چکیده

این پایان نامه شامل دو بخش است.

در بخش اول به معرفی متریکی ریمانی روی کلاف مماس کروی از یک منیفلد ریمانی پرداخته و به کمک آن خواصی از کلاف مماس از جمله ثابت بودن انحنای این فضا و انیشتینی بودن آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در بخش دوم، رده‌ای دیگر از متریک های ریمانی روی کلاف مماس از یک منیفلد ریمانی معرفی شده و میدان‌های برداری همدیس روی کلاف مماس شامل این متریک مطالعه می‌شود.

کلمات کلیدی : کلاف کروی مماس، منیفلد انیشتینی، تبدیل همدیس بینهایت کوچک، نگهدارنده تار، موضعاً ژئودزیک.

فهرست مندرجات

مقدمه

کلاف مماس TM از منیفلد ریمانی (M,g) توسط ریاضیدانان متعددی مورد مطالعه قرار گرفته است. اغلب با استفاده از متریک ریمانی g روی منیفلد M یک متریک روی کلاف مماس آن یعنی TM القا می‌کنند. یکی از طبیعی‌ترین این متریک ها، متریکی است که توسط ساساکی تعریف شده است و در بیشتر مقالات مانند [?، ?، ?، ?، ?] استفاده شده است. روی TM متریک های دیگری نیز قابل تعریف است که مشابه با متریک ساساکی از روی منیفلد پایه (M,g) ساخته می‌شوند. از جمله می‌توان به متریک ترفیع یافته از نوع قطری طبیعی اشاره کرد که در بخش دوم از فصل دوم این پایان نامه به مطالعه آن می‌پردازیم. موضوع اصلی این پایان نامه مطالعه‌ی زیر فضایی از کلاف مماس TM است. در اینجا زیر مجموعه $S_x^r = \{y \in T_xM : g_x(y,y) = r^2\}$ از T_xM یعنی مجموعه تمام بردارهای مماس بر M در نقطه x با طول r استفاده می‌شود. کلاف کروی مماس به شعاع r یعنی $\cup_{x\in M} S_x^r$ را با T_rM نمایش خواهیم داد. متریک قطری طبیعی روی TM بر روی T_rM به عنوان یک زیر فضای TM یک متر القا می‌کند که با استفاده از این متریک تانسور انحنا و تانسور ریچی آن به شعاع r و منیفلد پایه وابسته است.

این پایان نامه مشتمل بر ۳ فصل است. در فصل اول، تعاریف و قضایای مورد نیاز را ارائه می‌دهیم و با توجه به تعاریف و قضایای بیان شده، در فصل دوم که مطالب آن بر گرفته از مقاله‌ی [?] می‌باشد، به تعریف متریک $\widetilde{G}$ روی کلاف مماس TM بصورت زیر می‌پردازیم.

$$\widetilde{G} = \widetilde{G}_{ij}^{(1)} dx^i \otimes dx^j + \widetilde{G}_{ij}^{(2)} \delta y^i \otimes \delta y^j.$$

سپس ابررویه $T_rM \subseteq TM$ را با متریک G القا شده از $\widetilde{G}$ مجهز می‌کنیم. التصاق لوی – چویتای مربوط به این متریک را محاسبه کرده و از آن برای محاسبه تانسور انحنای ریمان و انحنای ریچی استفاده می‌کنیم و در ادامه قضایای زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه : فرض کنیم (M,g)، یک منیفلد ریمانی باشد. در این صورت T_rM کلاف کروی مماس آن با متریک G القا شده از متریک $\widetilde{G}$ ازکلاف مماس TM، دارای انحنای ثابت غیر صفر

نمی‌باشد، به عبارت دیگر فرم فضایی ندارد.

قضیه : فرض کنیم (M,g) یک منیفلد ریمانی n بعدی با انحنای ثابت c باشد. در اینصورت کلاف کروی مماس آن یعنی T_rM با متریک G انیشتینی است. به عبارت دیگر ثابت حقیقی ρ ی وجود دارد، به طوری که

$$Ric(X,Y) = \rho G(X,Y).$$

اگر وفقط اگر

$$c_۱ = \frac{r^۲ d_۱ n}{n-۲}, \quad c_۲ = \frac{d_۱ n}{c(n-۲)}, \quad \rho = \frac{c(n-۱)^۲(n-۲)}{r^۲ d_۱ n^۲}.$$

در فصل سوم، میدان‌های برداری همدیس روی کلاف مماس با متریک ترفیع‌یافته G تعریف شده به صورت

$$G = ۲ h_{ij}(x) dx^i \otimes \delta y^j + h_{ij}(x) \delta y^i \otimes \delta y^j.$$

را بررسی می‌کنیم. در رابطه فوق، $h_{ij}(x) = a(L^۲) g_{ij}(x)$ مولفه‌های یک متریک لاگرانژ تعمیم یافته و $g_{ij}(x)$ مولفه‌های یک متریک ریمانی می‌باشند.

