دانشگاه سمنان

دانشکده علوم پایه

« گروه ریاضی »

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

حلقه‌هایی با دوگان قضیه یکریختی

نگارش

فرزانه حضرتی

استاد راهنما

دکتر ناهید اشرفی

استاد مشاور

دکتر علی معدنشکاف

بهمن ماه ۱۳۸۹

قدردانی

وظیفه خویش می دانم که تمام قدردانی خویش را نثار اساتید گرانمایه‌ام در طی مراحل تحصیلی بنمایم. از استاد ارجمندم سرکار خانم دکتر اشرفی که در طول تحصیل و تدوین این پایان نامه همواره مشوق من بوده و با دقت تمام مرا یاری نموده‌اند صمیمانه تشکر نمایم.

از اساتید محترم دکتر بصیری (داور خارجی) و دکتر بهمنی (داور داخلی) که زحمت مطالعه پایان نامه اینجانب را بر عهده گرفته‌اند تشکر و قدر دانی نمایم. همچنین از استاد مشاور محترم آقای دکتر معدنشکاف که یاریم رساندند، سپاسگذارم.

در پایان از همسر و دختر عزیزم که مرا در این مهم همراهی نمودند، خالصانه سپاسگذارم.

فرزانه حضرتی

دی ماه ۱۳۸۹

تقدیم به :

همسرم و دخترم که همیشه پشتیبانم هستند.

چکیده

در قضیه‌ای معروف از ارلیش [1] [۸] آمده است که اگر α یک نگاشت از حلقه درونریختی های یک مدول M باشد، منظم یکه است اگرو فقط اگر منظم باشد و $\frac{M}{Im(\alpha)} \cong Ker(\alpha)$. این قضیه به دوگان قضیه یکریختی معروف است.

حال اگر فرض کنیم $M =_R R$ در این صورت عناصری از حلقه که در این ویژگی یعنی $\frac{R}{Ra} \cong l(a)$ صدق کنند را عناصر همریخت چپ می نامیم، که منظور از $l(a)$ پوچساز چپ a می باشد. حلقه‌هایی که هر عنصر آن دارای این ویژگی باشد را همریخت چپ می نامیم. در این پایان نامه ما به بیان ویژگی های این حلقه‌ها و رابطهٔ آن ها با حلقه‌های منظم و منظم یکه، حلقه‌های خاص، حلقه‌های گوشه‌ای وحلقه‌های ماتریسی می پردازیم.

درادامه حلقه‌های همریخت قوی را معرفی می کنیم و به بررسی همریخت چپ یا راست بودن حلقه چند جمله‌ای $\frac{R[x]}{(x^n)}$ می پردازیم. نشان می دهیم که حلقه R منظم یکه است اگر و فقط اگربرای هر $n \geq ۱$، حلقه چند جمله‌ای $\frac{R[x]}{(x^n)}$ همریخت قوی باشد اگر و فقط اگر حلقه $\frac{R[x]}{(x^۲)}$ همریخت چپ و راست باشد.

مطالب این پایان نامه براساس مقاله های [۱۹]، [۷]، [۱۱] تنظیم شده است.

واژه‌های کلیدی : حلقه‌های همریخت چپ، حلقه‌های منظم، حلقه‌های خاص چپ و راست، حلقه‌های $p-$نشاننده، حلقه‌های به طور قوی همریخت چپ، حلقه‌های گوشه‌ای و ماتریسی، $Gpf-$حلقه، حلقه چند جمله‌ای $\frac{R[x]}{(x^n)}$.

[1] $Erlich$

مقدمه

حلقه‌های همریخت چپ و راست برای اولین بار در سال ۲۰۰۴ توسط نیکلسون [2] در [۱۹] معرفی شدند. پس از آن وی و همکارانش به بررسی بیشتر این حلقه‌ها پرداختند و توانستند چندین نوع از حلقه‌های همریخت را معرفی کنند.

