱.۱.** فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه‌ی موضعی موضعی باشد. $R$ را موضعی منظم می‌نامیم هرگاه $\mu(\mathfrak{m}) = dimR$ که در آن $\mu(\mathfrak{m})$ تعداد عناصر مجموعه‌ی مولد مینیمال برای $\mathfrak{m}$ است.

**تعریف ۹.۱.۱.** یک زیر رسته‌ی تام[۱] $\mathcal{S}$ از رسته‌ی $\mathcal{C}$، زیر رسته‌ای است که به ازای هر دو شیء $A$ و $B$ در $\mathcal{S}$، $Hom_{\mathcal{S}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ باشد.

**تعریف ۱۰.۱.۱.** رسته‌ی $\mathcal{C}$ را یک رسته‌ی پیش‌جمعی گوییم هرگاه به ازای هر دو شیء $A$ و $B$، $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ یک گروه آبلی بوده و عبارات زیر برقرار باشند.

الف ) به ازای هر $B \longrightarrow A : f_۱, f_۲$ و $C \longrightarrow B : g$ که ریخت‌هایی بین اشیاء رسته‌ی $\mathcal{C}$ هستند، رابطه‌ی $g(f_۱ + f_۲) = gf_۱ + gf_۲$ برقرار باشد.

ب ) به ازای هر $A' \longrightarrow C' : k$ و $B' \longrightarrow A' : h_۱, h_۲$ که ریخت‌هایی بین اشیاء رسته‌ی $\mathcal{C}$ هستند، رابطه‌ی $(h_۱ + h_۲)k = h_۱k + h_۲k$ برقرار باشد.

**تعریف ۱۱.۱.۱.** فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته‌ی پیش جمعی باشند. تابعگون همورد (پادورد) $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ را یک تابعگون جمعی گوییم هرگاه به ازای هر دو شیء $A$ و $B$ در $\mathcal{C}$ و هر دو ریخت $f$ و $g$ در $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ تساوی

$$\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}f + \mathcal{F}g$$

برقرار باشد.

**لم ۱۲.۱.۱.** دنباله‌ی دقیق $A_۱ \xrightarrow{f_۱} A_۲ \xrightarrow{f_۲} A_۳ \xrightarrow{f_۳} A_۴ \xrightarrow{f_۴} A_۵$ از $R$-مدول‌ها و $R$-همریختی‌ها را در نظر بگیرید. اگر $f_۱$ پوشا و $f_۴$ یک به یک باشد، $A_۳$ صفر است.

[۱] full

برهان . چون $f_4$ تکریختی است، $ker f_4 = 0$ و در نتیجه $Im f_3 = 0$ است. یعنی $f_3 : A_3 \longrightarrow A_4$ همریختی صفر می‌باشد. لذا دنباله‌ی دقیق $0 \longrightarrow A_3 \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_1} A_1$ به‌دست می‌آید. چون $f_2$ پوشاست $Im f_2 = A_3$. از طرفی $ker f_2 = Im f_1$ و بنابر پوشا بودن $f_1$، $ker f_2 = A_2$ است. پس $A_3$ صفر است. □

**لم ۱۳.۱.۱.** *(لم پنج) نمودار جابه‌جایی زیر از $R$-مدول‌ها و $R$-همریختی‌ها که در آن سطرها دقیق هستند را در نظر بگیرید.*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"'] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"'] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

*الف) هرگاه $\alpha_1$ پوشا و $\alpha_2$ و $\alpha_4$ یک به یک باشند، آن‌گاه $\alpha_3$ یک به یک است.*

*ب) هرگاه $\alpha_5$ یک به یک و $\alpha_2$ و $\alpha_4$ پوشا باشند، آن‌گاه $\alpha_3$ پوشا است.*

*ج) هرگاه $\alpha_1$ و$\alpha_2$ و $\alpha_4$ و $\alpha_5$ یکریختی باشند، $\alpha_3$ نیز یکریختی است.*