در فصل سوم، پس از بیان لم‌ها و قضایای متعدد، قضیه اصلی زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه : فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی $n-$ بعدی و TM کلاف مماس آن با متریک G باشد. در این صورت هر میدان برداری همدیس ترفیع افقی روی TM یک میدان برداری کیلینگ روی TM است و همچنین یک میدان برداری کیلینگ روی M القا می‌کند.

که مطالب این فصل توسط نگارنده پایان نامه بدست آمده است [?].

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

تعاریف و مفاهیمی را که در این پایان‌نامه نیاز داریم، به اختصار در این فصل ارائه می‌دهیم.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ . فرض کنیم M یک مجموعه ناتهی، O زیر مجموعه بازی از R^n و U یک زیر مجموعه M باشد. نگاشت دو سویی $x : U \longrightarrow O \subseteq R^n$ را یک کارت n بعدی، U را حوزه کارت و زوج (x,U) را یک کارت موضعی می‌نامیم. اگر تابع $P^i : R^n \longrightarrow R$ به صورت $t^i \longrightarrow (t^۱,\ldots,t^n)$ تعریف شود آنگاه توابع $x^i = P^i ox : U \longrightarrow R$ را توابع مختصاتی [۱] می‌گویند. به همین دلیل زوج (x,U) را دستگاه مختصات موضعی [۲] نیز می‌نامند. لذا هر نقطه m روی U توسط n تایی از توابع حقیقی $(x^۱,\ldots,x^n)$ معرفی می‌شود.

$$x : U \subseteq M \longrightarrow R^n,$$
$$m \longrightarrow (x^۱(m),\ldots,x^n(m)).$$

---

[۱] Coordinate function

[۲] Local coordinate system

تعریف ۲.۱.۱ . فرض کنیم (x,U) و (y,V) دو کارت موضعی $n-$ بعدی روی M باشند. گوئیم این دو کارت C^k- مرتبط [۳] هستند اگر نگاشت

$$yox^{-1} : x(U \cap V) \longrightarrow y(U \cap V),$$

که آنرا نگاشت تغییر کارت می‌نامیم و معکوس آن توابعی از کلاس C^k بین دو باز R^n باشند. به عبارت دیگر $x(U \cap V)$ و $y(U \cap V)$ بازهایی از R^n بوده و yox^{-1} و xoy^{-1} از کلاس C^k باشند. در حالت $U \cap V = \phi$ بنا به تعریف این دو کارت را C^k- مرتبط می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱ . گوئیم یک خانواده از کارت های C^k مرتبط $\{(x_\alpha, U_\alpha)\} \in A$ تشکیل یک اطلس C^K، $n-$ بعدی روی M می‌دهند اگر حوزه تعریف آنها M را بپوشاند، یعنی $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

تعریف ۴.۱.۱ . یک اطلس C^k از M را ماکزیمال [۴] گوئیم اگر زیر مجموعه واقعی یک اطلس C^k دیگر نباشند.

تعریف ۵.۱.۱ . مجموعه M همراه با یک اطلس C^k ماکزیمال $n-$ بعدی را یک منیفلد دیفرانسیل پذیر [۵] $n-$ بعدی از کلاس C^k می‌گوئیم.

خانواده تمام بردارهای مماس بر M در نقطه m تشکیل یک فضای برداری می‌دهد که آن را با T_mM نمایش می‌دهیم. به راحتی ثابت می‌شود که خانواده مشتقات جزئی $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^n$ یک پایه برای T_mM است. بنابراین هر بردار مماس X_m را می‌توان به صورت $X_m = \sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ نوشت.

فرض کنید $TM = \cup_{m \in M} T_mM$. در این صورت TM یک منیفلد دیفرانسیل پذیر $2n-$ بعدی است که آن را کلاف مماس [۶] یا منیفلد مماس می‌نامند. مختصات هر نقطه در TM توسط $2n$ تائی (x^i, y^i) مشخص می‌شود که در آن x^i ها مختصات نقطه m و y^i ها مولفه‌های بردار مماس X_m هستند.

---

[۳] K-related

[۴] maximal

[۵] Differentiable manifold

[۶] Tangent bundle, Tangent manifold

فرض کنید $T_{X_m}(TM)$ فضای مماس بر منیفلد TM در X_m باشد. مشابه آنچه که در اثبات پایه بودن $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ گفته شده است، به راحتی ثابت می‌شود که $2n$ تائی $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ پایه‌ای موضعی برای $T_{X_m}(TM)$ است. قرار می‌دهیم:

$$T(TM) = \cup_{X_m \in TM} T_{X_m}(TM).$$

در این صورت $T(TM)$ نیز یک منیفلد دیفرانسیل پذیر $4n-$ بعدی است که آن را کلاف مماس دوم M می‌نامند.

