بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

تقریب نرم مشتق شبه شوارتزین در رده‌های خاصی از توابع تک ارز

زهرا اوروجی

دانشکده‌ی علوم

گروه ریاضی

۱۳۸۷

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر رسول آقالاری

۱۳۸۹/۴/۸

پایان نامه زهرا اروجی به تاریخ ۸۸/۱۱/۲۷ شماره   مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی
و نمره ۱۹/- قرار گرفت.
نوزده تمام

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر رسول آقا لاری

۲- استاد مشاور:

۳- داور خارجی: دکتر سید یونس شکیبی

۴- داور داخلی: دکتر علی عبادیان

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی دکتر سید اسماعیل رمضانی

این اثر را که حاصل تلاشی چند است، تقدیم می دارم به

مقام رفیع پدر و مادرم ، که در عرصه حیات با تمام توان، مهیاگر ، پشتیبان و مشوق من بوده و هستند و تا دل در سینه به عشقشان می تپد، خاضعانه در برابر مهربانی هاشان سر تعظیم فرود می آورم.

همسر خوبم که همواره مرا تشویق و ترغیب می نماید. در طول این مدت زحمات فراوانی را متحمل شدند و صمیمانه از او سپاسگزارم.

گلهای خندان، خواهران عزیزم که پیوسته مرا مسرور می ساختند.

و

روح بلند عالمان علم و آگاهی که بر ذروه های رفیع دانش و بینش، نظاره گر نتایج زحمات خویش اند.

سپاس اول معلم عالم هستی، یگانه داور بر حق وجود را که منت گزارد بر بنده خویش تا با پیروی از اوامرش سالک طریق معرفت و آگاهی باشم. اکنون شکرگزار الطافش بوده و بر رسول خاتمش درود می فرستم که اول کلام وحی اش بر خواندن بود.

تلاش های اساتید، مربیان و معلمان طول تحصیل خود را ارج می نهم و شهد شیرین ارشادشان را با کمال مسرت و غرور می چشم.

از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر رسول آقالاری که پیوسته مرا مرهون ارشادات خویش قرار داده اند و در طول تدوین این پایان نامه زحمات زیادی را متحمل شدند، تشکر و قدردانی می نمایم.

همچنین از جناب آقای دکتر علی عبادیان که همواره از راهنمایی هاشان بهره برده ام و افتخار شاگردی شان را داشتم ، صمیمانه سپاسگزارم.

از آقای دکتر سعید شمس که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند و آقای دکتر سعید استاد باشی که به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاعیه حضور داشتند، تشکر می کنم.

دوستان عزیزم در دوره کارشناسی ارشد و دوره کارشناسی دانشگاه صنعتی امیر کبیر که خاطره حضور سبز و پرتلاششان، همیشه در ذهنم جاودان است.

چکیده

در این پایان نامه، نرم مشتق شبه شوارتزین معرفی شده و در زیر مجموعه های خاصی از توابع تک ارز شامل توابع ستاره گون و محدب از مرتبه α $(0\le\alpha<1)$، توابع به طور یکنواخت موضعاً تک ارز و رده خاصی از توابع محدب وار، تقریب زده می شود. همچنین به کمک مشتق شبه شوارتزین، ارتباط بین فضاهای هاردی و فضای توابع محدب وار، مورد بررسی قرار می گیرد.

پیشگفتار

در این پایان نامه مشتق شبه شوارتزین و کاربرد آن در زیر مجموعه های خاصی از توابع تک ارز، مورد بررسی قرار می گیرد که بر اساس مقاله ای از Y.C.Kim و T.Sugawa، مرجع شماره (۱۲)، نوشته شده است.

در فصل اول، تعاریف مقدماتی و قضیه های مورد نیاز از مباحث آنالیز مختلط و فضاهای هاردی ذکر می شود.