در این پایان نامه ابتدا با مفهوم همریخت چپ و راست بودن آشنا می شویم. این مفهوم برگرفته از قضیه‌ای معروف از ارلیش است که به دوگان قضیه یکریختی معروف است. بعد حلقه‌های همریخت چپ و راست را معرفی می کنیم. رابطه این حلقه‌ها را با حلقه‌های مختلف از جمله حلقه‌های منظم یکه و حلقه‌های خاص چپ و راست و... مورد بررسی قرار می دهیم. در ادامه بیان می کنیم که حلقه‌های همریخت چپ، حلقه‌هایی موضعی با رادیکال جیکوبسن پوچ توان هستند. در حقیقت این حلقه‌ها، حلقه‌هایی آرتینی چپ می باشند. همچنین نشان می دهیم که حلقه‌های نیم کامل و همریخت چپ، حاصل ضرب متناهی از حلقه‌های ماتریسی روی حلقه‌های همریخت چپ و موضعی می باشند. سپس با بیان مثالی نشان می دهیم که اگر R حلقه‌ای همریخت چپ باشد در این صورت حلقه ماتریسی $M_n(R)$ همریخت چپ نیست.

این پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است. در فصل اول با تعاریف اولیه از انواع حلقه، گروه و مدول آشنا خواهیم شد. در این میان لم ها، گزاره‌ها و قضایایی را بیان می کنیم که در درک بهتر مطالب فصل های بعدی بسیار مفید خواهد بود. فصل دوم که در سه بخش تنظیم شده است، ابتدا به بررسی حلقه‌های همریخت چپ و راست و بیان مثال هایی در این زمینه می پردازیم و همچنین گزاره‌ها و قضایایی را در این مورد بیان می کنیم. سپس ارتباط این حلقه‌ها را با حلقه‌های منظم یکه و حلقه‌های خاص چپ و راست بررسی می کنیم. در بخش دوم حلقه‌های ماتریسی و حلقه‌های گوشه‌ای را معرفی می کنیم و به بررسی ارتباط این حلقه‌ها با حلقه های همریخت چپ و راست می پردازیم. در ادامه این بخش به معرفی حلقه های ضمنی می پردازیم و قضایا و گزاره‌هایی را دراین مورد بیان می کنیم. در بخش پایانی این فصل حلقه‌های $p-$نشاننده چپ و راست را معرفی می کنیم و ارتباط این حلقه‌ها را با حلقه‌های همریخت چپ و راست را مورد بررسی قرار می دهیم. در ادامه قضیه‌ای اساسی در این زمینه که به قضیه ساختاری حلقه‌های همریخت معروف است را بیان می کنیم.

---

[2] $Nicholson$

فصل سوم را به بیان مثال هایی از حلقه‌های همریخت چپ و گوشه‌ای اختصاص داده‌ایم. در بخش اول این فصل به بیان مقدمات و تعاریفی در مورد این حلقه‌ها پرداخته‌ایم. در بخش دوم مثال هایی راجع به حلقه‌های همریخت چپ و گوشه‌ای بیان می کنیم، و در این ضمینه گزاره‌ها و لم‌ها و قضایایی را نیز بیان و اثبات می کنیم. سپس نشان می دهیم که عنصر $a \in R$ منظم یکه است اگر و فقط اگر برای هر ایدآل I از حلقه R، عنصر $\begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ در حلقه ماتریس های مثلثی $\begin{bmatrix} R & ۰ \\ I & R \end{bmatrix}$ همریخت چپ باشد.

