إنه من سليمان وإنه

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

پوشش مجموعه فشرده در فضای باناخ توسط برد عملگر یک فضای باناخ با پایه

نگارش:

مینا رشیدی

استاد راهنما: دکتر فرض ا... میرزاپور

استاد مشاور: دکتر علی ظهری

تیر ۱۳۸۷

دانشگاه زنجان

شماره: ۹۷۷۱/د/ز

تاریخ: ۸۷/۴/۳۱

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

بیدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی‌عصر (عج) جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

مینا رشیدی رشته **ریاضی** گرایش **محض**

عنوان: **پوشش مجموعه فشرده در فضای باناخ بوسیله برد عملگر فضای باناخ با پایه**

تاریخ ۸۷/۴/۳۱ با حضور هیأت محترم دوران در دانشگاه زنجان برگزارگردید و نظر هیأت داوران بشرح زیر می‌باشد:

ل(با درجه : ...عالی... امتیاز: ...نوزده... ۱۹) دفاع مجدد ☐ مردود ☐

عالی(۲۰-۱۸)

- **بسیارخوب(۱۷/۹۹- ۱۶)**
- **خوب(۱۵/۹۹- ۱۴)**
- **قابل قبول(۱۳/۹۹- ۱۲)**

سو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
ستاد راهنما	دکتر فرض ا... میرزاپور	استادیار	
ستاد مشاور	دکتر علی ظهری	استادیار	
ستاد ممتحن داخلی	دکتر سعید مقصودی	استادیار	
ستاد ممتحن خارجی	دکتر جمال روئین	استادیار	جمال روئین
نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمدتقی دستجردی	استادیار	

دکتر محمدعلی اسمخانی
معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی
دانشکده علوم

۸۷/۵/۷

دکتر نعمت ارشدی
مدیر تحصیلات تکمیلی دانشگاه

۸۷/۵/۱۴

دانشگاه زنجان
مدیریت تحصیلات تکمیلی
استعدادهای درخشان

زنده بودن را به بیداری بگذرانید چونکه سالها به اجبار خواهیم خفت

تقدیم ...

به تو

سر ارادت ما و آستان حضرت دوست

که هرچه بر سر ما می رود ارادت اوست

برخود لازم میدانم از زحمات و رهنمودهای ارزنده ی جناب آقای دکتر فرض ا... میرزاپور و جناب آقای دکتر علی ظهری کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم . کسب مقام شاگردی در محضر ایشان و همچنین دیگر اساتید گرانقدر و فرهیخته در طول سالهای تحصیلم ، بالاخص جناب آقای دکتر مسعود آرین نژاد ، جناب آقای دکتر محمد تقی دستجردی ، جناب آقای دکتر جمال روئین و سرکار خانم دکتر امامی و دیگر بزرگان که با القای نگرش خاص و بی همتا و زیبای خود ، همواره سرشت بی آلایش دانسته ها را با آراستگی طبع بدیع و روشنشان عجین ساخته اند و با پیوند آن با اندیشه های پریشان ، همیشه مایه هدایت و امید همگان بوده اند را به درگاه حضرت حق شکرگذار و عاجزانه برای ایشان طول عمر ، صحت و سلامتی مسئلت دارم . همچنین از زحمات بی دریغ همسرم جناب آقای شهسواری که مرا در بهبود انجام کار این پایان نامه برداشتن موانع موجود برسر راه انجام آن ، یاری نموده اند کمال تشکر را دارم.

اینبار هم به ناتوانی خود در قبال جبران حمایت های همه جانبه ی پدر و مادرم که همواره مأمنگاه امن وآسایش من بوده اند ، اعتراف می کنم .

دست همه ی دوستان خوبم را که با صفای دل و سادگی روحشان مرا مدیون مهر وجودشان ساخته اند ، به نشان ارادت و احترام می فشارم وبرای همه ی آنها آرزوی بهروزی و شادکامی دارم .