در فصل دوم، زیر مجموعه های خاصی از توابع تک ارز شامل توابع ستاره گون، محدب و محدب وار تعریف شده و برخی از خواص آنها بیان می شود.
همچنین قضیه ای به نام قضیه دیودنه ثابت می شود که از این قضیه و نتایج حاصل از آن، در برهان قضیه های فصل سوم استفاده می شود.

مباحث اصلی در فصل های سوم و چهارم گنجانده شده اند. در این دو فصل، تعاریف و قضیه ها در حالت کلی مطرح شده اند؛ بنابراین نتایج به دست آمده، می توانند در گروه های وسیعی از توابع، کاربرد داشته باشند.

در فصل سوم، مشتق شبه شوارتزین و نرم آن تعریف شده و چند قضیه در مورد آن ثابت می شود. همچنین رده دیگری از توابع به نام توابع گلفر معرفی شده و سپس، نرم مشتق شبه شوارتزین، در توابع ستاره گون و محدب از مرتبه α ($0\leq\alpha<1$)، توابع به طور یکنواخت موضعاً تک ارز و زیر مجموعه خاصی از توابع محدب وار، تقریب زده می شود. در نهایت، دو عملگر انتگرالی به نام عملگرهای الکساندر معرفی می شوند که در محاسبه نرم مشتق شبه شوارتزین در گروه های مختلفی از توابع، می توانند مورد استفاده قرار گیرند.

در فصل چهارم، ابتدا فضای BMOA و کلاس $B(\lambda)$ معرفی شده و سپس به کمک مشتق شبه شوارتزین، ارتباط بین فضاهای هاردی، فضای BMOA و فضای توابع محدب وار، بیان می شود.

فهرست مندرجات

۱ مفاهیم و تعاریف اولیه ۳

۱.۱ آنالیز مختلط ۳

۲.۱ فضاهای هاردی ۸

۲ توابع محدّب وار ۱۱

۱.۲ توابع ستاره‌گون و محدب ۱۱

۲.۲ توابع محدّب وار ۱۷

۳.۲ قضیه‌ی دیودنه ۲۱

۳ مشتق شبه شوارتزین ۲۹

۱.۳ مشتق شبه شوارتزین ۲۹

۲.۳ توابع گلفر ۳۷

۳.۳ مشتق شبه شوارتزین در توابع ستاره‌گون ۳۹

۴.۳ مشتق شبه شوارتزین در توابع محدب ۴۲

۵.۳ توابع بطور یکنواخت موضعاً تک ارز ۴۷
۱.۵.۳ مشتق شبه شوارتزین در توابع بطور یکنواخت موضعاً تک ارز . . . ۴۷
۲.۵.۳ عملگرهای الکساندر ۵۵

۶.۳ تابع ماکسیمال ۵۸

۷.۳ مشتق شبه شوارتزین در توابع $C(\varphi,\psi)$ ۶۴

۴ فضاهای هاردی و توابع محدّب وار ۸۱

۱.۴ خواص کلاس $B(\lambda)$ ۸۱

۲.۴ فضای توابع $BMOA$ ۸۵

۳.۴ ارتباط بین فضاهای هاردی و توابع محدّب وار ۹۰

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۱ آنالیز مختلط

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم a یک عدد مختلط و $r > ٠$ باشد. دیسک باز به مرکز a و شعاع r را به صورت $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ تعریف می‌کنیم. منظور از $\mathbb{C}$ مجموعه‌ی تمام اعداد مختلط است.

از این پس $D(٠, ۱)$ را با نماد D نشان داده و به آن دیسک واحد می‌گوییم. مرز D را نیز با T نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم Ω مجموعه‌ای باز در صفحه‌ی مختلط بوده و تابع مختلط f در Ω تعریف شده باشد. اگر $z_٠ \in \Omega$ و $\lim_{z\to z_٠} \frac{f(z)-f(z_٠)}{z-z_٠}$ موجود باشد، این حد را با $f'(z_٠)$ نشان داده و آن را مشتق f در $z_٠$ می‌نامیم. هرگاه $f'(z_٠)$ به ازای هر $z_٠ \in \Omega$ موجود باشد، گوییم f در Ω تحلیلی[۱] (هلوریخت) است. مجموعه‌ی تمام توابع هلوریخت در Ω را با $H(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۳.۱.۱ مجموع، حاصلضرب و ترکیب دو تابع تحلیلی، تحلیلی است.