برهان . رجوع شود به [۲۵، صفحه‌ی ۲۸۱]. □

**لم ۱۴.۱.۱.** *فرض کنید*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

*نموداری جابه‌جایی از $R$-مدول‌ها و $R$-همریختی‌ها باشد که سطرهای آن دقیق فرض شده‌اند. در این‌صورت، $R$-همریختی‌ای چون $\gamma' : C \longrightarrow C'$ موجود است که نمودار زیر را جابه‌جایی می‌کند.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\gamma"'] & 0 \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

برهان . رجوع شود به [۲۷، صفحه‌ی ۳۰]. □

**تعریف ۱.۱.۱۵.** *فرض کنید $M$ و $E$ دو $R$-مدول و $M \subseteq E$ باشد. $E$ را یک توسیع اساسی $M$ گوییم اگر وتنها اگر به ازای هر عنصر غیر صفر $e \in E$، عنصر $r \in R$ موجود باشد به‌طوری که $re \in M$ و $re \neq 0$.*

**لم ۱.۱.۱۶.** *فرض کنید $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow K \longrightarrow 0$ یک دنباله‌ی دقیق کوتاه از $R$-مدول‌ها و $R$-همریختی‌ها باشد. اگر $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی $R$ باشد آن‌گاه دنباله‌ی $0 \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}} \longrightarrow K_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$ یک دنباله‌ی دقیق کوتاه از $R_{\mathfrak{p}}$-مدول‌ها و $R_{\mathfrak{p}}$-همریختی‌هاست.*

برهان . از آن‌جا که $R_{\mathfrak{p}}$ به عنوان $R$مدول یکدست است تابعگون $- \otimes R_{\mathfrak{p}}$ هردنباله‌ی دقیق را دقیق نگه می‌دارد و لذا حکم به‌وضوح برقرار است. $\square$

**تعریف ۱.۱.۱۷.** *مربع جابه‌جایی*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\
C \arrow[r, "g"'] & D
\end{tikzcd}$$

*از $R$-مدول‌ها و $R$-همریختی‌ها را یک مربع پیش رونده گوییم هرگاه به ازای هر $R$-مدول $X$ و $R$-همریختی‌های $p : B \longrightarrow X$ و $q : C \longrightarrow X$ با خاصیت $pf = q\alpha$، نتیجه شود که همریختی یکتایی مانند $r : D \longrightarrow X$ در*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddr, "p"] & \\
C \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "q"'] & D \arrow[dr, dotted, "r"] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

*با خاصیت $r\beta = p$ و $rg = q$ موجود است.*

هرگاه $f : A \longrightarrow B$ و $\alpha : A \longrightarrow C$ دو $R$-همریختی باشند همواره می‌توان مربع پیش رونده وابسته به این دو $R$-همریختی را به‌دست آورد. بدین منظور کافی است همریختی $\varphi : A \longrightarrow C \oplus B$ را به‌صورت

$a \rightsquigarrow (\alpha(a), -f(a))$ تعریف کرده و نمودار

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, dotted, "\beta"] \\ C \arrow[r, dotted, "g"'] & \frac{C\oplus B}{Im\varphi} \end{tikzcd}$$

را با درنظر گرفتن ریخت‌های $\beta : B \longrightarrow \frac{C\oplus B}{Im\varphi}$ و $g : C \longrightarrow \frac{C\oplus B}{Im\varphi}$ که به‌صورت $b \rightsquigarrow (0, b) + Im\varphi$ و $c \rightsquigarrow (c, 0) + Im\varphi$ تعریف می‌شوند، به $f$ و $\alpha$ وابسته کنیم. بررسی می‌کنیم که این مربع در واقع یک مربع پیش رونده است. فرض کنید $a$ عنصری در $A$ باشد. در این‌صورت

$$g\alpha(a) = (\alpha(a), 0) + Im\varphi \quad \text{و} \quad \beta f(a) = (0, f(a)) + Im\varphi$$

از آن‌جا که $Im\varphi = \{(\alpha(a), -f(a)) \,|a \in A\}$، به‌سادگی نتیجه می‌شود که $g\alpha(a) = \beta f(a)$ . در نتیجه مربع فوق جابه‌جایی است. اکنون فرض کنید $X$ یک $R$-مدول و $p : B \longrightarrow X$ و $q : C \longrightarrow X$ با خاصیت $pf = q\alpha$ موجود باشند. با تعریف ریخت $r : \frac{C\oplus B}{Im\varphi} \longrightarrow X$ به‌صورت $(c, b) + Im\varphi \rightsquigarrow q(c) + p(b)$ خواهیم داشت، $r\beta = p$ و $rg = q$.