فهرست مندرجات

فهرست مندرجات

مقدمه

در فصل اول تعاریف و قضایای ابتدایی که در آنالیز تابعی مطرح هستند و نیز مقدماتی از زیرفضاهای متمم‌دار و نگاشت های تصویر و ویژگی پایه‌ای زیرفضاهای متمم‌دار و عملگرهای فشرده آورده شده است. در فصل دوم انواع پایه‌ها از قبیل پایه‌های شاودر و پایه‌های نامشروط و مثال‌هایی از آنها و تعریف ویژگی تقریب فضای باناخ ($A.P$) و قضایایی از آن آورده شده و به ارتباط بین $A.P$ و ویژگی کراندار فضای باناخ ($B.P$) پرداخته شده است. در فصل سوم نشان داده شده است که فضای انعکاسی R در قسمت سوم قضیه‌ی ۲.۱.۳، به طور کلی می‌تواند برای تمامی فضاهای $A.P$ انتخاب شود و نشان داده می‌شود که هر زیرمجموعه‌ی فشرده را می‌توان در فضای باناخ با $A.P$ پوشش داد. همچنین در این فصل ویژگی $A.P$ در عباراتی که M پایه با ویژگی های خاص موجود است، مشخص شده و سپس به کمک نتایج به دست آمده، قضیه‌ی تجزیه برای عملگرهای فشرده، که به توی فضاهای $A.P$، عمل می‌کنند، ارائه شده و در پایان به پوشش مجموعه‌های فشرده در فضاهای L_p و تجزیه‌ی عملگرهای فشرده در این فضاها پرداخته شده است.

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

۱.۱ تعاریف، قضایا و مفاهیم ابتدایی

در این بخش تعاریف و قضایای مهمی را که در آنالیز تابعی مطرح هستند و در فصل‌های آتی از آنها استفاده می‌شود را از مراجع [۱۴, ۱۳, ۱۲, ۱۱] عنوان می‌نمائیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. نرم روی X تابع حقیقی $\| . \|$ روی X می‌باشد، به طوری که در شرایط زیر به ازای هر x, y و اسکالر α صدق می‌کند

۱) $\| x \| > ۰, \| x \| = ۰ \Leftrightarrow x = ۰$

۲) $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$

۳) $\| x + y \| < \| x \| + \| y \|$

در اینصورت زوج $(x, \| . \|)$ را یک فضای نرمدار گوییم.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. متر القاء شده توسط نرم روی X، که با d نمایش داده می‌شود. به صورت زیر تعریف می‌شود

$$d(x,y) = \| x-y \|$$

نرم توپولوژی X همان توپولوژی به دست آمده از d می‌باشد.

اگر X یک فضای نرمدار باشد، گوی یکه و کره یکه روی X را به ترتیب با B_X و S_X نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$B_X = \{x; x \in X, \| x \| \leq ۱\},$$

$$S_X = \{x; x \in X, \| x \| = ۱\}.$$

مثال برای هر عدد صحیح n، فضای برداری F^n که متشکل از تمام n تایی‌ها است با نرم زیر، که نرم اقلیدسی نام دارد، تشکیل فضای نرمدار می‌دهد

$$\| (a_۱, a_۲ ...... a_n) \| = (\sum_{i=۱}^{n} | a_i |^۲)^{۱/۲}.$$

این فضای نرمدار n—فضای اقلیدسی نامیده می‌شود.

مثال مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های کراندار از اسکالرها که با جمع و ضرب زیر تشکیل فضای برداری می‌دهند، با ℓ_∞ نمایش داده می‌شود.

$۱)(a_i + b_j) = (a_i) + (b_j)$

$۲)\alpha(b_j) = (\alpha b_j), \qquad \alpha \in F$

برای هرعنصر (aj) از فضای برداری فوق، نرم تعریف شده‌ی زیر، آن را به فضای نرمدار تبدیل می‌کند.

$$\| (a_j) \|_\infty = sup\{| a_j |; j \in N\}$$

۲.۱ ویژگیهای اولیه از فضاهای نرمدار

گزاره ۱.۲.۱ اگر X یک فضای نرمدار باشد، آن‌گاه

$$|\| x \| - \| y \|| < \| x - y \| .$$

بنابراین برای هر $x, y \in X$، نگاشت $x \longmapsto \| x \|$ تابعی پیوسته از X به توی R می‌باشد.

برهان . اگر $x, y \in X$، آن‌گاه

$$\| x \| < \| x - y \| + \| y \|$$

$$\| y \| < \| y - x \| + \| x \| = \| x - y \| + \| x \| .$$

بنابراین

$$|\| x \| - \| y \|| = Max\{\| x \| - \| y \|, \| y \| - \| x \|\} \leq \| x - y \|$$

□

گزاره ۲.۲.۱ اگر X فضای برداری نرمدار باشد، آن‌گاه

۱) جمع بردارها یک عملگر پیوسته از $X \times X$ به توی X می‌باشد.

۲) ضرب اسکالر روی بردارها یک عملگر پیوسته از $F \times X$ به توی X می‌باشد.