فرض کنید (x', U') با مولفه‌های $(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ یک دستگاه مختصات دیگر در همسایگی نقطه $m \in M$ باشد. آنگاه

$$x : U \longrightarrow R^n,$$
$$m \longrightarrow (x^1(m), \ldots, x^n(m)).$$
$$x' : U' \longrightarrow R^n,$$
$$m \longrightarrow (x^{1'}(m), \ldots, x^{n'}(m)).$$

نگاشت تغییر کارت عبارت است از

$$x' o x^{-1} : x(U \cap U') \longrightarrow x'(U \cap U'),$$
$$(x^1(m), \ldots, x^n(m)) \longrightarrow (x^{1'}(m), \ldots, x^{n'}(m)).$$

رابطه اخیر را به اختصار به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$x^{i'} = x^{i'}(m), \qquad i' = 1, \ldots, n. \tag{۱.۱}$$

همچنین با توجه به قرار داد جمع بندی در هندسه دیفرانسیل مبنی بر حذف علامت سیگما هنگامی که یک اندیس در بالا و پائین تکرار شود، داریم:

$$X_m =^U y^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$X_m =^{U'} y^{i'} \tfrac{\partial}{\partial x^{i'}}. \qquad i' = 1 \ldots, n.$$

در نتیجه داریم:

$$y^{i'} = y^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \tag{۲.۱}$$

بنابراین ژاکوبین ماتریس تغییر مختصات داده شده با توجه به روابط (??) و (??) به صورت زیر خواهد بود

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} & \frac{\partial x^{i'}}{\partial y^i} \\ \frac{\partial y^{i'}}{\partial x^i} & \frac{\partial y^{i'}}{\partial y^i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} & ۰ \\ y^a \frac{\partial^۲ x^{i'}}{\partial x^i \partial x^a} & \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \end{pmatrix}.$$

با توجه به قضیه تابع معکوس، چون ژاکوبین مثبت است می‌توان گفت عکس نگاشت تغییر مختصات موجود و دیفرانسیل پذیر است. چون $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ پایه‌ای برای $T_{X_m}(T_mM)$ است، لذا

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = A^i_{i'} \frac{\partial}{\partial x^i} + B^i_{i'} \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

با اثر دادن طرفین رابطه بر x^k داریم:

$$A^k_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}},$$

و با اثر دادن طرفین رابطه بر y^k داریم:

$$B^k_{i'} = \frac{\partial y^k}{\partial x^{i'}} = y^{a'} \frac{\partial^۲ x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{a'}}.$$

بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^۲ x^i}{\partial x^{i'} \partial x^a} y^{a'} \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد

$$\frac{\partial}{\partial y^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial y^i}. \qquad (۳.۱)$$

تعریف ۶.۱.۱ . فرض کنیم $E \subseteq M$. یک میدان برداری X روی E تابعی است که به هر نقطه $m \in E$ یک بردار مماس X_m از T_mM را مربوط می‌کند. یعنی،

$$X : E \longrightarrow TM,$$

$$m \mapsto X_m \in T_mM.$$

گوئیم یک میدان برداری از کلاس C^∞ است هرگاه دامنه آن در M باز بوده و برای هر m در دامنه X و هر $f \in C^\infty(E)$، $X_m f$ نیز عضوی از $C^\infty(E)$ باشد که در آن

$$X_m f = X(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}, \qquad i = ۱, \ldots, n.$$

در اینجا گروه تبدیلات یک پارامتری موضعی وابسته به یک میدان برداری روی یک منیفلد را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۷.۱.۱ . فرض کنیم X یک میدان برداری از کلاس C^k روی باز W باشد. به ازای هر m از W عددی مانند ϵ، یک همسایگی از m مانند U در W و یک خانواده یکتا از دیفئومورفیسمهای C^k مانند $\{\varphi_t\}$ وجود دارد، به طوری که

$$\varphi_t : U \longrightarrow \varphi_t(U) \subseteq W,$$

و φ_t با شرط $|t| < \epsilon$ در موارد زیر صدق می‌کند:

الف) نگاشت $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \longrightarrow W$ از کلاس C^k است،

$$(t, m) \longrightarrow \varphi_t(m).$$

ب) $(|t| < \epsilon, |t+s| < \epsilon) \qquad \varphi_\circ = Id, \varphi_s.\varphi_t = \varphi_{t+s},$ ،

ج) اگر $m \in U$ آنگاه X_m بردار سرعت منحنی $\varphi_m : t \longrightarrow \varphi_t(m)$ است، به بیان دیگر

$$X(m) = \frac{d}{dt}\varphi_t(m)|_{t=\circ}.$$

در این صورت $\{\varphi_t\}$ از دیفئومورفیسمهای موضعی را گروه یک پارامتری تولید شده توسط X می‌نامیم. بنابراین هر میدان برداری یک گروه موضعی یک پارامتری تعریف می‌کند و بر عکس. میدان برداری X را کامل نامیم هرگاه گروه موضعی یک پارامتری آن به ازاء هر عدد حقیقی t تعریف شود، یا به عبارت دیگر گروه موضعی آن یک گروه سرتاسری باشد.