**تعریف ۱.۱.۱۸.** *یک تحلیل انژکتیو برای $R$-مدول $M$، دنباله‌ی دقیقی از $R$-مدول‌ها و $R$-همریختی‌ها به شکل*

$$E = \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\epsilon} E^0 \xrightarrow{\partial_0^E} E^1 \xrightarrow{\partial_1^E} E^2 \xrightarrow{\partial_2^E} \cdots$$

*است که به ازای هر $j \in \mathbb{Z}$، $E^j$ انژکتیو است.*

**تعریف ۱.۱.۱۹.** *یک تحلیل پروژکتیو برای $R$-مدول $M$، دنباله‌ی دقیقی از $R$-مدول‌ها و $R$-همریختی‌ها به شکل*

$$P = \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2^P} P_1 \xrightarrow{\partial_1^P} P_0 \xrightarrow{\delta} M \longrightarrow 0$$

*است که به ازای هر $j \in \mathbb{Z}$، $P_j$ پروژکتیو است.*

**تعریف ۱.۱.۲۰.** *یک تحلیل یکدست برای $R$-مدول $M$، دنباله‌ی دقیقی از $R$-مدول‌ها و $R$-همریختی‌ها به شکل*

$$F = \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2^F} F_1 \xrightarrow{\partial_1^F} F_0 \xrightarrow{\delta} M \longrightarrow 0$$

*است که به ازای هر $j \in \mathbb{Z}$، $F_j$ یکدست است.*

**لم ۲۱.۱.۱.** *(لم ناکایاما): فرض کنید $R$ یک حلقه و $I \subseteq J(R)$ ایده‌آلی از آن باشد. اگر $M$ یک $R$-مدول متناهی‌مولد باشد که $M = IM$، آن‌گاه $M = ۰$ است.*

برهان . رجوع شود به [۲۵، قضیه‌ی ۲۰۲]. □

**لم ۲۲.۱.۱.** *هرگاه $۰ \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow ۰$ یک دنباله‌ی دقیق کوتاه از $R$-مدول‌ها و $R$-همریختی‌ها باشد آن‌گاه به ازای هر $R$-مدول مانند $B$، یک دنباله‌ی دقیق بلند به‌صورت*

$$\cdots \longrightarrow Tor_۱^R(A, B) \longrightarrow Tor_۱^R(A'', B) \longrightarrow A' \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B \longrightarrow A'' \otimes_R B \longrightarrow ۰$$

*موجود می‌باشد.*

برهان . رجوع شود به [۲۶، قضیه‌ی ۳۰۸]. □

**قضیه ۲۳.۱.۱.** *فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقه‌ی موضعی و $M$ یک $R$-مدول متناهی مولد باشد. دراین‌صورت، شرایط زیر معادلند.*

*الف) $M$ آزاد است،*

*ب) $M$ یکدست است،*

*پ) $Tor_۱^R(k, M) = ۰$ است.*

برهان . (الف) $\Longleftarrow$ (ب): از آن‌جا که هر $R$-مدول آزاد یکدست است پس $M$ یکدست است.

(ب) $\Longleftarrow$ (پ): دنباله‌ی دقیق $۰ \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow R \longrightarrow k \longrightarrow ۰$ را در نظر بگیرید. بنابر ۲۲.۱.۱، دنباله‌ی دقیق

$$\cdots \longrightarrow Tor_۱^R(R, M) \longrightarrow Tor_۱^R(k, M) \longrightarrow \mathfrak{m} \otimes_R M \longrightarrow R \otimes_R M \longrightarrow k \otimes_R M \longrightarrow ۰$$

به‌دست می‌آید. چون $R$ به عنوان $R$-مدول پروژکتیو است، $Tor_۱^R(R, M) = ۰$. از طرفی چون $M$ یکدست است، از اثر تابعگون $- \otimes_R M$ بر هر دنباله‌ی دقیق، یک دنباله‌ی دقیق به‌دست می‌آید. بنابراین در دنباله‌ی بلند فوق $Tor_۱^R(k, M)$

نیز صفر می‌باشد.