برهان . فرض کنیم $t, t_\circ \in F$، به طوری که به ازای هر $x, y, x_\circ, y_\circ \in X$ و هر $\epsilon > \circ$، داشته باشیم

$$| t - t_\circ | < \epsilon,$$

$$\| x - x_\circ \| < \epsilon,$$

$$\| y - y_\circ \| < \epsilon$$

آن‌گاه

$$\| (x+y) - (x_\circ + y_\circ) \| \leq \| x - x_\circ \| + \| y - y_\circ \| \leq 2\epsilon$$

$$\| tx - t_\circ x_\circ \| \leq \| tx - t_\circ x \| + \| x - t_\circ x_\circ \| = | t - t_\circ | \| x \| + | t_\circ | \| x - x_\circ \| \leq \epsilon(\| x_\circ \| + \epsilon) + | t_\circ | \epsilon$$

□

۳.۱ عملگرهای خطی بین فضاهای نرمدار

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم X و Y فضاهای نرمدار باشد. عملگر T از X به توی Y کراندار است، اگر و تنها اگر به ازای هر زیرمجموعه کراندار B از X، $T(B)$ زیرمجموعه کراندار از Y باشد.

مجموعه‌ی تمام عملگرهای خطی از X به توی Y را با $B(X,Y)$ نشان می‌دهند.

تذکر. توابع به توی فضای متریک اغلب زمانی کراندار نامیده می‌شوند که برد آنها مجموعه کراندار باشد.

تعریف ۲.۳.۱ اگر X و Y فضاهای نرمدار باشند، برای هر $T \in B(X,Y)$، نرم $\| T \|$ که یک عدد حقیقی نامنفی است و نرم عملگری روی $B(X,Y)$، به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\| T \| = \sup\{\| Tx \| ; x \in B_X\}$$

نرم عملگری، نگاشت $T \longrightarrow \| T \|$ می‌باشد.

مثال فرض کنیم X یک فضای برداری از دنباله‌های متناهی و غیر صفر، با نرم ℓ_∞ باشد. عملگر T به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T : X \longrightarrow F$$

$$T(\alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_n$$

برای هر n مثبت، فرض کنید $x_n = \sum_{j=1}^{n} ej$. آن‌گاه برای هر n

$$x_n \in B_n, Tx_n = n$$

و این نشان می‌دهد که $T(B_X)$ کراندار نیست. پس T کراندار نمی‌باشد.

قضیه ۳.۳.۱ فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ باشند. آن‌گاه $B(X, Y)$ فضای نرمدار با نرم عملگری می‌باشد. همچنین اگر Y فضای باناخ باشد، $B(X, Y)$ نیز فضای باناخ می‌باشد.

برهان . فرض کنید $T, S \in B(X, Y)$. واضح است که $0 \leq \| T \|$. اگر $T \neq 0$ باشد، آن‌گاه $x_0 \in X$ وجود دارد که لزوماً غیر صفر نیست، به طوری که $Tx_0 \neq 0$.

همچنین $Tx = 0$، اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in B_X$، $\| T \| = 0$.

اگر α اسکالر باشد، داریم

$$\| \alpha T \| := \sup\{\| \alpha Tx \|; \quad x \in B_X\} = | \alpha | \sup\{\| Tx \|; \quad x \in B_X\} = | \alpha | \| T \|$$

اگر

$$x_0 \in B_X \Rightarrow \| (S + T)(x_0) \| \leq \| S \| \| x_0 \| + \| T \| \| x_0 \| \leq \| T \| + \| S \|$$

و همچنین داریم

$$\| S + T \| := \sup\{\| (S + T)(x) \|; \quad x \in B_X\} \leq \| T \| + \| S \|$$

بنابراین نرم عملگر، یک نرم روی $B(X,Y)$ می‌باشد.

فرض کنید Y فضای باناخ و (T_n) دنباله‌ی کوشی روی $B(X,Y)$ باشد. حال اگر $x \in X$، برای هر $m, n \in N$ خواهیم داشت

$$\| T_n x - T_m \| = \| T_n - T_m(x) \| \leq \| T_n x - T_m \| \| x \| .$$

با توجه به اینکه دنباله $T_n x$ یک دنباله‌ی کوشی است، روی Y همگرا می باشد. عملگر زیر را تعریف می‌کنیم

$$T : X \longrightarrow Y$$

$$Tx = \lim T_n(x).$$

چون T پیوسته و خطی است، می‌توان نشان داد که T کراندار می‌باشد. با توجه به کرانداری T، یک M غیر صفر وجود دارد به طوری که