تعریف ۸.۱.۱ . فرض کنید $X, Y \in \chi(M)$. در این صورت نگاشت

$$[X, Y] : C^\infty(TM) \longrightarrow C^\infty(TM),$$

که در آن

$$[X, Y].f = X.(Y.f) - Y(X.f),$$

کروشه لی دو میدان برداری Y, X نامیده می‌شود.

به راحتی می‌توان نشان داد که کروشه دارای خواص زیر است.

$\forall X, Y, Z \in \chi(M),$

الف) $[X,Y] = -[Y,X],$

ب) اتحاد ژاکوبی $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]] = 0,$

ج) $[X,fY] = (X.f)Y+f[X,Y],$

د) $[fX,Y] = f[X,Y]-(Y.f)X.$

۲.۱ تانسور هموردا، تانسور پادوردا و تانسور از نوع (p,q) روی منیفلدها

تعریف ۱.۲.۱ . فرض کنیم M یک منیفلد و T_mM فضای مماس بر M در m باشد. می‌دانیم T_mM یک فضای برداری است. هر نگاشت $p-$ خطی $t : T_mM\times\ldots\times T_mM \longrightarrow R$، روی T_mM را $p-$**تانسور هموردا**[۷] یا یک تانسور از نوع $(0,p)$ گوئیم. مجموعه تانسورهای نوع $(0,p)$ را با $\otimes_p^0(T_mM)$ نمایش می‌دهیم. $\otimes_p^0(T_mM)$ با عمل جمع و ضرب اسکالر تعریف شده به صورت

$$(t_1+t_2)(X_1,\ldots,X_p) = t_1(X_1,\ldots,X_p)+t_2(X_1,\ldots,X_p),$$

$$(\lambda t)(X_1,\ldots,X_p) = \lambda t(X_1,\ldots,X_p), \qquad \lambda \in R,$$

یک فضای برداری روی R است. اگر (x,U) یک کارت مختصاتی در همسایگی m و $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_m\}$ پایه طبیعی T_mM وابسته به این مختصات و $\{(dx^i)_m\}$ پایه دوگان پایه فوق باشد، آنگاه تانسور از نوع $(0,p)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$t = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} t_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(dx^{\alpha_1})_m\otimes\ldots\otimes(dx^{\alpha_p})_m, \qquad (I)$$

که در آن $t_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}\in R$ مقادیری حقیقی هستند که آنها را مولفه‌های تانسور t می‌نامیم.

مثال ۱. فرض کنیم $f : M \longrightarrow R$ دیفرانسیل پذیر باشد. در این صورت $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$ یک تانسور هموردا از نوع $(0,1)$ روی M است که $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ ها مولفه‌های آن هستند.

[۷] covariant tensor

قرار داد جمع‌بندی [۸]: اگر اندیس یکبار در بالا و یکبار در پایین تکرار شود آنرا جمع‌بندی شده می‌نامیم و از نوشتن علامت $\sum$ برای سهولت محاسبات خودداری می‌نماییم. به عنوان مثال در عبارت $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i$، i اندیس جمع‌بندی می‌باشد که آنرا به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\omega = \omega_i dx^i.$$

به همین ترتیب چون در عبارت (I)، $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ اندیس‌های جمع‌بندی هستند، پس t به صورت زیر نوشته می‌شود

$$t = t_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(dx^{\alpha_1})_m \otimes \ldots \otimes (dx^{\alpha_p})_m.$$

تعریف ۲.۲.۱ . فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر و T_mM فضای مماس بر M در نقطه m باشد. قرار می‌دهیم.

$$\otimes_0^p(T_mM) = \otimes_p^0((T_mM)^*),$$

اعضای $\otimes_0^p(T_mM)$ را تانسور پادوردا از نوع $(p,0)$ می‌نامیم. بنابراین یک تانسور پادوردا از نوع $(p,0)$ عبارتست از یک تابع $p-$ خطی به صورت زیر

$$t : T_m^*M \times \ldots \times T_m^*M \longrightarrow R.$$

اگر (x,U) یک کارت مختصاتی در همسایگی m و $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_m\}$ پایه طبیعی وابسته به این مختصات باشد، آنگاه با توجه به قرار داد جمع‌بندی یک تانسور پادوردا از نوع $(p,0)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$t = t^{j_1\cdots j_p}(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}})_m \otimes \ldots \otimes (\frac{\partial}{\partial x^{j_p}})_m.$$

تعریف ۳.۲.۱ . فرض کنیم M یک منیفلد و T_mM فضای مماس بر M در m باشد. یک تانسور از نوع (p,q) عبارتست از نگاشت $(p+q)-$ خطی