(پ) $\Longleftarrow$ (الف): فرض کنید $x_1, x_2, \cdots, x_n$ عناصری از $M$ باشند که تصویر آن‌ها در $\frac{M}{\mathfrak{m}M}$ پایه‌ای برای این فضای برداری باشد. در این‌صورت $x_1, x_2, \cdots, x_n$، $M$ را تولید می‌کنند. فرض کنید $F$ یک $R$-مدول آزاد با پایه‌ی $e_1, e_2, \cdots, e_n$ و $R$-همریختی $\varphi : F \longrightarrow M$ به‌صورت $\varphi(e_i) = x_i$ باشد. همچنین فرض کنید $ker(\varphi) = E$.

لذا از دنباله‌ی دقیق $0 \longrightarrow E \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$، دنباله‌ی دقیق

$$0 \longrightarrow k \otimes_R E \longrightarrow k \otimes_R F \xrightarrow{1_k \otimes_R \varphi} k \otimes_R M \longrightarrow 0$$

به‌دست می‌آید که $k \otimes_R F$ و $k \otimes_R M$ به عنوان فضای برداری روی $k$ دارای بعدی یکسان می‌باشند. لذا $1_k \otimes_R \varphi$ یکریختی است. ودر نتیجه $k \otimes_R E = 0$ است. از طرفی $k \otimes_R E \cong \frac{E}{\mathfrak{m}E}$. در نتیجه $E = \mathfrak{m}E$. از آن‌جا که $R$ نوتری و $M$ متناهی‌مولد است، $E$ به‌عنوان زیر مدولی از $M$ متناهی‌مولد است. در نتیجه بنابر لم ناکایاما، $E = 0$ می‌باشد. پس $M \cong F$ و $M$ آزاد است. $\square$

## ۲.۱ همبافت و همولوژی

در این بخش تعاریف و مفاهیم مقدماتی روی رسته‌ی همبافت‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس ضمن معرفی یک سری علائم ونشانه‌ها، به اثبات قضایا و نتایج مربوطه می‌پردازیم. سرانجام با اثبات یک رابطه‌ی هم ارزی مهم که اساس کار فصل بعد را تشکیل می‌دهد بخش را به اتمام می‌رسانیم. علاوه بر استاندارد بودن تمامی تعاریف ارائه شده در این بخش، علایم و نشانه‌های به‌کار برده شده نیز تا حد زیادی استاندارد می‌باشند.

**تعریف ۱.۲.۱.** *یک $R$-همبافت $X$، دنباله‌ای از $R$-مدول‌های $X_l$ و $R$-همریختی‌های $\partial_l^X$ به‌صورت*

$$X = \cdots X_{l+2} \xrightarrow{\partial_{l+2}^X} X_{l+1} \xrightarrow{\partial_{l+1}^X} X_l \xrightarrow{\partial_{l-1}^X} X_{l-1} \xrightarrow{\partial_{l-2}^X} X_{l-2} \cdots$$

*می‌باشد که در آن، ترکیب دو همریختی متوالی، همریختی صفراست. یعنی به ازای هرعدد صحیح $l$، $\partial_l^X \partial_{l+1}^X = 0$.*

*$X_l$ را $R$-مدول مرتبه‌ی $l$-ام ، و $\partial_l^X$ را دیفرانسیل مرتبه‌ی $l$-ام می‌نامیم.*

یک همبافت $X$ متمرکز در درجه‌های $v$ تا $u$ نامیده می‌شود، اگر برای هر $l < v$ و $l > u$، $X_l = 0$ باشد. و هر همبافت $X$، متمرکز در درجه‌ی صفر با مدول $X_0$ شناخته می‌شود. به عبارتی مدول $M$ تلقی یک همبافت به‌صورت $M = 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ با $M$ از درجه‌ی صفر است. این همبافت می‌تواند در هر درجه‌ای به‌جز درجه‌ی صفر، دارای صفر باشد. یعنی

$$M = \cdots 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \cdots 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \cdots$$

اما ما از نوشتن صفرهای غیرضروری خودداری می‌کنیم. برهمین اساس همبافت صفر را با $0$ نمایش می‌دهیم.