---

[۱] analytic

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم Ω مجموعه‌ای باز در صفحه‌ی مختلط بوده و تابع f در Ω تعریف شده باشد. گوییم f در Ω به وسیله‌ی یک سری توانی قابل نمایش است هرگاه برای هر دیسک $D(a,r) \subseteq \Omega$ سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ نظیر باشد که به ازای هر $z \in D(a,r)$ همگرا به $f(z)$ باشد.

قضیه ۵.۱.۱ فرض کنیم Ω مجموعه‌ی باز دلخواهی در صفحه‌ی مختلط باشد. f در Ω به وسیله‌ی یک سری توانی قابل نمایش است اگر و تنها اگر $f \in H(\Omega)$.

برهان : قضیه‌های [۱۰.۶] و [۱۰.۱۶]، مرجع [۱۶].

تعریف ۶.۱.۱ هر زیر مجموعه‌ی باز همبند ناتهی از صفحه‌ی مختلط را یک ناحیه می‌نامیم.

قضیه ۷.۱.۱ (اصل مدول ماکزیمم) فرض کنیم Ω یک ناحیه بوده، $f \in H(\Omega)$ و $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. در این صورت

$$|f(a)| \leqslant \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |f(a+re^{i\theta})|.$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر f بر Ω ثابت باشد.

برهان : [۱۰.۲۴]، مرجع [۱۶].

نتیجه ۸.۱.۱ هرگاه k بست ناحیه‌ی کراندار Ω بوده، f بر k پیوسته و در Ω تحلیلی باشد، آنگاه برای هر $z \in \Omega$، $|f(z)| \leqslant \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم $\alpha \in D$. نگاشت $\varphi_\alpha : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$$

و به آن نگاشت موبیوس [۲] می‌گوییم.

قضیه ۱۰.۱.۱ فرض کنیم $\alpha \in D$ ثابت باشد. احکام زیر برقرارند:

---

[۲] Mobius

الف) φ_α یک به یک بوده و$\varphi_\alpha \in H(D)$؛

ب) معکوس φ_α عبارت است از $\varphi_{-\alpha}$؛

ج) تابع φ_α، T را بروی T و D را بروی D می‌نگارد.

برهان : فرض کنیم برای $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ، $\varphi_\alpha(z_1) = \varphi_\alpha(z_2)$. بنابراین:

$$\frac{z_1 - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z_1} = \frac{z_2 - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z_2} \Longrightarrow (z_1 - \alpha)(1 - \bar{\alpha} z_2) = (z_2 - \alpha)(1 - \bar{\alpha} z_1)$$

$$\Longrightarrow z_1 - z_2 = |\alpha|^2 (z_1 - z_2) \Longrightarrow (z_1 - z_2)(1 - |\alpha|^2) = 0$$

چون $\alpha \in D$، پس $1 - |\alpha|^2 \neq 0$ و $z_1 = z_2$؛ لذا φ_α یک نگاشت یک به یک است. از طرفی ریشه‌ی مخرج یعنی $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ بیرون گوی واحد بوده و

$$\varphi'_\alpha(z) = \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \bar{\alpha} z)^2}.$$

پس φ_α در Ω تحلیلی است. لذا قسمت الف ثابت می‌شود.

چون φ_α در D یک به یک است، پس معکوس پذیر است. داریم

$$\varphi_\alpha(\varphi_{-\alpha}(z)) = \frac{\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha} z} - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha} z}} = \frac{z(1 - |\alpha|^2)}{1 - |\alpha|^2} = z$$

و به طور مشابه $\varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z)) = z$. بنابراین φ_α و $\varphi_{-\alpha}$ معکوس یکدیگرند.

