بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

ایده‌آل - تحویل پذیری اپراتورهای مثبت

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

سحر عطارزاده

استاد راهنما

دکتر محمدتقی جهاندیده

۱۳۷۸

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی خانم سحر عطارزاده

تحت عنـــوان

ایده‌آل - تحویل‌پذیری اپراتورهای مثبت

در تاریخ ۷۹/۱/۲۹ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ـ استاد راهنمای پایان‌نامه — دکتر محمدتقی جهاندیده

۲ـ استاد مشاور پایان‌نامه — دکتر قدسیه وکیلی

۳ـ استاد داور ۱ — دکتر مهدی رجبعلی‌پور

۴ـ استاد داور ۲ — دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر امیر نادری

بسم رب

به نام خداوند لوح و قلم | حقیقت نگار وجود و عدم
خدایی که داننده رازهاست | نخستین سرآغاز آغازهاست

این کتاب عظیم هستی برای همیشه در جلوی چشمهای ما گشوده شده است و زبانی دارد ، و بدون دانستن آن فهم حتی یک واژه هستی غیر ممکن می نماید . آن زبان ریاضی است .

((گالیله))

برخود فرض و واجب می دانم تشکر و سپاس و اظهار ارادت تام به تمامی استادان ارجمندی که همچون راهنمایانی دلسوز مرا از وجود پر از فیض و دانش خویش بهره ها دادند و به جانب تکامل ره نمودند ؛ بویژه استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر جهاندیده که بدون روشنگری و راهنمائی و دستگیری بی دریغشان مرا هرگز یارای سپردن این ره نبود .

همچنین با تشکر از اساتید گرانمایه سرکار خانم دکتر وکیلی ، جناب آقای دکتر رجبعلی پور و آقای دکتر زنگنه که زحمات زیادی در به پایان رسیدن این مجموعه متحمل شدند .

و با سپاس از جناب آقای دکتر حقانی و جناب آقای علیرضایی که با ترجمه برخی از اصطلاحات مرا یاری نمودند . با سپاس فراوان از اولین معلم ریاضی ام ، مادرم

تقدیم به :

پـــدر و مـــادر مهربـــان و گرانقدرم که زبانم از ستودن آنهـــا قـــاصر و وجـــودم از محبتشان لبریز است .

و تقدیـــــم به همسر عزیـز و باوفـایم کـه در تدویـن ایـــن مجموعه با تمام وجـود یـاریم کردند .

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فهرست مطالب	شش
چکیـــده	۱
فصل صفر: مقدمـــه	۲
فصل اول: شبکه‌های باناخ	
۱ـ۱ـ پیشنیازها	۶
۱ـ۲ـ اپراتورها	۱۵
فصل دوم: اپراتورهای مثبت و شعاع طیفی	
۲ـ۱ـ اپراتورهای مثبت	۲۷
۲ـ۲ـ شعاع طیفی اپراتورهای مثبت و تحویل‌ناپذیر	۴۵
فصل سوم: زیرفضاهای پایا تحت اپراتورهای تعریف‌شده روی فضاهای ℓ_p	
۳ـ۱ـ زیرفضاهای پایا تحت ...	۶۲
فصل چهارم: شبه‌پوچ توان موضعی، گردشها و زیرفضاهای پایا	
۴ـ۱ـ گردشها و شبه‌پوچ توان موضعی	۷۳
۴ـ۲ـ گردشها و زیرفضاهای پایا	۸۳
یک مبحث تکمیلی	۸۶
واژه‌نامـــه	۸۷
فهرست منابع	۹۰

چکیده

می دانیم که هر اپراتور فشرده روی یک فضای باناخ دارای یک زیرفضای بسته پایای نابدیهی است . در این رساله صورت دیگری از این قضیه را که توسط د-بکتر به اثبات رسیده است بیان و اثبات می کنیم و خواهیم دید که چگونه می توان صورتهای دیگری از این قضیه را تحت شرائط ضعیف تر بدست آورد . به علاوه خواهیم دید که مفاهیمی که برای توسعه این قضیه ارائه شده اند می توانند خود منشأ اثبات قضایای دیگری برای مسئله ایده آل - تحویل پذیری اپراتورهای مثبت باشند .