**نمادگذاری ۱.۲.۲.** *برای یک $R$-همبافت $X$ به ازای هرعدد صحیح $l$، نمادگذاری‌های*

$$C_l^X = Coker \partial_{l+1}^X$$

$$Z_l^X = Ker \partial_l^X$$

$$B_l^X = Im \partial_{l+1}^X$$

*را به‌کار می‌بریم. هردوی $B_l^X$ و $Z_l^X$ زیر مدول‌هایی از $X_l$ می‌باشند و $B_l^X \subseteq Z_l^X$.*

**تعریف ۱.۲.۳.** *مدول*

$$H_l(X) = \frac{Z_l^X}{B_l^X}$$

*را مدول همولوژی مرتبه‌ی $l$-ام همبافت $X$ می‌نامیم. همچنین $R$-همبافت همولوژی $H(X)$ به ازای هر $l \in \mathbb{Z}$، با قرار دادن $H(X)_l = H_l(X)$ و $\partial_l^{H(X)} = 0$ تعریف می‌شود.*

**تعریف ۱.۲.۴.** *همبافت $X$ را به‌طور همولوژیکی بدیهی گوییم هرگاه $H(X) = 0$. یعنی برای هر عدد صحیح $l$، $B_l(X) = Z_l(X)$ باشد.*

**نکته ۵.۲.۱.** *بنابر تعریف ارائه شده در بالا یک $R$-همبافت به طور همولوژیکی بدیهی، همان چیزی است که به‌طور کلاسیک دنباله‌ی دقیق از $R$-مدول‌ها خوانده می‌شود.*

**تعریف ۶.۲.۱.** *اگر $m$ یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه عمل‌گر انتقال*[1] *به اندازه‌ی $m$ روی همبافت $X$ که با $\sum^m X$ مشخص می‌شود، نشان دهنده‌ی تغییر مکان $m$ درجه‌ای همبافت $X$ به سمت چپ است که در آن، مدول و دیفرانسیل مرتبه‌ی $l$-ام به‌صورت*

$$(\Sigma^m X)_l = X_{l-m}$$

*و*

$$\partial_l^{\Sigma^m X} = (-1)^m \partial_{l-m}^X$$

*تعریف می‌شوند.*

**مثال.** *برای همبافت $X$، همبافت‌های $\sum^2 X$ و $\sum^3 X$ به شکل زیر می‌باشند.*

$$X = \cdots X_{l+2} \xrightarrow{\partial_{l+2}^X} X_{l+1} \xrightarrow{\partial_{l+1}^X} X_l \xrightarrow{\partial_{l-1}^X} X_{l-1} \xrightarrow{\partial_{l-2}^X} X_{l-2} \cdots$$

$$\Sigma^2 X = \cdots X_l \xrightarrow{\partial_l^X} X_{l-1} \xrightarrow{\partial_{l-1}^X} X_{l-2} \xrightarrow{\partial_{l-2}^X} X_{l-3} \xrightarrow{\partial_{l-3}^X} X_{l-4} \cdots$$

$$\Sigma^3 X = \cdots X_{l-1} \xrightarrow{-\partial_{l-1}^X} X_{l-2} \xrightarrow{-\partial_{l-2}^X} X_{l-3} \xrightarrow{-\partial_{l-3}^X} X_{l-4} \xrightarrow{-\partial_{l-4}^X} X_{l-5} \cdots$$