[۸] Summation Convention

$t : T_mM \times \ldots \times T_mM \times T^*_mM \times \ldots \times T^*_mM \longrightarrow R$. این نگاشت را تانسور $q-$ مرتبه هموردا و $p-$ مرتبه پادوردا می‌نامیم. اگر در روی منیفلد M فرض کنیم T_mM و T^*_mM فضای مماس و دوگان مماس با پایه‌های $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ و $\{dx^i\}$ باشند، بحث پایه برای فضای تانسورهای هموردا را می‌توان برای فضای تانسورهای از نوع (p,q) نیز به طور مشابه تعمیم داده و نشان داد که هر تانسور از نوع (p,q) روی منیفلد M به صورت زیر در مختصات (x,U) با توجه به قرار داد جمع‌بندی نوشته می‌شود.

$$t = t^{j_1 \ldots j_p}_{i_1, \ldots, i_q} (dx^{i_1})_m \otimes \ldots \otimes (dx^{iq})_m \otimes (\frac{\partial}{\partial x^{j_1}})_m \otimes \ldots \otimes (\frac{\partial}{\partial x^{j_p}})_m$$

۳.۱ التصاق خطی و التصاق ریمانی

تعریف ۱.۳.۱ . منظور از یک **متریک ریمان** [۹] روی منیفلد M، یک تانسور g از نوع $(0,2)$ است، به طوری که

الف) متقارن باشد، $\forall X, Y \in \chi(M), \qquad g(X,Y) = g(Y,X),$

ب) مثبت معین باشد. $g(X,X) > 0, \quad g(X,X) = 0 \Longleftrightarrow X = 0.$

تعریف ۲.۳.۱ . منظور از یک **متریک شبه ریمان** [۱۰] روی منیفلد M یک تانسور g از نوع $(0,2)$ است، بطوری که

الف) متقارن باشد، $\forall X, Y \in \chi(M), \qquad g(X,Y) = g(Y,X),$

ب) اگر به ازاء هر $Y \in \chi(M)$ داشته باشیم $g(X,Y) = 0$ آنگاه $X = 0$.

تعریف ۳.۳.۱ . یک التصاق خطی (یا آفین)[۱۱] روی منیفلد M عبارت است از نگاشت

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M),$$

---

[۹] Riemannian metric

[۱۰] Pseudo Riemannian metric

[۱۱] Linear connection

$$(X,Y) \longrightarrow \nabla_X Y,$$

که دارای شرایط زیر می‌باشد.

$$\forall X,Y,Z \in \chi(M),\ \ f,g \in C^{\infty}(M),$$

$$\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \tag{۱}$$

$$\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y, \tag{۲}$$

$$\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z. \tag{۳}$$

تعریف ۴.۳.۱ . فرض کنیم g یک متریک ریمان (یا شبه ریمان) روی یک منیفلد M باشد. التصاق خطی را **سازگار** [۱۲] با متریک g نامیم هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$X.g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \qquad\qquad \forall X,Y,Z \in \chi(M).$$

تعریف ۵.۳.۱ . فرض کنیم T یک تانسور از نوع $(\circ, r)$ باشد. دیفرانسیل هموردا ∇T از T یک تانسور از نوع $(\circ, r+1)$ است که توسط رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\nabla T(Y_1,\ldots,Y_r,Z) = Z(T(Y_1,\ldots,Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1,\ldots,Y_r)$$
$$- \ldots - T(Y_1,\ldots,Y_{r-1},\nabla_Z Y_r).$$

برای هر $Z \in \chi(M)$، مشتق همموردای $\nabla_Z T$ از T نسبت به Z یک تانسور از نوع $(\circ, r+1)$ می‌باشد که توسط رابطه زیر داده می‌شود.

$$\nabla_Z T(Y_1,\ldots,Y_r) = \nabla T(Y_1,\ldots,Y_r,Z).$$

بنابر تعریف بالا داریم:

$$\nabla_X g(Y,Z) = \nabla g(Y,Z,X) = X.g(Y,Z) - g(\nabla_X Y,Z) - g(Y,\nabla_X Z).$$

بنابراین سازگاری ∇ با متریک g معادل صفر شدن $\nabla_X g$ می‌باشد، یعنی داریم.

∇ با متریک g سازگار است اگر و تنها اگر

$$\forall X,Y,Z \in \chi(M), \quad (\nabla_X g)(Y,Z) = \circ.$$

[۱۲] Compatible

تعریف ۶.۳.۱ . تانسور تاب یک التصاق خطی ∇، یک میدان تانسوری از نوع $(۱,۲)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\tau : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M),$$

$$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

یک التصاق خطی ∇ را متقارن نامیم اگر تانسور تاب آن صفر شود، یعنی، داشته باشیم

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \qquad \forall X,Y \in \chi(M).$$

قضیه ۷.۳.۱ . (لوی − چویتا)[۱۳]: برای هر منیفلد ریمانی M، یک التصاق خطی یکتای ∇ روی M وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) ∇ متقارن است. ب) ∇ با متریک ریمان g سازگار است.