$$\| T_n \| \leq M$$

و همچنین برای هر n و هر $x \in B_X$،

$$\| T_n x \| \leq M,$$

$$\| T_n - T \|_{n\to\infty} \longrightarrow 0 .$$

فرض کنید اعداد مثبت ϵ و N_ϵ وجود داشته باشند، به طوری که برای هر $m, n \geq N_\epsilon$، داشته باشیم

$$\| T_n - T_m \| < \epsilon$$

اگر $x \in B_X$ و $n, m \geq N_\epsilon$، آن‌گاه

$$\| T_n x - T_m x \| \leq \| T_n - T_m \| \leq \epsilon.$$

با ثابت نگه داشتن n و میل m به ∞، به ازای $x \in B_X$ و $n \geq N_\epsilon$، داریم

$$\| T_n x - Tx \| \leq \epsilon.$$

حال با سوپریمم گرفتن روی تمامی xها در B_X، خواهیم داشت

$$\| T_n - T \| \leq \epsilon.$$

بنابراین $B(X,Y)$ کامل می‌باشد. □

گزاره ۴.۳.۱ اگر X, Y, Z فضاهای نرم دار باشند و $S \in B(X,Y), T \in B(Y,Z)$، آن‌گاه

$$TS \in B(X,Z),$$

$$\| TS \| \leq \| T \| \| S \|$$

قضیه ۵.۳.۱ اگر X, Y فضاهای باناخ باشند، به طوری که X متناهی البعد و $Y \neq 0$ باشد، آن‌گاه عملگر غیر کراندار از X به توی Y وجود دارد. به ویژه برای هر فضای نرمدار متناهی البعد X، تابعک خطی غیر کراندار روی X موجود است.

برهان . رجوع شود به [۱۴]. □

تعریف ۶.۳.۱ اگر T یک عملگر خطی از فضای نرمدار X به توی فضای نرمدار Y باشد، آن‌گاه T یک ایزومورفیسم به توی Y می‌باشد. هرگاه T یک به یک و پیوسته و معکوسش نیز روی برد T پیوسته باشد همچنین T ایزومتری است. هرگاه به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\| Tx \| = \| x \|$$

گوییم فضای X در Y نشانده می‌شود، اگر یک ایزومورفیسم از X به توی Y وجود داشته باشد.

۴.۱ قضایا و توسیع‌های هان باناخ

فرض کنید Y, X فضاهای نرمدار و M زیرفضایی از X باشد. اغلب مهم است که بدانیم که یک عملگر خطی از M به توی Y چگونه بدون افزایش نرمش می‌تواند به روی کل X توسیع یابد. این عمل زمانی که M یک زیرفضای چگال در X و Y فضای باناخ باشد، مشکل نخواهد بود.

قضیه ۱.۴.۱ فرض کنید M زیرفضای چگال از فضای نرمدار X و Y فضای باناخ و $T_\circ : M \dashrightarrow Y$ یک عملگر خطی کراندار باشد. آن‌گاه تابع یکتا و پیوسته‌ی $T : X \longrightarrow Y$ وجود دارد به طوری که

$$T\,|_M = T_\circ, \qquad \| T \| = \| T_\circ \|$$

برهان . رجوع شود به [۱۴]. □

تعریف ۲.۴.۱ . فرض کنید که X یک فضای برداری مختلط باشد. تابعک خطی حقیقی روی X، تابع حقیقی مقدار f است، هرگاه برای هر $\alpha \in R$ و $x, y \in X$ داشته باشیم

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

تعریف ۳.۴.۱ فرض کنید ρ یک تابع حقیقی مقدار روی فضای برداری X باشد. آن‌گاه ρ یک تجانس مثبت است اگر

$$\rho(tx) = t\rho(x)$$

به طوری که $x \in X$ و $t > 0$ باشد.

قضیه ۴.۴.۱ . (هان باناخ)[1] فرض کنید f_0 یک تابعک خطی کراندار روی زیرفضای Y از فضای باناخ X باشد. آن‌گاه تابعک خطی کراندار f روی X، وجود دارد به طوری که

$$\| f \| = \| f_0 \|, \qquad f|_Y = f_0.$$

برهان . رجوع شود به [۱۴].

۵.۱ فضاهای دوگان

اصطلاح فضای دوگان معمولاً در جبر خطی مورد استفاده قرار می گیرد. اگر به فضاهای برداری برگردیم، می‌بینیم که تمام تابعکهای خطی روی فضاهای برداری را فضای دوگان فضاهای برداری می‌نامیدیم و با X^* نمایش می‌دادیم.