هرگاه $m \in \mathbb{Z}$ زوج باشد، $H_l(\Sigma^m X) = \frac{ker\partial_{l-m}^X}{Im\partial_{l-m+1}^X} = H_{l-m}(X)$. و زمانی‌که $m \in \mathbb{Z}$ فرد است با توجه به این‌که به ازای هر $R$-همریختی $f$، $ker(f) = ker(-f)$ و $Im(f) = Im(-f)$، در نتیجه تساوی $H_l(\Sigma^m X) = \frac{ker-\partial_{l-m}^X}{Im-\partial_{l-m+1}^X} = H_{l-m}(X)$ برقرار است و لذا نتیجه‌ی زیر را داریم.

**نتیجه ۷.۲.۱.** *با توجه به تعاریف و توضیحات فوق همواره رابطه‌ی $H_l(\Sigma^m X) = H_{l-m}(X)$ برقرار است.*

[1] Shift

**تعریف ۸.۲.۱.** هرگاه $X$ و $Y$ دو $R$-همبافت باشند، یک ریخت $\alpha : X \longrightarrow Y$ یک خانواده‌ی $\alpha = (\alpha_l)_{l\in\mathbb{Z}}$ از $R$-همریختی‌های $\alpha_l : X_l \longrightarrow Y_l$ است که نمودار

$$\begin{tikzcd}
X = \cdots \arrow[r] & X_{l+1} \arrow[r, "\partial^X_{l+1}"] \arrow[d, "\alpha_{l+1}"'] & X_l \arrow[r, "\partial^X_l"] \arrow[d, "\alpha_l"'] & X_{l-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{l-1}"'] & \cdots \\
Y = \cdots \arrow[r] & Y_{l+1} \arrow[r, "\partial^Y_{l+1}"'] & Y_l \arrow[r, "\partial^Y_l"'] & Y_{l-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

را جابه‌جایی کند.

**تعریف ۹.۲.۱.** برای یک $r \in R$ و $R$-همبافت $X$، ریخت $r_X : X \longrightarrow X$ یک هموتوتی خوانده می‌شود هرگاه حاصل‌ضرب در $r$ باشد و به‌صورت

$$\begin{tikzcd}
X = \cdots \arrow[r] & X_{l+1} \arrow[r] \arrow[d, "r."'] & X_l \arrow[r] \arrow[d, "r."'] & X_{l-1} \arrow[r] \arrow[d, "r."'] & \cdots \\
X = \cdots \arrow[r] & X_{l+1} \arrow[r] & X_l \arrow[r] & X_{l-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

داده می‌شود. در همین راستا ریخت همانی روی $X$ که به‌صورت

$$\begin{tikzcd}
X = \cdots \arrow[r] & X_{l+1} \arrow[r] \arrow[d, "1_X"'] & X_l \arrow[r] \arrow[d, "1_X"'] & X_{l-1} \arrow[r] \arrow[d, "1_X"'] & \cdots \\
X = \cdots \arrow[r] & X_{l+1} \arrow[r] & X_l \arrow[r] & X_{l-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

است را با $1_X$ نمایش می‌دهیم.

هر ریخت $\alpha : X \longrightarrow Y$ ریخت $H(\alpha) : H(X) \longrightarrow H(Y)$ را در همولوژی القا می‌کند که به ازای هر $l \in \mathbb{Z}$ به‌صورت $z_l + B^X_l \rightsquigarrow \alpha_l(z_l) + B^Y_l$ تعریف می‌شود.

**تعریف ۱۰.۲.۱.** یک ریخت $\alpha : X \longrightarrow Y$ از $R$-همبافت‌ها را یکریختی می‌نامیم هرگاه یک ریخت $\alpha^{-1} : Y \longrightarrow X$ موجود باشد که $\alpha^{-1}\alpha = 1_X$ و $\alpha\alpha^{-1} = 1_Y$.

یکریختی‌ها را به شکل $\cong$ در کنار پیکان‌هایشان نمایش داده و دو $R$-همبافت $X$ و $Y$ یکریخت هستند اگر وتنها اگر یک یکریختی $X \xrightarrow{\cong} Y$ موجود باشد.