حال قسمت (ج) را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $z \in T$. لذا $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ موجود است که $z = e^{i\theta}$. داریم

$$|\varphi_\alpha(z)| = |\varphi_\alpha(e^{i\theta})| = \left| \frac{e^{i\theta} - \alpha}{1 - \bar{\alpha} e^{i\theta}} \right| = \frac{|e^{i\theta} - \alpha|}{|e^{i\theta}||e^{-i\theta} - \bar{\alpha}|} = 1$$

پس $\varphi_\alpha(z) \in T$ و در نتیجه

$$\varphi_\alpha(T) \subseteq T \qquad (1)$$

به طور مشابه، برای هر $z \in T$، ۱ $= |\varphi_{-\alpha}(z)|$. بنابراین

$$\varphi_{-\alpha}(T) \subseteq T \Longrightarrow \varphi_\alpha(\varphi_{-\alpha}(T)) \subseteq \varphi_\alpha(T)$$

چون φ_α و $\varphi_{-\alpha}$ معکوس یکدیگرند، پس $T \subseteq \varphi_\alpha(T)$ و از رابطه‌ی (۱) نتیجه‌ی $\varphi_\alpha(T) = T$ حاصل می‌شود.

می‌دانیم φ_α در D تحلیلی و در $\bar{D}$ پیوسته است. لذا بنابر نتیجه‌ی ۸.۱.۱ ، برای هر $z \in D$،

$$|\varphi_\alpha(z)| \leqslant \max_{z \in T} |\varphi_\alpha(z)|$$

چون $\varphi_\alpha(T) = T$ ، پس ۱ $= \max_{z \in T} |\varphi_\alpha(z)|$. حال اگر $z \in D$ موجود باشد که ۱ $= |\varphi_\alpha(z)|$، آنگاه $\varphi_\alpha(z) \in T = \varphi_\alpha(T)$. پس $z_1 \in T$ موجود است که $\varphi_\alpha(z) = \varphi_\alpha(z_1)$. طبق قسمت الف، φ_α یک به یک است. بنابراین $z = z_1 \in T$ که با $z \in D$ در تناقض است. لذا برای هر $z \in D$ ، ۱ $> |\varphi_\alpha(z)|$، پس $\varphi_\alpha(D) \subseteq D$. بطور مشابه $\varphi_{-\alpha}(D) \subseteq D$ ؛ پس $D \subseteq \varphi_\alpha(D)$ و $\varphi_\alpha(D) = D$.

تعریف ۱۱.۱.۱ زیر مجموعه‌ی E از صفحه‌ی مختلط را محدب[۳] نامیم هرگاه برای هر $s_1, s_2 \in E$ و هر $0 < a < 1$، $s_1 a + s_2(1 - a) \in E$.

قضیه ۱۲.۱.۱ (قضیه‌ی کوشی در یک مجموعه‌ی محدب) فرض کنیم Ω یک مجموعه‌ی باز محدب بوده، $p \in \Omega$، f بر Ω پیوسته باشد و $f \in H(\Omega - \{p\})$. در این صورت $F \in H(\Omega)$ موجود است بطوریکه $F' = f$.

برهان : قضیه‌ی [۱۴.۱۰]، مرجع [۱۶].

نتیجه ۱۳.۱.۱ می‌دانیم D یک مجموعه‌ی باز محدب است؛ لذا برای هر تابع تحلیلی در D مانند f، تابع $F \in H(D)$ موجود است بطوریکه $F' = f$.