فصل صفر

مقدمه

در سال ۱۹۵۷ ،آندو ثابت کرد که یک اپراتور هسته‌ای مثبت ،فشرده و باند-تحویل ناپذیر دارای شعاع طیفی اکیدا مثبت است.دوازده سال بعد کرایگر شرط فشردگی را از قضیه آندو حذف کرد ونتیجه قابل توجهی را به دست آورد.او ثابت کرد که هر اپراتور هسته‌ای مثبت وباند-تحویل ناپذیر شعاع طیفی اکیدا مثبت دارد.این نتیجه امروزه به عنوان قضیه آندو-کرایگر،شناخته می‌شود.اثباتهای ارائه‌شده توسط آندو و کرایگر ،شفاف نبودند و کوشش‌های زیادی به عمل آمده تا روشن کننده خواص ذاتی نهفته در ساختاراپراتورهای هسته‌ای باشند.علاوه بر این تلاشها،بسیاری از محققان به دیده امکان عمومیت بخشیدن قضیه آندو-کرایگر به آن نگریستند.افراد زیادی خود را وقف این تلاش و فهمیدن این موضوع کردند که از بین آنها می‌توان ازکیسل [۱۰] ،گرویلر [۱۴] ،دیگتر [۲۰] و شیفر [۲۵] نام برد.از میان نتایجی که این افراد ثابت کردند،باید یک امتیاز ویژه رابه قضیه زیبای دیگتر داد،چراکه حکم می‌کند که هر اپراتور مثبت،فشرده و ایده‌ال-تحویل‌ناپذیر بر یک شبکه باناخ دارای شعاع طبفی اکیدا مثبت است.به عبارت دیگر این قضیه نشان می‌دهد که هر اپراتور مثبت،فشرده و شبه پوچ توان دارای یک ایده‌ال بسته پایای نابدیهی است.

این رساله را با بیان مطالب و تعاریف مقدماتی در زمینه اپراتورهای مثبت و شبکه‌های باناخ (فصل اول)آغاز می‌کنیم.در فصل دوم ابتدا قضیه زیر فضای پایای لمونسوف را به همراه اثبات هیلدن بیان می‌کنیم ،تا روشی راکه دیگتر در اثبات قضیه‌اش به کار برد،بهتر درک کنیم.سپس به جای تحمیل همه شرایط بر یک اپراتور ایده‌ال -تحویل ناپذیر برخی از خواص را به اپراتورهایی که با آن جابجا می‌شوند،انتقال می‌دهیم.الیپرانتیس ، آبراموویچ و برکینشاو در سال ۱۹۹۲ با یک مطالعه دقیق اثبات دیگتر نشان دادند که یک اپراتور مثبت،فشرده، شبه پوچ توان بر یک شبکه باناخ دارای ایده‌ال بسته نابدیهی است که تحت هر اپراتور مثبت که با آن جابجا می‌شود،پایاست.چندین نتیجه جالب خودبخود به دست می‌آید.برای مثال نتیجه می‌شود ،که هر اپراتور مثبت و ایده‌ال-تحویل ناپذیرکه با یک اپراتور مثبت و فشرده جابجا می شود، شعاع طیفی اکیدا مثبت دارد.نتایج اصلی در این فصل تضمین می‌کند که یک اپراتور مثبت با خواص معین دارای شعاع طیفی اکیدا مثبت است.

مفهوم شبه پوچ توان موضعی برای اولین بار در سال ۱۹۹۲ توسط آبراموویچ ،آلیپرانتیس و برکینشاو در[۲] مطرح شد.فصل سوم را با بیان این تعریف آغاز می‌کنیم.سپس چند نتیجه در مورد وجود زیر فضاهای پایا تحت اپراتورهایی که بر فضاهای ℓ_p عمل می‌کنند و شبه پوچ توان موضعی هستند،بیان و اثبات می‌نمائیم.به عنوان مثال ثابت می‌کنیم که هر اپراتور مثبت بر فضای ℓ_p ؛ که در یک بردارمثبت و ناصفر شبه پوچ توان باشد،دارای زیر فضای بسته پایای نابدیهی است.این نتیجه (و بقیه احکامی که در این فصل ثابت می‌شوند)،برای اپراتورهای روی شبکه های باناخ گسسته همراه با نرم پیوسته ترتیبی نیز برقرار می‌باشد.