التصاق خطی بدست آمده را التصاق ریمانی یا التصاق لوی − چویتا گویند هرگاه برای هر $X,Y,Z \in \chi(M)$ در رابطه زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} ۲g(\nabla_X Y, Z) =& X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) + g(Z,[X,Y]) \\ & - g(Y,[X,Z]) - g(X,[Y,Z]). \end{aligned} \tag{۴.۱}$$

فرض کنید ∇ یک التصاق خطی روی M و $\{X_i\}_{i=۱}^n$ پایه‌ای برای $T_m M$ باشد. در این صورت ضرائب Γ_{ac}^b به صورت

$$\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}^k X_k, \qquad k = ۱, \ldots, n,$$

تعریف می‌شوند که به آنها ضرائب التصاق خطی یا علائم (کریستوفل)[۱۴] گویند. در اینجا برای سادگی فرض کرده‌ایم $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. حال اگر ∇ التصاق ریمانی باشد، آنگاه به راحتی ثابت می‌شود

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{۱}{۲} g^{km}[X_i(g_{jm}) + X_j(g_{mi}) - X_m(g_{ij})],$$

[۱۳] Levi-civita

[۱۴] Christoffel symbols

که در آن $[g^{ij}]$ ماتریس معکوس ماتریس $[g_{ij}]$ است.

تعریف ۸.۳.۱ . اگر ∇ یک التصاق خطی از M باشد، آنگاه تانسور انحنا ریمان [15] به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \qquad \forall X,Y,Z \in \chi(M).$$

اگر $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ پایه‌ای برای $\chi(M)$ باشد، آنگاه داریم:

$$R(X_i,X_j)X_k = R^l{}_{kij}X_l, \qquad m = 1,\dots,n,$$

که در آن به $R^l{}_{kij}$ ضرائب تانسور انحنا ریمان گفته می‌شود و داریم.

$$R^l{}_{kij} = X_i(\Gamma^l_{jk}) - X_j(\Gamma^l_{ik}) + \Gamma^l_{ir}\Gamma^r_{jk} - \Gamma^l_{jr}\Gamma^r_{ik}. \qquad (۵.۱)$$

با در نظر گرفتن

$$R_{lkij} = < X_l, R(X_i,X_j)X_k > = g_{lh}R^h{}_{kij},$$

خواص زیر برقرار خواهد بود:

$$\begin{aligned} &R_{lkij} = -R_{klij}, \\ &R_{lkij} = -R_{lkji}, \\ &R_{lkij} = R_{ijlk}, \\ &R_{lkij} + R_{kilj} + R_{ilkj} = 0, \\ &y_k y^l R^k{}_{lij} = 0. \end{aligned} \qquad (۶.۱)$$

تعریف ۹.۳.۱ . گوییم یک منیفلد دارای انحنای ثابت K است هرگاه تانسور انحنای آن در رابطه زیر صدق کند:

$$R^l{}_{kij} = K(\delta^l_i g_{jk} - \delta^l_j g_{ik}), \qquad \forall i,j,k,l. \qquad (۷.۱)$$

[15] Riemannian Curvature tensor

تعریف ۱۰.۳.۱ . گوییم منیفلد M به طور موضعی مسطح است، هرگاه

$$R^{l}{}_{kij} = 0, \qquad \forall i,j,k,l.$$

تعریف ۱۱.۳.۱ . منیفلد ریمانی (M,g) را **موضعاً متقارن** [۱۶] گوییم اگر تانسور انحنای ریمان در رابطه $\nabla R = 0$ صدق کند، که در آن ∇R به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla R(X,Y,Z,W) = (\nabla_X R)(Y,Z,W) = \nabla_X(R(Y,Z)W) - R(\nabla_X Y,Z)W$$
$$-R(Y,\nabla_X Z)W - R(Y,Z)\nabla_X W. \qquad (۸.۱)$$

تعریف ۱۲.۳.۱ . میدان تانسوری از نوع $(0,2)$ که از **اثر** [۱۷] تانسور انحنا روی مولفه‌های اول و چهارم آن بدست می‌آید، را تانسور ریچی یا انحنای ریچی گوییم و آن را با نماد RC نمایش می‌دهیم. مولفه‌های RC را با R_{ij} نمایش داده که بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R_{ij} := R^{k}_{\ ijk} = g^{km} R_{mijk}.$$

همچنین از اثر تانسور ریچی یک تابع بدست می‌آید که آنرا انحنای اسکالر نامیده و با S نشان می‌دهیم. یعنی،

$$S := tr_g RC = R^{i}_{i} = g^{ij} R_{ij}.$$

تعریف ۱۳.۳.۱ . اگر در منیفلد ریمانی (M,g) تانسور انحنای ریچی مضربی از تانسور متریک باشد آنگاه آن را **منیفلد انیشتینی** [۱۸] می‌گوییم. به عبارت دیگر،

$$Ric(X,Y) = \gamma g(X,Y), \qquad \forall X,Y \in \chi(M),$$

---

[۱۶] Locally symmetric

[۱۷] trace

[۱۸] Einstien

که در آن $\gamma : M \longrightarrow R$ یک تابع حقیقی مقدار است.