قضیه ۱۴.۱.۱ فرض کنیم $\varphi \in H(\Omega)$، $z_0 \in \Omega$ و $\varphi'(z_0) \neq 0$. در این صورت Ω یک همسایگی از z_0 مانند V را شامل است بطوریکه

---

[۳] convex

الف) φ در V یک به یک است؛

ب) $W = \varphi(V)$ یک مجموعه‌ی باز است؛ و

ج) اگر $\psi : W \longrightarrow V$ با $\psi(\varphi(z)) = z$ تعریف شده باشد، آنگاه $\psi \in H(W)$.

لذا $\varphi : V \longrightarrow W$ دارای معکوس هلوریخت است.

برهان : قضیه‌ی [۳۰.۱۰]، مرجع [۱۶].

قضیه **۱۵.۱.۱** فرض کنیم Ω یک ناحیه بوده و f در Ω تحلیلی و یک به یک باشد. در این صورت برای هر $z \in \Omega$، $f'(z) \neq 0$ و معکوس f تحلیلی است.

برهان : قضیه‌ی [۳۳.۱۰]، مرجع [۱٦].

تعریف **۱٦.۱.۱** فرض کنیم X یک فضای برداری[۴] مختلط باشد. تابع $\| . \| : X \longrightarrow [0, \infty)$ را یک نرم[۵] روی X نامیم هرگاه دارای خواص زیر باشد:

الف) برای هر $x, y \in X$ ، $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$،

ب) $\| ax \| = |a| \, \| x \|$ که $x \in X$ و a اسکالر است،

ج) $\| x \| > 0$ است هرگاه $x \neq 0$.

تعریف **۱۷.۱.۱** یک نیم نرم بر فضای برداری X، تابعی است حقیقی مانند P بر X بطوریکه به ازای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر α،

الف) $P(x + y) \leqslant P(x) + P(y)$ و

ب) $P(\alpha x) = |\alpha| P(x)$.

قضیه **۱۸.۱.۱** (لم شوارتز) فرض کنیم f تابعی تحلیلی در دیسک واحد باشد بطوریکه $f(0) = 0$ و برای هر $z \in D$، $|f(z)| \leqslant 1$. در این صورت $|f'(0)| \leqslant 1$ و برای هر $z \in D$، $|f(z)| \leqslant |z|$. اگر $z \in D$ موجود باشد بطوریکه $|f'(0)| = 1$ یا $|f(z)| = |z|$ ، آنگاه $f(z) = \lambda z$ که در آن λ مقدار

[۴] vector spase

[۵] norm

ثابت است و $|\lambda| = ۱$.

برهان : قضیه‌ی [۲.۱۲]، مرجع [۱۶].

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنیم a، b، c و d اعداد مختلط باشند. تابع $\omega : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $\omega(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ را تبدیل خطی کسری می‌نامیم. برخی از خواص ω را یادآور می‌شویم:

الف)خطوط راستی که از نقطه‌ی $z = -\frac{d}{c}$ می‌گذرند، بر خطوط راستی که از مبدا می‌گذرند نگاشته می‌شوند.

ب)خطوط راستی که از نقطه‌ی $z = -\frac{d}{c}$ نمی‌گذرند، بر دوایری که از مبدا می‌گذرند نگاشته می‌شوند.

ج)دوایری که از نقطه‌ی $z = -\frac{d}{c}$ می‌گذرند، بر خطوط راستی که از مبدا نمی‌گذرند نگاشته می‌شوند.

د)دوایری که از نقطه‌ی $z = -\frac{d}{c}$ نمی‌گذرند، بر دوایری که از مبدا نمی‌گذرند نگاشته می‌شوند.

برهان : رجوع شود به مرجع [۱۷]، صفحات ۶۸ و ۷۲ .

قضیه ۲۰.۱.۱ برای ناحیه‌ی Ω در صفحه، احکام زیر معادلند.

الف) Ω همبند ساده است.

ب) اگر $f \in H(\Omega)$، $\frac{1}{f}$، آنگاه $g \in H(\Omega)$ موجود است بطوریکه $f = \exp g$.