در سال ۱۹۹۹ آبراموویچ ،آلیپرانتیس و برکینشاو خاصیت جدید گردش را برای یک ماتریس نامتناهی ایجاد کردند .فصل چهارم این رساله را به بررسی ارتباط این مفهوم و ویژگی شبه‌پوچ توانی موضعی یک اپراتور روی فضای ℓ_p اختصاص داده‌ایم.در ادامه این فصل به کمک مفهوم گردش ،چند قضیه را در مورد وجود زیر فضاهای پایا تحت یک اپراتور روی فضای ℓ_p ارائه می‌دهیم.در پایان با آوردن یک مبحث

تکمیلی اشاره‌ای به کارهای ریاضیدان جوانی از کشور اسلونی می‌نمائیم.او که درنوسیک نام دارد با اثبات قضیه آندو-کرایگر و دیگتر برای نیم گروهی از اپراتورها تعمیمی از این دو قضیه به دست آورده است.

فصل اول

شبکه‌های باناخ[1]

در این فصل با افزودن رابطهٔ ترتیب و تجهیزات مورد نیاز دیگری بر فضاهای باناخ، فضاهای دیگری با عنوان شبکه‌های باناخ به دست می‌آوریم و خواص مهم این فضاها را بیان می‌کنیم. همچنین شبکه‌های باناخ ویژه‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در این زمینه مثالهایی می‌آوریم. سپس زیرمجموعه‌های مهمی از شبکه‌های باناخ، مانند ایده‌آل‌ها [2] را تعریف می‌کنیم.

درباره اپراتورها و نرم آنها نیز به بحث می‌پردازیم. بعد، از خواص شبکهٔ باناخ، برای تعریف اپراتورهایی با ویژگی‌های جدید بهره می‌گیریم و اپراتورهای مثبت و اپراتورهای ایده‌آل - تحویل‌ناپذیر و ... را تعریف می‌کنیم.

در این قسمت از رساله تعاریف و قضایای مورد نیاز در مورد طیف و شعاع طیفی [3] یک اپراتور نیز مطرح شده‌اند.

---

1) Banach lattices 2) Ideals 3) Spectral radius

۱-۱ پیشنیازها

در سرتاسر این رساله میدان مورد بحث $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ می‌باشد، که آن را با $\mathcal{F}$ نشان می‌دهیم.

۱ـ۱ـ۱ تعریف. رابطهٔ $\geq$ را یک رابطهٔ ترتیبی گویند، هرگاه بازتابی، پادتقارنی و ترایائی باشد.

۱ـ۱ـ۲ مثال. رابطهٔ " $\leq$ " در $\mathbb{R}$ یک رابطهٔ ترتیبی است.

۱ـ۱ـ۳ تعریف. فرض کنید V یک فضای برداری باشد. V را یک فضای برداری مرتب گوئیم، هرگاه مجهز به یک رابطهٔ ترتیب باشد، که با ساختار جبری V سازگار است. یعنی اگر x و y متعلق به V بوده و α عضو $\mathcal{F}$ باشد، در این صورت

الف) اگر $x \geq y$ ، آنگاه برای هر z متعلق به V ، $x + z \geq y + z$.

ب) اگر $x \geq y$ ، آنگاه برای هر اسکالر نامنفی α، $\alpha x \geq \alpha y$.

۱ـ۱ـ۴ مثال. فضای $\ell_p(1 \leq p < \infty)$ روی اعداد مختلط را در نظر می‌گیریم. ℓ_p تحت رابطه زیر فضای برداری مرتب است.

اگر x و y متعلق به ℓ_p باشند و $x = (x_1, x_2, \dots)$ و $y = (y_1, y_2, \dots)$، آنگاه $x \leq y$، اگر و فقط اگر، برای هر i، x_i و y_i اعداد حقیقی باشند و $x_i \leq y_i$.

۱ـ۱ـ۵ تعریف. اگر V یک فضای برداری مرتب باشد، آنگاه بردار x متعلق به V را مثبت[4] گوئیم هرگاه $x \geq 0$.

۱ـ۱ـ۶ نماد. مجموعهٔ همهٔ عناصر مثبت V با V^+ نمایش داده می‌شود. یعنی،

$$V^+ := \{x \in V : x \geq 0\}$$

۱ـ۱ـ۷ مثال. یک عنصر x متعلق به $\ell_p(1 \leq p < \infty)$ مثبت است، اگر همهٔ مؤلفه‌های آن اعداد حقیقی نامنفی باشند.