در اینجا چند اتحاد مهم را یاد آوری می‌کنیم.

فرض کنیم $X,Y,Z,T,W \in \chi(M)$ و ω یک ۱− فرمی باشد. در این صورت اتحادهای زیر برقرار می‌باشند:

اتحاد ریچی $(\nabla_X\nabla_Y\omega-\nabla_Y\nabla_X\omega)(Z) = -\omega(R(X,Y)Z),$

اتحاد دوم بیانچی $\nabla_X R(Y,Z,T,W) + \nabla_Y R(Z,X,T,W) + \nabla_Z R(X,Y,T,W) = \circ,$

اتحاد اول بیانچی $R(X,Y,Z,T) + R(Y,Z,X,T)R(Z,X,Y,T) = \circ.$

اتحادهای بالا به شکل موضعی زیر نوشته می‌شود.

اتحاد ریچی $\nabla_i\nabla_j\omega_h-\nabla_j\nabla_i\omega_h = -R^l{}_{kij}\omega_l,$

اتحاد دوم بیانچی $\nabla_a R_{ijk}{}^l+\nabla_i R_{jak}{}^l+\nabla_j R^l_{kai} = \circ,$

اتحاد اول بیانچی $R_{aijk} + R_{ijak} + R_{jaik} = \circ.$

۴.۱ نگاشت تصویر روی فضای مماس TTM

برای فضای مماس TTM به طور طبیعی می‌توان دو نگاشت تصویر در نظر گرفت. یکی از آن دو، نگاشت طبیعی τ از کلاف مماس (TTM,τ,TM) است و دیگری، نگاشت خطی π_* القاشده به وسیله π. در دستگاه مختصات موضعی داریم:

$$\tau : (x,y,X,Y) \in TTM \longrightarrow (x,y) \in TM,$$

و

$$\pi_* : (x,y,X,Y) \in TTM \longrightarrow (x,X) \in TM.$$

برای هر $u \in TM$ مجموعه $Ker\pi_{*,u} = \{z \in T(TM) : \pi_{*,u}(z) = \circ\}$ را تشکیل می‌دهیم.

تعریف ۱.۴.۱ . $VT(M)$ را به صورت

$$VT(M) = \bigcup_{u\in TM} Ker\pi_{*,u},$$

تعریف کرده آن را **کلاف برداری قائم** [۱۹] روی TM می‌نامیم.

می‌دانیم که $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ یک پایه برای $T(TM)$ است. چون $\pi_{*,u}$ نگاشت تصویر طبیعی از $T_u(TM)$ به TM باشد، داریم:

$$\pi_{*,u} : T_u(TM) \longrightarrow TM,$$

$$\pi_{*,u}(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial x^i},\ \pi_{*,u}(\frac{\partial}{\partial y^i}) = 0.$$

بنابر تعریف کلاف برداری قائم، مجموعه بردارهای $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ پایه‌ای برای $VT(M)$ می‌باشد. مجموعه تمام میدان‌های برداری قائم روی TM را با نماد $\chi^v(TM)$ نشان می‌دهیم. در هندسه کلاف مماس، توسیع برخی اشیای هندسی از منیفلد پایه M به فضای مماس TM از اهمیت بالایی برخوردار است. ترفیع از جمله ابزارهایی است که می‌توان به کمک آن توابع و میدان‌های برداری را از فضای M به TM به شمار آورد. در ادامه به تعریف و بررسی این دو ترفیع می‌پردازیم.

برای هر $u \in TM$، نگاشت خطی $l_{v,u} : T_{\pi(u)}M \longrightarrow T_uTM$ را به صورت

$$l_{v,u}(X^i(\pi(u))\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\pi(u)}) = X^i(\pi(u))\frac{\partial}{\partial y^i}|_u,$$

در نظر می‌گیریم. به راحتی می‌توان دید که $l_{v,u} : T_{\pi(u)}M \longrightarrow V_uTM$ یک ایزومرفیسم خطی است. این نگاشت، ترفیع قائم از کلاف مماس نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۴.۱ . فرض کنیم $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ یک میدان برداری روی M باشد. ترفیع قائم میدان برداری X، یک میدان برداری روی TM است که به صورت

$$X^v = (l_vX)(u) = l_{v,u}(X_{\pi(u)}) = X^i(\pi(u))\frac{\partial}{\partial y^i}|_u, \quad \forall u \in TM,$$

تعریف می‌شود.

---

[۱۹] Vertical vector bundle

تعریف ۳.۴.۱ . ترفیع کامل میدان برداری $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$، یک میدان برداری روی TM است که به صورت

$$X^c = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^j}y^j\frac{\partial}{\partial y^i},$$

زیر تعریف می‌شود.

اگر $f \in C^\infty(M)$، آنگاه مطابق دو تعریف فوق، $f^v = f \circ \pi$ و $f^c(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x^i}y^i$ به ترتیب ، ترفیع قائم و کامل از f می‌باشند. خواص زیر در مورد ترفیع‌های قائم و کامل برقرار هستند.