برهان : بندهای (ب) و (ح) از قضیه‌ی [۱۳.۱۱]، مرجع [۱۶].

بنابراین اگر $f \in H(D)$ و برای هر $z \in D$ ، $f(z) \neq ۰$ ، آنگاه $g \in H(D)$ موجود است بطوریکه $f = \exp g$. قرار می‌دهیم $\log f = g$.

۲.۱ فضاهای هاردی

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم f و g دو تابع تحلیلی در D باشند. گوییم f محاط[۶] به g است هرگاه تابع تحلیلی ω روی D موجود باشد بطوریکه $\omega(۰) = ۰$ و برای هر $z \in D$، $|\omega(z)| < ۱$ و $f(z) = g(\omega(z))$. در این حالت می‌نویسیم $f \prec g$.

[۶] subordination

قضیه ۲.۲.۱ فرض کنیم h و g دو تابع تحلیلی در D بوده و h در D یک به یک باشد. در این صورت $g \prec h$ اگر و تنها اگر $g(\circ) = h(\circ)$ و $g(D) \subseteq h(D)$.

برهان : ابتدا فرض کنیم $g \prec h$. بنابراین تابع تحلیلی ω روی D موجود است بطوریکه $\omega(\circ) = \circ$ و برای هر $z \in D$، $|\omega(z)| < ۱$ و $g(z) = h(\omega(z))$. پس $g(\circ) = h(\omega(\circ)) = h(\circ)$ و

$$g(z) = h(\omega(z)) \in h(D) \Longrightarrow g(D) \subseteq h(D).$$

حال فرض کنیم $g(\circ) = h(\circ) = \circ$ و $g(D) \subseteq h(D)$. بنا بر قضیه‌ی ۱۵.۱.۱ معکوس h تحلیلی است؛ لذا نگاشت $\omega : D \longrightarrow C$ با ضابطه‌ی $\omega(z) = h^{-۱}(g(z))$ خوشتعریف است. حال چون برای هر $z \in D$، $g(z) \in h(D)$، پس

$$\omega(z) = h^{-۱}(g(z)) \in h^{-۱}(h(D)) \subseteq D \Longrightarrow |\omega(z)| < ۱$$

همچنین $\omega(\circ) = h^{-۱}(g(\circ)) = h^{-۱}(\circ) = \circ$.

ω ترکیب دو تابع تحلیلی g و $h^{-۱}$ است، پس تحلیلی است. از طرفی $g(z) = h(\omega(z))$ و $\omega(\circ) = \circ$. پس $f \prec g$.

در حالت کلی اگر $g(\circ) = h(\circ) = a$ باشد، با استفاده از مرحله‌ی قبل نگاشت ω را برای توابع $g - a$ و $h - a$ به دست می‌آوریم. در این صورت

$$(g-a)(z) = (h-a)(\omega(z)) \Longrightarrow g(z) = h(\omega(z)).$$

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنیم f تابعی تحلیلی در دیسک واحد باشد. برای هر $\circ \leqslant r < ۱$ و هر $\circ < p < \infty$، تعریف می‌کنیم

$$M_p(r,f) = (\frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta)^{\frac{۱}{p}}$$

و برای $p = \infty$ قرار می‌دهیم $M_\infty(r,f) = \max_{\circ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi} |f(re^{i\theta})|$.

گوییم تابع تحلیلی f در دیسک واحد متعلق به فضای هاردی [۷] H^p $(\circ < p \leqslant \infty)$ است هرگاه

[۷] Hardy space

$\lim_{r\to 1^-} M_p(r,f) < \infty$ و قرار می‌دهیم:

$$\| f \|_p := \lim_{r\to 1^-} M_p(r,f) \ .$$

قضیه ۴.۲.۱ اگر $0 < p < q \leqslant \infty$، آنگاه $H^q \subseteq H^p$.

برهان : صفحه‌ی [۲]، مرجع [۵].

