بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

محضر ولی عصر(عج)

که همواره دلم را به نور امید زنده نگه داشته‌اند.

پروردگارا، سپاس بی‌پایان، تو را که، لطف بی‌کرانت شامل حال ما شد تا رهرویی باشیم در سبیل بی‌انتهای دانش و قطره‌ای باشیم در دریای بی‌انتهای معرفت. این بنده تو با گام نهادن در راه کسب و دانش در یکی از مسیرهای رسیدن به تو قرار گرفت. باشد که تا ثریّای دانش پناه همتش باشی.

اکنون که به یاری خداوند توانا توانستم این پژوهش را به پایان برسانم، لازم می‌دانم از کلّیه سروران و عزیزانی که یار و مددکار این حقیر در امر پژوهش بوده‌اند و در به اتمام رساندن این رساله مرا مورد لطف و عنایت خویش قرار داده‌اند، به ویژه جناب آقای دکتر مجتبی قیراطی و جناب آقای دکتر محمد بازیار کمال تشکر و قدردانی را ابراز نمایم.

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

حلقه‌های مورفیک، حلقه‌هایی که در دوگان قضیه یکریختی صدق می‌کنند

سخنران: نامدار حیدری

زمان: یک‌شنبه ۱۳۹۰/۶/۲۷ ساعت ۸ صبح

مکان: دانشکده علوم پایه– کلاس ۱۰۸

هیئت داوران

۱– دکتر مجتبی قیراطی (استاد راهنما)

۲– دکتر محمد بازیار (استاد مشاور)

۳– دکتر جمال هاشمی‌زاده (داور خارج از دانشکده)(دانشگاه شهید چمران اهواز)

۴– دکتر علی طاهری‌فر (داور داخل دانشکده)

دانشگاه یاسوج، دانشکده علوم

حلقه‌های مورفیک، حلقه‌هایی که در دوگان قضیه یکریختی صدق می‌کنند

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی‌محض (گرایش جبر)

نامدار حیدری

استاد راهنما

دکتر مجتبی قیراطی

شهریور ۱۳۹۰

دانشگاه یاسوج، دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی‌محض (گرایش جبر) آقای نامدار حیدری

تحت عنوان

حلقه‌های مورفیک، حلقه‌هایی که در دوگان قضیه یکریختی صدق می‌کنند

در تاریخ ۱۳۹۰/۶/۲۷ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما	دکتر مجتبی قیراطی	
۲– استاد مشاور	دکتر محمد بازیار	
۳– داور خارج از دانشکده	دکتر جمال هاشمی‌زاده	دانشگاه شهید چمران اهواز
۴– داور داخل دانشکده	دکتر علی طاهری‌فر	

فهرست مطالب

چکیده:

حلقه R مورفیک چپ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a \in R$ داشته باشیم $\frac{R}{Ra} \cong \mathrm{l}(a)$ که در آن $\mathrm{l}(a)$ پوچساز چپ a در R می‌باشد. مورفیک راست نیز به صورت مشابه تعریف می‌شود. مثال‌هایی شامل حلقه‌های منظم واحد، حلقه‌های رشته‌ای موضعی ارائه می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که هر حلقه مورفیک چپ، P–انژکتیو راست می‌باشد و در هر حلقه مورفیک چپ، که هر ایدآل چپ ماکسیمال از آن، اصلی باشد، یا یک پوچساز باشد، کَش چپ می‌باشد. نشان می‌دهیم که در حلقه‌های مورفیک چپ و راست، خواص آرتینی، نیم‌اولیه و کامل چپ معادل می‌باشند. سپس حلقه‌های قویاً مورفیک چپ را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر R منظم واحد باشد آنگاه $\frac{R[x]}{(x^n)}$ برای هر $n \geq 1$ قویاً مورفیک است و همچنین ثابت می‌کنیم که اگر R حلقه منظم واحد و I یک ایدآل از آن باشد آنگاه $R \propto I$ قویاً مورفیک است. سپس نشان می‌دهیم که R منظم واحد است اگر و فقط اگر $\frac{R[x]}{(x^2)}$ مورفیک باشد.

فصل ۱

مفاهیم و مطالب مورد نیاز از حلقه و مدول

در این فصل تعاریف، قضایا و مفاهیمی که برای آشنایی با موضوع پایان‌نامه لازم است و در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده شده است. حلقه‌های مطرح شده در این پایان‌نامه یکدار هستند.