در فصل چهارم به بررسی حلقه‌های همریخت چپ و راست و حلقه‌های منظم یکه پرداخته‌ایم. در بخش اول به معرفی حلقه چند جمله‌ای $\frac{R[x\,;\delta]}{(x^n)}$ می پردازیم و همریخت چپ یا راست بودن آن را مورد بررسی قرار می دهیم. مثال هایی از حلقه چند جمله ای که همریخت چپ نیست بیان می کنیم از جمله حلقه $\frac{\mathbb{Z}_۴[x,y]}{(x^۲,y^۲)}$. سپس به معرفی حلقه‌های همریخت چپ قوی می پردازیم و قضایا و لم هایی را درموردارتباط این حلقه‌ها با حلقه‌های منظم یکه بیان می کنیم. همچنین در این بخش نشان می دهیم که اگر حلقه R، منظم یکه باشد در این صورت برای هر $n \geq ۱$، حلقه چند جمله‌ای $\frac{R[x]}{(x^n)}$ همریخت قوی می باشد. در بخش دوم به بررسی معکوس یک نتیجه مهم از بخش اول می پردازیم. این بخش را با بیان گزاره‌ای که در آن نشان می دهیم، اگر حلقه چند جمله‌ای $\frac{R[x]}{(x^۲)}$ همریخت چپ باشد، در این صورت حلقه R همریخت چپ و نیم اول خواهد بود به پایان می رسانیم.

مطالب این پایان نامه براساس مقاله های [۱۹]، [۷]، [۱۱] تنظیم شده است.

در این جا تمامی تعاریف، مثال ها، لم ها، گزاره‌ها، قضیه‌هاو نتایج ابتدا با شماره فصل، بعد با شماره بخش و سپس با شماره‌ی مطلب مورد نظر آورده شده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم اولیه

در این فصل با تعاریف و قضایایی آشنا خواهیم شد که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می گیرند. اثبات قضایایی که کاربرد فراوان دارند ارائه گردیده است و از اثبات سایر قضایا صرف نظر شده است و جهت دیدن اثبات به مرجع مناسب ارجاع داده شده است.

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱ یک حلقه مجموعه‌ای است ناتهی مانند R همراه با دو عمل دو تایی جمع و ضرب به طوری که

۱) $(R,+)$ یک گروه آبلی است.

۲) به‌ازای هر $a,b,c \in R$ آن گاه $(ab)c = a(bc)$ (ضرب شرکت پذیر است).

۳) $a(b+c) = ab+ac$ و $(a+b)c = ac+bc$ (قوانین بخش پذیری از چپ و راست). هرگاه علاوه بر این

۴) اگر به ازای هر $a,b \in R$، $ab = ba$ آن گاه گوییم R یک حلقه تعویض پذیر است. هرگاه R شامل عنصری مانند ۱_R باشد به طوری که

۵) اگربه ازای هر $a \in R$، $1_R a = a 1_R = a$ آن گاه گوییم R یک حلقه یکدار است.

تعریف ۲.۱.۱ عنصر a در حلقه یکدار R را معکوس پذیر چپ (راست) گوییم اگر $c \in R$ $(b \in R)$ ای وجود داشته باشد که $ca = 1_R$ $(ab = 1_R)$ عنصر $c(b)$ معکوس چپ (راست) a نامیده می شود.

تعریف ۳.۱.۱ عنصر$a \in R$ که معکوس پذیر چپ و راست باشد معکوس پذیر یا یکه نامیده می شود.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی یکدار باشد. عنصر $a \neq 0$ متعلق به حلقه R را یکال R نامیم، هرگاه تحت ضرب حلقه وارون پذیر باشد. مجموعه‌ی عناصر یکال حلقه را با نماد $U(R)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد، عنصر e متعلق به R را خود توان نامیم هرگاه $e^2 = e$ و مجموعه‌ی همه‌ی خودتوان های حلقه R را با $Id(R)$ نمایش می دهیم. عنصرخود توان e را مرکزی نامیم هرگاه به ازای هر عنصر $r \in R$، $er = re$.

تعریف ۶.۱.۱ عنصر a از حلقه R را (منظم یکه) می نامیم، هرگاه عنصر(یکه) b در R موجود باشد به طوری که $aba = a$. حلقه R را یک حلقه (منظم یکه) می نامیم هرگاه هر عنصر آن دارای این ویژگی باشد.