قضیه ۵.۲.۱ فرض کنیم f تابعی تحلیلی در دیسک واحد بوده و $0 < p \leqslant \infty$. در این صورت $M_p(r,f)$ تابعی صعودی از r است.

برهان : قضیه‌ی [۱.۵]، مرجع [۵].

نتیجه ۶.۲.۱ مجموعه‌ی H^∞ متشکل از تمام توابع تحلیلی و کراندار در دیسک واحد است.

برهان : اگر f تابعی تحلیلی و کراندار در دیسک واحد باشد، بوضوح $f \in H^\infty$. حال فرض کنیم $f \in H^\infty$. لذا f در D تحلیلی بوده و

$$M = \lim_{r\to 1^-} M_\infty(r,f) < \infty$$

پس طبق قضیه‌ی قبل برای هر $0 \leqslant r < 1$، $M_\infty(r,f) \leqslant M$. بنابراین برای هر $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ و هر $0 \leqslant r < 1$، $|f(re^{i\theta})| \leqslant M$ بوده و f در D کراندار است.

قضیه ۷.۲.۱ (قضیه‌ی احاطی لیتلود) فرض کنیم f و F دو تابع تحلیلی در دیسک واحد بوده و $f \prec F$. در این صورت برای هر $0 < p \leqslant \infty$ و هر $0 < r \leqslant 1$،

$$M_p(r,f) \leqslant M_p(r,F) \ .$$

برهان : قضیه‌ی [۱.۷]، مرجع [۵].

فصل ۲

توابع محدّب وار

۱.۲ توابع ستاره‌گون و محدب

تعریف ۱.۱.۲ گوییم تابع $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ در $E \subseteq \mathbb{C}$ تک ارز[1] است هرگاه برای هر $z_1, z_2 \in E$ متمایز، $f(z_1) \neq f(z_2)$.

تابع f را به طور موضعی تک ارز[2] نامیم هرگاه برای هر $z_0 \in \mathbb{E}$، یک همسایگی حول z_0 موجود باشد بطوریکه f در آن همسایگی تک ارز است.

تذکر ۲.۱.۲ از این پس منظور از $\mathbb{A}$، مجموعه‌ی تمام توابع تحلیلی در دیسک واحد مانند f است بطوریکه $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$. بنابراین طبق قضیه‌ی ۵.۱.۱ مجموعه‌ی $\mathbb{A}$ متشکل از تمام توابع به فرم

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

خواهد بود.

مجموعه‌ی تمام توابع تک ارز در $\mathbb{A}$ را با S نشان می‌دهیم.

---

[1] univalent

[2] locally univalent

تعریف ۳.۱.۲ فرض کنیم $E \subseteq \mathbb{C}$ بوده و $a \in E$. مجموعه‌ی E را نسبت به a ستاره‌گون[۳] نامیم هرگاه برای هر $b \in E$، پاره خط واصل بین a و b در E واقع شود؛ یعنی برای هر $۰ < t < ۱$، $at + b(۱ - t) \in E$.

برای مثال هر ناحیه‌ی محدب که شامل a باشد، نسبت به a ستاره‌گون است.

تعریف ۴.۱.۲ فرض کنیم تابع f در دیسک واحد تحلیلی و تک ارز باشد. گوییم f نسبت به مبدأ ستاره‌گون است هرگاه $f(D)$ نسبت به مبدأ ستاره‌گون باشد.

مجموعه‌ی تمام توابع ستاره‌گون در $\mathbb{A}$ را با S^* نشان می‌دهیم.

قضیه ۵.۱.۲ فرض کنیم $f \in H(D)$ بوده و $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$. در این صورت $f \in S^*$ اگر و تنها اگر $\Re e(\frac{zf'(z)}{f(z)}) > ۰$ برای هر $z \in D$.

برهان : قضیه‌ی [۲.۱۰]، مرجع [٦].

تعریف ٦.۱.۲ فرض کنیم تابع f در دیسک واحد تحلیلی و تک ارز باشد. گوییم f محدب است هرگاه $f(D)$ مجموعه‌ای محدب باشد.