تعریف ۱.۵.۱ اگر X فضای نرمدارباشد، فضای دوگان یا مزدوج X، فضای نرمدار $B(X,F)$ است، که شامل همه تابعکهای خطی کراندار روی X با نرم عملگری می‌باشد.

مثال . فرض کنید σ فضای اندازه پذیر متناهی باشد و فضای $L_p(\Omega,\sum,\mu)$ برای $0 \leq p < \infty$ داشته باشیم که فضای دوگان آن، فضای $L_q(\Omega,\sum,\mu)$ می‌باشد، به طوری که $1/p + 1/q = 1$ (وقتی $p = 1$ باشد، $q = \infty$ در نظر گرفته می‌شود.)

حال x^* را می‌توان روی L_p به ازای هر $f \in L_p$ به صورت زیر تعریف کرد

$$x^*(f) = \int_\Omega fg d\mu \qquad (*)$$

[1] Hann-Banach

به طوری که $g \in L_q$.

با توجه به قضیه‌ی رادون نیکودیم، نامساوی هولدر روی رابطه فوق به ازای هر $g \in L_q$ صدق می‌کند. بنابراین ثابت می شود که x^* یک عملگر کراندار روی L_p است و بعلاوه اگر $x^* \in L_p^*$، باشد و $g \in L_q$ که در رابطه (*) صدق می‌کند، خواهیم داشت

$$\| x^* \| = \| g \|_q .$$

قضیه ۲.۵.۱ . اگر X فضای نرمدار باشد، آن‌گاه X^* فضای باناخ می‌باشد.

برهان . رجوع شود به [۱۲]. □

قضیه ۳.۵.۱ . فضای نرمدار X متناهی البعداست، اگر و تنها اگر X^* متناهی البعد باشد،

برهان . رجوع شود به [۱۲]. □

قضیه ۴.۵.۱ . اگر X متناهی البعد باشد و $x \in X$، آن‌گاه

$$\| x \| = \sup\{| \langle x^*, x\rangle | : \quad x^* \in B_{X^*}\}.$$

برهان . اگر $x = 0$، رابطه فوق بدیهی است. حال فرض کنیم $x \neq 0$. چون به ازای هر $x^* \in B_{X^*}$ داریم

$$| \langle x^*, x\rangle | \leq \| x \| \| x_* \| \leq \| x \|$$

بنابراین نتیجه می‌شود

$$\| x \| \neq \sup\{| \langle x^*, x\rangle | ; \quad x^* \in B_{X^*}\}.$$

و با توجه به این نکته که اگر x یک عنصر غیر صفراز فضای X باشد، آن‌گاه تابعک خطی کراندار روی X، مانند f وجود دارد که

$$f(x) = \| x \|, \quad \| f \| = 1$$

نتیجه می‌شود که عنصری مانند $x_\circ^* \in X^*$ وجود دارد به طوری که

$$\| x_\circ^* \| = 1, \quad x_\circ^* x = \| x \| .$$

همچنین با سوپریمم گرفتن روی $x_\circ^*$ خواهیم داشت

$$\| x \| = \sup\{| x^* x | : \quad x^* \in B_{X^*}\}.$$

۶.۱ دوگان مضاعف و فضاهای انعکاسی

تعریف ۱.۶.۱ فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد. دوگان مضاعف X، فضای دوگان X^* می‌باشد که با X^{**} نمایش داده می‌شود.

فرض کنید $x_\circ \in X$ و $\varphi(x_\circ)$ نگاشتی از X^* به توی هیأت زمینه‌ی آن باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\varphi(x_\circ)(x^*) = \langle x^*, x_\circ \rangle.$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که $\varphi(x_\circ)$ یک تابعک خطی روی X^* می‌باشد.

با توجه به قضیه‌ی (۵.۴.۲) در [۱۶] داریم

$$\sup\{| \varphi(x_\circ)(x^*) | : \quad x^* \in B_{X^*}\} = \sup\{| \langle x^*, x_\circ \rangle | : \quad x^* \in B_{X^*}\} = \| x_\circ \| .$$

نتیجه می‌شود $\varphi(x_\circ) \in X^{**}$ و $\| \varphi(x_\circ) \| = \| x_\circ \|$.

اگر $\varphi(x)$، به ازای هر $x \in X$ به صورت مشابه تعریف شود، آن‌گاه نگاشت زیر را نتیجه می‌دهد

$$\varphi : X \longrightarrow X^{**}$$