مثال ۷.۱.۱ حلقه‌های تقسیم، منظم می باشند.

تعریف ۸.۱.۱ یک عنصر از حلقه R تمیز است، هرگاه آن عنصر، به صورت جمع یک عنصر خود توان و یک عنصر یکه نوشته شود. بنابراین R یک حلقه تمیز است هرگاه هر عنصر حلقه تمیز باشد.

تعریف ۹.۱.۱ عنصر $r \in R$ به طور یکتا تمیز است هرگاه عناصر منحصر به فرد $e \in Id(R)$ و $u \in U(R)$ یافت شود که $r = e + u$.

تعریف ۱۰.۱.۱ حلقه R را مستقیماً متناهی می نامیم، هرگاه برای هر a, b از حلقه R اگر $ab = ۱$ باشد آن گاه $ba = ۱$ باشد.

مثال ۱۱.۱.۱ هر حلقه‌ی جابجایی، مستقیماً متناهی است.

مثال ۱۲.۱.۱ هر خودتوان در یک حلقه‌ی به طور یکتا تمیز، مرکزی است.

فرض کنیم R یک حلقه باشد و $e^۲ = e \in R$. اگر $r \in R$ آن گاه $e + (er - ere)$ خودتوان است زیرا

$$(e + (er - ere))(er - ere)) = e + er - ere - erer + erere + erer - erere = e + (er - ere)$$

هم چنین $(er - ere) + ۱$ یکه است و معکوس آن $(ere - er) + ۱$ می باشد. و $(e + (er - ere)) + ۱ = e + (۱ + (er - ere))$ چون حلقه‌ی R به طور یکتا تمیز است، داریم

$e + (er - ere) = e$ لذا $er = ere$ به طور یکتا مشابه $er = ere$. بنابراین $re = er$ پس e خودتوان مرکزی است.

مثال ۱۳.۱.۱ هر حلقه‌ی به طور یکتاتمیز، مستقیماً متناهی است.

زیرا اگر فرض کنیم R یک حلقه‌ی به طور یکتا تمیز باشد و هم چنین $a, b \in R$ و $ab = ۱$ باشد. در این صورت ba خودتوان است، زیرا $baba = b(۱)a = ba$ چون R به طور یکتا تمیز است، پس ba مرکزی است. هم چنین

$$ba = ba(۱) = ba(ab) = a(ba)b = (ab)(ab) = ۱$$

بنابراین R حلقه‌ای مستقیماً متناهی است.

تذکر ۱۴.۱.۱ هر حلقه که مستقیماً متناهی نباشد را مستقیماً نامتناهی گوییم.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه باشد. یک R –مدول (چپ) گروهی آبلی و جمعی مانند A است همراه با تابعی مانند $\phi : R \times A \longrightarrow A$ (نقش (r, a) با ra نموده می شود) به طوری که به ازای هر $r, s \in R$ و $a, b \in A$

۱) $r(a + b) = ra + rb$.

۲) $(r + s)a = ra + sa$.

۳) $r(sa) = (rs)a$.

هرگاه، R دارای واحد ۱_R باشد و

۴) به ازای هر $a \in R$، $1_R a = a$.

آن گاه گوییم A یک $R-$ مدول یکانی است. هرگاه R یک حلقه بخشی باشد، آن گاه A یک فضای برداری (چپ) روی R نامیده می شود.

تعریف ۱۶.۱.۱ حلقه R را یک حلقه‌ی کاسچ [1] چپ می نامیم، هرگاه هر R مدول چپ ساده آن، در $_R R$ نشانده شود. یا به طور معادل، اگر L یک ایدآل چپ از حلقه R باشد، آن گاه حلقه R را یک حلقه کاسچ چپ می نامیم هرگاه $r(L) \neq 0$ باشد. منظور از $r(L)$ پوچساز راست حلقه L است.