4) Positive

۱ـ۱ـ۸ تعریف. فرض کنید که V یک فضای برداری مرتب و بردار x متعلق به V باشد. اگر $x \geq \circ$ و $x \neq \circ$، آنگاه x را بردار مثبت و ناصفر گوئیم و با نماد "$x > \circ$" نشان می‌دهیم.

۱ـ۱ـ۹ تعریف. فرض کنید E یک فضای برداری مرتب باشد. E را فضای ریس [5] یا شبکهٔ برداری [6] گویند، هرگاه برای هر جفت از عناصر x و y متعلق به E کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پائین موجود و متعلق به E باشند.

۱ـ۱ـ۱۰ تعریف. فرض کنید E فضای ریس باشد. اگر x و y دو بردار در E باشند، آنگاه

$$x \vee y = \sup\{x, y\} \quad , \quad x \wedge y = \inf\{x, y\}$$

۱ـ۱ـ۱۱ مثال. $\ell_p(1 \leq p < \infty)$ نمونه‌ای از فضای ریس می‌باشد، که در آن $x \vee y$ و $x \wedge y$ به طریق زیر تعریف می‌شوند

$$x \vee y = (\sup\{x_1, y_1\}, \sup\{x_2, y_2\}, \dots)$$

و

$$x \wedge y = (\inf\{x_1, y_1\}, \inf\{x_2, y_2\}, \dots).$$

مثالهایی از فضاهای ریس متعاقباً معرفی خواهند شد.

۱ـ۱ـ۱۲ تعریف. یک فضای تابعی عبارت از یک فضای برداری E شامل توابع حقیقی مقدار بر روی یک مجموعه Ω است، به طوری که برای هر جفت از توابع f و g متعلق به E، توابع

$$f \vee g(\omega) = \max\{f(\omega), g(\omega)\}$$

و

$$f \wedge g(\omega) = \min\{f(\omega), g(\omega)\}$$

هر دو متعلق به E باشند.

به وضوح، هر فضای تابعی E با ترتیب نقطه‌ای (یعنی $f \leq g$، اگر و فقط اگر $f(\omega) \leq g(\omega)$، برای هر ω

5) Riesz space 6) Vector lattice

متعلق به Ω، یک فضای ریس است.

۱ـ۱ـ۱۳ مثال. در این مثال چند فضای تابعی را که اهمیت زیادی در آنالیز دارند، بیان می‌کنیم.

۱) R^{Ω} ، همهٔ توابع حقیقی مقدار بر مجموعهٔ Ω.

۲) $C(\Omega)$، همهٔ توابع حقیقی مقدار پیوسته، بر فضای توپولوژیک Ω.

۳) $C_b(\Omega)$ ، همهٔ توابع پیوسته حقیقی مقدار و کراندار بر فضای توپولوژیک Ω.

۴) $\ell_\infty(\Omega)$ ، همهٔ توابع حقیقی مقدار کراندار بر مجموعهٔ Ω.

۱ـ۱ـ۱۴ تعریف. فضای برداری V یک فضای نرمی گفته می‌شود، اگر به هر بردار x متعلق به V ، یک عدد حقیقی نامنفی $\|x\|$ نسبت داده شود، به طوری که

الف) برای هر x و y متعلق به V ، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

ب) برای هر x متعلق به V و هر اسکالر α ، $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

ج) اگر $\|x\| = ۰$ ، آنگاه $x = ۰$.

۱ـ۱ـ۱۵ تعریف. فضای نرمی V را یک فضای باناخ گوئیم، هرگاه نسبت به متریک القاء شده توسط نرمش کامل باشد. یعنی هر دنبالهٔ کشی در آن همگرا باشد.

۱ـ۱ـ۱۶ تعریف. برای یک بردار x در فضای ریس E بردارهای x^+ ، x^- و $|x|$ را به طریق زیر تعریف می‌کنیم

$$x^+ = x \vee ۰ \quad , \quad x^- = (-x) \vee ۰, \quad |x| = x \vee (-x).$$

بردار x^+، بخش مثبت x ، بردار x^- بخش منفی x و بردار $|x|$ ، قدرمطلق x گفته می‌شود.

۱ـ۱ـ۱۷ مثال. اگر x متعلق به ℓ_p باشد، آنگاه $|x| = (|x_۱|, |x_۲|, \ldots)$.

بردارهای x^+ ، x^- و $|x|$ دارای خواص زیر می‌باشند.