۱–۱ پیش‌نیازها

تعریف ۱.۱ فرض کنیم M یک R–مدول باشد. مجموعه همه R–درونریختی‌های M را حلقه درونریختی‌های M می‌نامیم و با نماد $\mathrm{End}(M)$ و یا برای تاکید روی حلقه R با نماد $\mathrm{End}_R(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱ عنصر $a \in R$ مرکزی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $b \in R$ داشته باشیم $ab = ba$. اعضای مرکزی R تشکیل یک زیرحلقه از R را می‌دهند که آن را با نماد $\mathrm{Z}(R)$ نمایش می‌دهیم. واضح است که $۱ \in \mathrm{Z}(R)$.

قضیه ۳.۱ فرض کنید R یک حلقه بوده و $R[X]$ مجموعه دنباله‌ها از عناصر R مانند $(a_۰, a_۱, \cdots)$ باشند به طوری که به ازای هر i، جز تعدادی متناهی، $a_i = ۰$ در این صورت:

۱) $R[X]$ حلقه‌ای است با جمع و ضربی که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a_۰, a_۱, \cdots) + (b_۰, b_۱, \cdots) = (a_۰ + b_۰, a_۱ + b_۱, \cdots)$$

و $(a_0, a_1, \cdots).(b_0, b_1, \cdots) = (c_0, c_1, \cdots)$ که در آن

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b_i = a_n b_0 + a_{n-1}b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n = \sum_{k+j=n} a_k b_j$$

۲) هرگاه R حلقه‌ای تعویض‌پذیر (حلقه‌ای یکدار یا حلقه‌ای بدون مقسوم‌علیه صفر یا دامنه صحیح) باشد آنگاه $R[X]$ نیز چنین است.

۳) نگاشت $R \to R[X]$ داده شده با $r \to (r, 0, 0, \cdots)$ یک تکریختی از حلقه‌ها است.

برای اثبات، صفحه (۲۳۳) از مرجع [۲۹] را ببینید.
حلقه $R[X]$، حلقه چند جمله‌ای‌ها روی R نامیده می‌شود و اعضای آن را چند جمله‌ای می‌نامیم.

تعریف **۴.۱** فرض کنید R یک حلقه و σ یک درونریختی از R باشد. حلقه جدید $R[x;\sigma]$ با تعریف $xa = \sigma(a)x$ حلقه چند جمله‌ای کج[1] نام دارد. عناصر حلقه چند جمله‌ای کج $R[x;\sigma]$ چند جمله‌ای‌های چپ به فرم $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ هستند، با جمع معمولی و ضربی که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\left(\sum a_i x^i\right)\left(\sum b_j x^j\right) = \sum a_i \sigma^i(b_j) x^{i+j}.$$

توجه کنید که اگر σ همانی باشد، حلقه تبدیل به حلقه چند جمله‌ای معمولی $R[x]$ می‌شود. اگر σ همانی نباشد، آنگاه $R[x;\sigma]$ یک حلقه جابجایی نخواهد بود، حتی اگر R جابجایی باشد. بنابراین شرط لازم و کافی برای اینکه حلقه $R[x;\sigma]$ جابجایی باشد این است که σ همریختی همانی و R جابجایی باشد.
چند جمله‌ای‌های راست (ضرایب در سمت راست ظاهر می‌شوند) به فرم $c_0 + xc_1 + \cdots + x^n c_n$ هستند، اما این‌ها چند جمله‌ای‌های چپ با فرم مخصوص $c_0 + \sigma(c_1)x + \cdots + \sigma^n(c_n)x^n$ هستند. توجه داشته باشید که هر عضو از حلقه $R[x;\sigma]$ را نمی‌توان به عنوان چند جمله‌ای راست نوشت. البته اگر σ پوشا باشد، آنگاه هر چند جمله‌ای چپ یک نمایش راست نیز خواهد داشت.

نکته **۵.۱** اگر σ یک همریختی یک به یک و R دامنه باشد، آنگاه حلقه $R[x;\sigma]$ یک دامنه است.
قرارداد: همریختی حلقه‌ای جمع و ضرب را منتقل می‌کند و $\sigma(1_R) = 1_R$.

تعریف **۶.۱** فرض کنید D یک حلقه و C یک زیرحلقه از D باشد مجموعه

$$R[D, C] = \{(d_1, \cdots, d_n, c, c, \cdots) | d_i \in D, c \in C, n \geq 1\}$$

با جمع و ضربی که روی مولفه‌های آن تعریف می‌شود یک حلقه است.