تعریف ۱۷.۱.۱ مدول M را ساده گوییم هرگاه $M \neq 0$ و غیر از خودش و صفر زیر مدول دیگری نداشته باشد.

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه و S زیر مجموعه‌ای ناتهی از R باشد که تحت اعمال جمع و ضرب در R بسته است هرگاه S خود تشکیل حلقه‌ای تحت این اعمال دهد آن گاه S را یک زیر حلقه R می نامیم.

تعریف ۱۹.۱.۱ زیر حلقه I از حلقه R یک ایدآل چپ است هرگاه $r \in R$ و $x \in I$ آن گاه $rx \in I$ باشد و I، ایدآل راست است هرگاه برای هر $r \in R$ و $x \in I$، $xr \in I$ باشد.

---
[1] $kasch$

تعریف ۲۰.۱.۱ حلقه R را یک حلقه دو چپ می‌نامیم، هرگاه هر ایدآل چپ آن یک ایدآل راست نیز باشد.

تعریف ۲۱.۱.۱ اشتراک همه‌ی ایدآل های ماکسیمال چپ (راست) حلقه‌ی R را رادیکال جیکوبسن حلقه‌ی R می نامیم و آن را با نماد $J(R)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲۲.۱.۱ حلقه R را موضعی می نامیم، اگر تنها دارای یک ایدآل ماکسیمال چپ (راست) باشد. یا به عبارت دیگر، اگر J رادیکال جیکوبسن حلقه R باشد آن گاه $\frac{R}{J}$ یک حلقه تقسیم باشد یا $R-J$ از یکه‌های حلقه R تشکیل شده باشد.

مثال ۲۳.۱.۱ هرمیدان، یک حلقه‌ی موضعی است.

تعریف ۲۴.۱.۱ فرض کنیم $\{R_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای از حلقه‌ها باشد که به وسیله‌ی مجموعه‌ی ناتهی I اندیس گذاری شده باشد. حاصلضرب دکارتی $\prod\limits_{i\in I} R_i$ از مجموعه‌های R_i عبارت است از مجموعه‌ی تمام توابع $f : I \longrightarrow \cup\{R_i \mid i \in I\}$ به طوری که به ازای هر $i \in I$، $f(i) \in R_i$. فرض کنیم $i \in I.R_i$ $f, g \in\prod\limits_{i\in I}$، توابع $f+g$ و fg را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$(f+g)(i) = f(i) + g(i)$$

$$(fg)(i) = f(i)g(i)$$

در این صورت $f+g, fg \in \prod_{i\in I} R_i$. به آسانی می توان تحقیق کرد که $\prod_{i\in I} R_i$ همراه با دو عمل فوق تشکیل یک حلقه می دهد. این حلقه را حاصلضرب مستقیم خانواده‌ی حلقه‌های $\{R_i \mid i\in I\}$ نامیم و با نماد $\prod_{i\in I} R_i$ نشان می دهیم. عنصر صفر $\prod_{i\in I} R_i$ تابع $0 : I \longrightarrow \cup\{R_i \mid i\in I\}$ است که با $0(i) = 0_i$ تعریف می شود که در آن به ازای هر $i\in I$، 0_i عنصر صفر R_i است. معکوس جمعی $f\in \prod_{i\in I} R_i$ تابع $-f : I \longrightarrow \cup\{R_i \mid i\in I\}$ است که به ازای هر $i\in I$، با ضابطه $(-f)(i) = -f(i)$ تعریف شده است. فرض کنیم $f\in \prod_{i\in I} R_i$، برای هر $i\in I$، قرار می دهیم $f(i) = a_i$. معمولاً f با مجموع تصاویر $(a_i) \mid i\in I$ معین می شود. با استفاده از این نماد، به ازای هر $a_i, b_i\in R_i$ و هر $i\in I$، دو عمل فوق را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$(a_i)_{i\in I} + (b_i)_{i\in I} = (a_i)(b_i)_{i\in I}$$

$$(a_i)_{i\in I}(b_i)i\in I = (a_ib_i)i\in I$$

.