۱− $\forall X \in \chi(M), f \in C^\infty(M), \quad (fX)^v = f^vX^v, \quad (fX)^c = f^vX^c + f^cX^v.$

۲− $\forall X,Y \in \chi(M), \quad [X^v,Y^v] = 0, \quad [X^v,Y^c] = [X,Y]^v, \quad [X^c,Y^c] = [X,Y]^c.$

یک میدان تانسوری T از نوع (r,s) روی TM، میدان تانسوری متمایز یا به اختصار $d-$ میدان تانسوری نامیده می‌شود هرگاه مولفه‌های موضعی آن تحت تغییر مختصات روی TM، مانند مولفه‌های یک میدان تانسوری از نوع (r,s) روی منیفلد پایه M تغییر کنند.

مثال . میدان برداری قائم $X = X^i\frac{\partial}{\partial y^i}$ یک $d-$ میدان تانسوری از نوع $(1,0)$ است که آن را $d-$ میدان برداری می‌نامند.

۵.۱ التصاق‌های غیرخطی

در بخش قبل دیدیم که کلاف برداری قائم VTM، معرفی کردیم. لذا طبیعی است که به دنبال توزیع مکمل این فضا در TM باشیم. چنین توزیعی، توزیع افقی [20] نامیده خواهد شد که توسط یک التصاق غیرخطی [21] القا می‌شود. در این بخش، التصاق غیرخطی معرفی می‌شود.

تعریف ۱.۵.۱ . مرفیسم بین کلاف های $C : TTM \longrightarrow VTM$ با خاصیت $C \circ i = 1_{VTM}$ که در آن i تابعی از VTM به TTM می‌باشد را یک التصاق غیرخطی روی TM، می‌نامیم. هسته التصاق غیر خطی C را زیر کلاف افقی TM نامیده و آن را با HTM نمایش می‌دهیم. اصطلاحاً HTM را التصاق غیر خطی می‌نامند. بنابراین یک التصاق غیر

[20] Horizontal distribution

[21] Nonlinear connection

خطی روی TM، جمع مستقیم

$$TTM = HTM \oplus VTM, \tag{۱.۹}$$

را القا می‌کند. از آنجاکه VTM، هسته $\pi_{*,u} : T_uTM \longrightarrow T_{\pi(u)}M$ است، لذا از رابطه فوق می‌توان دید که تحدید $\pi_{*,u}$ به H_uTM، یک یکریختی از H_uTM به $T_{\pi(u)}M$ است. نگاشت معکوس $\pi_{*,u}|_{H_uTM}$ را با $l_{h,u} : T_{\pi(u)}M \longrightarrow H_uTM$ نمایش می‌دهیم و آن را ترفیع افقی القاشده توسط التصاق غیرخطی داده شده می‌نامیم.

تعریف ۱.۵.۲ . ترفیع افقی $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \chi(M)$، میدانی برداری روی TM است که آن را با X^h نشان داده و به صورت

$$X^h(u) = l_h(X)(u) = l_{h,u}(X(u)) = X^i(\pi(u))l_{h,u}(\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\pi(u)}),$$

تعریف می‌کنیم. فرض کنیم H یک التصاق غیر خطی و l_h ترفیع افقی القاء شده توسط این التصاق باشد. $\frac{\delta}{\delta x^i}|_u$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\frac{\delta}{\delta x^i}|_u = l_{h,u}(\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\pi(u)}).$$

در این صورت برای هر $u\epsilon TM$ مجموعه $\frac{\delta}{\delta x^i}|_{u_{i=1,\cdots,n}}$ یک پایه از فضای H_uTM می‌باشد که تحت تغییر مختصات (??) و (??)، به صورت

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\delta}{\delta x^{i'}},$$

تغییر می‌کند. چون برای هر $u\epsilon TM, \pi_{*,u}(\frac{\delta}{\delta x^i}|_u) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\pi(u)}$ لذا $\frac{\delta}{\delta x^i}|_u$ بر حسب پایه استاندارد $\frac{\partial}{\partial x^i}|_u, \frac{\partial}{\partial y^i}|_u$ از T_uTM به شکل موضعی

$$\frac{\delta}{\delta x^i}|_u = \frac{\partial}{\partial x^i}|_u - N^j_i(u)\frac{\partial}{\partial y^j}|_u,$$

خواهد بود. لذا $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ پایه‌ای برای $T_u(TM)$ متناسب با تجزیه (??) است که از این به بعد آن را با $\{\delta_i, \dot\partial_i\}$ و دوگان آن را با $\{dx^i, \delta y^i\}$ نشان می‌دهیم. به N_i^j ها ضرائب التصاق غیر خطی گفته می‌شود و ثابت می‌شود که در دو دستگاه مختصاتی $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ و $\{\frac{\delta}{\delta x^{i'}}, \frac{\partial}{\partial y^{i'}}\}$ برای