[1] Twisted Polynomial Ring

تعریف ۷.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. یک زیرمدول E از M، در M اساسی نامیده می‌شود هرگاه برای هر زیرمدول غیر صفر N از M، $E \cap N \neq \circ$ باشد و با نماد $E \leq_e M$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۸.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. موارد زیر معادل هستند:

۱) زیرمدول N از M، در M اساسی است؛

۲) N هر زیرمدول غیر صفر و دوری را به صورت غیر بدیهی قطع کند؛

۳) برای هر $\circ \neq x \in M$ یک $r \in R$ موجود است به طوری که $\circ \neq rx \in N$ باشد.

اثبات :

$(۱ \Rightarrow ۲)$ اگر $N \leq_e M$ آنگاه N هر زیرمدول غیر صفر از M را به صورت غیر بدیهی قطع می‌کند لذا زیرمدول‌های غیر صفر و دوری را نیز به صورت غیر بدیهی قطع می‌کند.

$(۲ \Rightarrow ۳)$ اگر N هر زیرمدول غیر صفر و دوری را به صورت غیر بدیهی قطع کند و $\circ \neq x \in M$ آنگاه N مدول Rx را به صورت غیر بدیهی قطع می‌کند لذا یک $r \in R$ وجود دارد که $\circ \neq rx \in N$.

$(۳ \Rightarrow ۱)$ اگر برای هر $\circ \neq x \in M$ یک $r \in R$ وجود داشته باشد که $\circ \neq rx \in N$ و فرض کنید $S \leq M$ دلخواه و غیر صفر باشد و $\circ \neq s \in S$ را در نظر بگیرید حال چون $s \in S$ پس $r \in R$ وجود دارد که $\circ \neq rs \in N$ و $rs \in S$ در نتیجه $\circ \neq rs \in (N \cap S)$ لذا $N \leq_e M$.

مثال ۹.۱ در $\mathbb{Z}$ هر زیرمدول غیر صفر اساسی است.

تعریف ۱۰.۱ $R-$مدول غیر صفر M را یک مدول یکنواخت[۲] گویند هر گاه هر دو زیرمدول غیر صفر آن دارای اشتراک غیر صفر باشند. یا به طور معادل، مدول غیر صفر M ، یکنواخت است اگر هر زیرمدول غیر صفر آن، در M اساسی باشد.

تعریف ۱۱.۱ اگر a عضو دلخواهی از حلقه R باشد، پوچساز چپ a عبارت است از همه عناصری از R مانند x به طوری که $xa = \circ$ باشد و با $\mathrm{l}_R(a)$ یا به طور خلاصه با $\mathrm{l}(a)$ نمایش می‌دهیم:

$$\mathrm{l}_R(a) = \{x \in R | xa = \circ\}$$

پوچساز راست a عبارت است از همه عناصری از R مانند x به طوری که $ax = \circ$ باشد و با $\mathrm{r}_R(a)$ یا $\mathrm{r}(a)$ نمایش می‌دهیم:

$$\mathrm{r}_R(a) = \{x \in R | ax = \circ\}$$

[۲] uniform

و همچنین اگر $X \subseteq R$ باشد تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{l}_R(X) = \{r \in R | rx = 0, \text{برای هر } x \text{ در } X\}$$

اگر R یک حلقه و $a \in R$ باشد پوچساز a را با $\mathrm{Ann}_R(a)$ یا $\mathrm{Ann}(a)$ نمایش می‌دهیم و برابر است با $\mathrm{l}(a) \cap \mathrm{r}(a)$.

تعریف ۱۲.۱ اگر M یک R–مدول چپ باشد پوچساز M در R را به صورت

$$\mathrm{Ann}(M) = \{r \in R | rx = 0, \text{برای هر } x \text{ در } M\}$$

تعریف می‌کنیم.
R–مدول M وفادار گفته می‌شود هرگاه $\mathrm{Ann}(M) = 0$ باشد.

مثال ۱۳.۱ فرض کنید D حلقه تقسیم و V، D فضای برداری غیر صفر باشد در این صورت واضح است که $\mathrm{Ann}(V) = 0$. پس V به عنوان D فضای برداری، وفادار است. و اگر قرار دهیم $R = \mathrm{End}_D(V)$، آنگاه V به عنوان R–مدول نیز وفادار است. (برای هر $\sigma \in R$ و هر $v \in V$ ضرب اسکالر را به صورت $\sigma.v = \sigma(v)$ تعریف می‌کنیم.)