تعریف ۲۵.۱.۱ فرض کنید e یک عنصر خود توان از حلقه‌ی R باشد، دراین صورت حلقه‌ی eRe را حلقه‌ی گوشه‌ایی حلقه R می نامیم.

تعریف ۲۶.۱.۱ خود توان های e_1, e_2 ازحلقه‌ی R را خود توان های متعامد گوییم هرگاه $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$ باشد.

تعریف ۲۷.۱.۱ حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی ساده نامیم، هرگاه $R \neq 0$ و هم چنین 0 و R تنها اید آل های حلقه‌ی R باشند.

مثال ۲۸.۱.۱ هر حلقه تقسیم، یک حلقه‌ی ساده است.

مثال ۲۹.۱.۱ فرض کنید p عددی اول باشد. در این صورت گروه آبلی $\mathbb{Z}_p$ زیر گروه غیر بدیهی ندارد. وقتی $\mathbb{Z}_p$ را به عنوان $\mathbb{Z}-$مدول در نظر می گیریم، زیر مدول هایش دقیقاً همان زیر گروه‌های $\mathbb{Z}_p$، به عنوان گروه هستند. پس $\mathbb{Z}_p$ به عنوان $\mathbb{Z}-$مدول زیر مدول غیر بدیهی ندارد در نتیجه ساده است.

تعریف ۳۰.۱.۱ زیر مدول K از $R-$مدول M را در M اساسی نامیم هرگاه برای هر زیر مدول $L \leq M$ که $K \cap L = 0$ آن گاه $L = 0$ باشد و آن را با نماد $K \subseteq_e M$ نمایش می دهیم.

تعریف ۳۱.۱.۱ فرض کنید M، یک $R-$مدول باشد، مدول M را نیم ساده نامیم، هرگاه زیر مدول های ساده از M مانند $(t_\alpha)_{\alpha \in A}$ موجود باشند به طوری که $M = \oplus t_\alpha$.

مثال ۳۲.۱.۱ هر مدول ساده، نیم ساده است.

مثال ۳۳.۱.۱ فرض کنید M یک Rـمدول نیم ساده باشد. در این صورت هر مدول خارج قسمتی از M نیز نیم ساده است.

گیریم $\frac{M}{N}$ مدول خارج قسمتی دلخواهی از M باشد. فرض کنید J زیر مدولی دلخواه از $\frac{M}{N}$ باشد در این صورت زیر مدولی از M مثل J' موجود است که شامل N است و $J = \frac{J'}{N}$. چون M نیم ساده است زیر مدولی از M مثل J'' موجود است که $M = J' \oplus J''$. بنابراین $\frac{M}{N} = J \oplus \frac{(J'' \oplus N)}{N}$ که در آن $\frac{(J''+N)}{N}$ زیر مدولی از $\frac{M}{N}$ است. پس $\frac{M}{N}$ نیز نیم ساده است.

تعریف ۳۴.۱.۱ حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی بولی نامیم، اگر هر عنصر R خود توان باشد.

مثال ۳۵.۱.۱ $\mathbb{Z}_۲$ یک حلقه‌ی بولی است.

مثال ۳۶.۱.۱ هر حلقه‌ی بولی یک حلقه منظم است.

زیرا اگر فرض کنیم R یک حلقه بولی باشد، بنابراین برای هر $x \in R$، $x^۲ = x$. با توجه به این که حلقه‌های ما یکدار هستند، داریم

$x = x^۲ = x۱_Rx$. بنابراین R یک حلقه منظم است.

تعریف ۳۷.۱.۱ فرض کنید I اید آلی از حلقه R باشد گوییم می توان خود توان ها را به پیمانه I، بالا برد اگر برای هر $x \in R$ که $x^۲ - x \in I$، عنصر خود توان $e \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $x - e \in I$. به عبارت دیگر اگر $\bar{x} = x + I$ عنصر خود توان از حلقه $\frac{R}{I}$ باشد آن گاه عنصر خودتوان $e \in R$ یافت شود به طوری که $\bar{x} = \bar{e}$.