مجموعه‌ی تمام توابع محدب در $\mathbb{A}$ را با K نشان می‌دهیم.

تذکر ۷.۱.۲ $K \subseteq S^* \subseteq S \subseteq \mathbb{A}$.

قضیه ۸.۱.۲ فرض کنیم $f \in H(D)$ بوده، $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$. در این صورت $f \in K$ اگر و تنها اگر $\Re e(۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}) > ۰$ برای هر $z \in D$.

برهان : قضیه‌ی [۲.۱۱]، مرجع [٦] .

لم ۹.۱.۲ فرض کنیم A و B دو عدد حقیقی باشند بطوریکه $-۱ \leqslant B < A \leqslant ۱$. برای تبدیل موبیوس $\varphi_{A,B}(z) = \frac{۱+Az}{۱+Bz}$ احکام زیر برقرارند:

الف) $\varphi_{A,B}$ یک به یک بوده و در دیسک واحد تحلیلی است.

---

[۳] starlike

ب) $\varphi_{A,B}$ دیسک واحد را به نیم صفحه یا دیسک به قطر $(\frac{1+A}{1+B}, \frac{1-A}{1-B})$ می‌نگارد.

برهان : فرض کنیم برای $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ، $\varphi_{A,B}(z_1) = \varphi_{A,B}(z_2)$. پس

$$\frac{1 + A_1 z}{1 + B_1 z} = \frac{1 + A_2 z}{1 + B_2 z} \Longrightarrow B(z_2 - z_1) - A(z_2 - z_1) = 0 \Longrightarrow (z_2 - z_1)(B - A) = 0$$

لذا $z_2 = z_1$ و $\varphi_{A,B}$ یک به یک است. همچنین

$$\varphi'_{A,B}(z) = \frac{A(1 + Bz) - B(1 + Az)}{(1 + Bz)^2} = \frac{A - B}{(1 + Bz)^2}.$$

برای اثبات قسمت (ب)، ابتدا فرض کنیم $B = -1$ باشد. در این صورت بنا بر تعریف ۱۹.۱.۱ ، تبدیل $\varphi_{A,-1}$ دایره‌ی $|z| = 1$ را به یک خط راست می‌نگارد. داریم

$$\varphi_{A,-1}(i) = \frac{1 + Ai}{1 - i} = \frac{(1 + Ai)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 - A}{2} + i\frac{1 + A}{2}$$
$$\varphi_{A,-1}(-1) = \frac{1 - A}{2}$$

لذا معادله‌ی خط، $x = \frac{1-A}{2}$ است. چون $\varphi_{A,-1}(0) = 1$ و $\frac{1-A}{2} < 1$ ، پس داخل دایره‌ی $|z| = 1$ به نیم صفحه‌ی واقع در سمت راست خط $x = \frac{1-A}{2}$ نگاشته می‌شود.

برای $B = 0$ داریم

$$\varphi_{A,0}(z) = 1 + Az \ , \ z \in D$$

می‌دانیم تابع $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $F(z) = Az$ ، دیسک واحد را بروی دیسک $D(0, A)$ می‌نگارد. لذا $\varphi_{A,0}$ دیسک واحد را بروی دیسک $D(1, A)$ می‌نگارد.

حال فرض کنیم $-1 < B < 1$ و $B \neq 0$. در این صورت $|\frac{-1}{B}| > 1$ بوده و دایره‌ی $|z| = 1$ از نقطه‌ی $-\frac{1}{B}$ عبور نمی‌کند؛ پس تحت $\varphi_{A,B}$ به یک دایره نگاشته می‌شود که از نقاط زیر عبور می‌کند.

$$\varphi_{A,B}(1) = \frac{1 + A}{1 + B} \ \ , \ \ \varphi_{A,B}(-1) = \frac{1 - A}{1 - B}$$