تعریف ۳۸.۱.۱ حلقه R را نیم کامل می نامیم هرگاه $\frac{R}{J(R)}$ نیم ساده باشد و خودتوان ها به پیمانه $J(R)$ بالا برده شوند.

مثال ۳۹.۱.۱ حلقه‌های موضعی، نیم کامل هستند.

تعریف ۴۰.۱.۱ موریتا کانتکس [۲]، چهارتایی (R, V, W, S) است که در آن V یک $(R-S)$ —دو مدول و W یک $(S-R)$ —دو مدول باضربهای $R \longrightarrow V \times W$ و $S \longrightarrow W \times V$ به طوری که

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} R & V \\ W & S \end{bmatrix}$$

یک حلقه شرکت پذیر با اعمال معمولی روی ماتریس ها باشد. در این صورت C را حلقه‌ی ضمنی می نامیم.

تعریف ۴۱.۱.۱ فرض کنیم M, N دو R—مدول باشند. مجموعه تمام R—هم ریختی ها از M به N را با $Hom(M, N)$ نمایش می دهیم، این مجموعه با عمل جمع معمولی توابع یک گروه آبلی است، در نتیجه $Hom_R(M, N)$ یک Z—مدول است.

تعریف ۴۲.۱.۱ فرض کنید C و D دو رسته باشند. تابعگون همورد از C به D زوجی متشکل از دو تابع است: یکی تابع شئ که به هر شئ از C مثل A، شئ $F(A)$ از D را نسبت می دهد، و دیگری تابع ریختار، که آن را با F نشان می دهیم و به هر ریختار از C مثل $f : A \longrightarrow B$ ریختاری از D مثل $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ را نسبت می دهد، با این ویژگی که

(۱) به ازای هر شئ از C مثل A، $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

(۲) به ازای هر ریختار از C مثل $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$، $F(gf) = F(g)F(f)$.

[۲] $Morita\ context$

زوج متشکل از این دو تابع، تابعگونی همورد از ${}_RM$ به Ab را نسبت می دهد. این تابعگون همورد را با $Hom_R(M,-)$ نشان می دهیم.

تعریف ۴۳.۱.۱ فرض کنید M، R—مدولی راست باشد و N، R—مدولی چپ و F را گروه آبلی $Z^{(M\times N)}$ در نظر بگیرید. گیریم K زیر گروهی از F باشد که توسط اعضای

$$(x+x',y)-(x,y)-(x',y), \tag{۱}$$

$$(x,y+y')-(x,y)-(x,y'), \tag{۲}$$

$$(xr,y)-(x,ry), \tag{۳}$$

تولید شده که در آن، $x,x'\in M$، $y,y'\in N$ و $r\in R$. در این صورت، گروه آبلی (Z—مدول) $\frac{F}{K}$ را حاصل ضرب تانسوری M,N می نامیم و آن را با نماد $M\otimes N$ نشان می دهیم. اگر M، Rـمدول راست و N، R—مدول چپ باشد، عضو $(x,y)+K$ از گروه آبلی (Z—مدول) $M\otimes N=\frac{F}{K}$ را با $x\otimes y$ نشان می دهیم.

تعریف ۴۴.۱.۱ فرض کنید F یک R—مدول باشد. مجموعهٔ مولد X برای F را پایه برای F می نامیم هرگاه مستقل خطی باشد، یعنی به ازای هر n عضو متمایز از X، مثل $x_۱,x_۲,x_۳,...,x_n$ و هر n عضو از R مثل $r_۱,r_۲,r_۳,...,r_n$، برای هر $i\geq ۱,...,n$، از $\sum r_ix_i=۰$ نتیجه شود $r_۱=r_۲=...=r_n=۰$.