تبصره ۱۴.۱ موارد زیر همواره صحیح می‌باشند:

۱) اگر u یک عضو یکه در حلقه R باشد آنگاه $\mathrm{l}(u) = \{0\}$.

۲) اگر e یک عضو خودتوان حلقه R باشد و قرار دهیم $f = 1 - e$ آنگاه $\mathrm{l}(e) = Rf$ و $\mathrm{l}(f) = Re$.

۳) اگر R یک حلقه و $A \subseteq R$ باشد $\mathrm{l}_R(A)$ اید آل چپ R و $\mathrm{r}_R(A)$ اید آل راست R می‌باشند.

۴) اگر R یک حلقه و $a, b \in R$ باشد که $ba = 1$ و $\mathrm{l}(a) = 0$ آنگاه $ab = 1$.

۵) اگر u یک عضو یکه و a یک عضو دلخواه حلقه R باشند آنگاه $\mathrm{l}(ua) = \mathrm{l}(a)u^{-1}$ و $\mathrm{l}(au) = \mathrm{l}(a)$.

۶) اگر a عضو دلخواهی از حلقه R باشد آنگاه $\mathrm{l}(a) \cap \mathrm{l}(1 - a) = 0$، $\mathrm{r}(a) \cap \mathrm{r}(1 - a) = 0$، $\mathrm{l}(a) = \mathrm{l}(aR)$ و $\mathrm{r}(a) = \mathrm{r}(Ra)$.

۷) اگر a عضو دلخواهی از حلقه R و $\mathrm{l}(a) = 0$ باشد آنگاه a پوچتوان نیست.

۸) اگر R یک حلقه $X \subseteq Y \subseteq R$ آنگاه $\mathrm{l}(Y) \subseteq \mathrm{l}(X)$.

۹) اگر R یک حلقه و X زیرمجموعه دلخواه از R باشد آنگاه $X \subseteq \mathrm{l}(\mathrm{r}(X))$.

تعریف ۱۵.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. K، M و N، $R-$مدول باشند، و $f : M \longrightarrow N$ و $g : K \longrightarrow M$ همریختی‌های $R-$مدولی باشند. دنباله

$$K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

را کامل گوییم اگر $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

تعریف ۱۶.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. دنباله کامل از $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی‌ها به صورت

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

را دنباله کامل کوتاه می‌نامیم.
این دنباله شکافته‌شدنی است اگر زیرمدول $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ جمعوند مستقیم M باشد، یعنی اگر زیرمدولی چون H از M وجود داشته باشد به طوری که $M = \mathrm{Ker}(g) \bigoplus H$.

تعریف ۱۷.۱ $R-$مدول M پروژکتیو نامیده می‌شود اگر برای هر همریختی پوشای g از K به روی N و هر همریختی γ از M به N، یک درونریختی h از M به K موجود باشد به طوری که $\gamma = gh$.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\gamma"] & \\ K \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \arrow[from=1-2, to=2-1, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

تعریف ۱۸.۱ $R-$مدول M انژکتیو نامیده می‌شود اگر برای هر همریختی یک به یک g از N به توی K و هر همریختی γ از N به M، یک درونریختی h از K به M موجود باشد به طوری که $\gamma = hg$.

$$\begin{tikzcd} & M & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "g"'] & K \arrow[from=1-2, to=2-3, dashed, "h"] \end{tikzcd}$$

۱—۲ رادیکال جیکوبسن حلقه‌ها

تعریف ۱۹.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. اشتراک ایدآل‌های چپ ماکسیمال را، رادیکال جیکوبسن حلقه R می‌نامیم و با $\mathrm{J}(R)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۲۰.۱ برای یک حلقه R عبارات زیر برقرار می‌باشد.

۱) $\mathrm{J}(R)$ برابر است با اشتراک ایدآل‌های راست ماکسیمال R.

۲) $\mathrm{J}(R) = \{x \in R |$ برای هر $x \in R$، $1 - rx$ وارون‌پذیر چپ باشد. $\}$

مثال ۲۱.۱

۱) فرض کنیم D یک حلقه تقسیم باشد. چون D ایدآل چپ غیر بدیهی ندارد پس صفر تنها ایدآل چپ ماکسیمال D است، در نتیجه $\mathrm{J}(D) = \circ$.

۲) ایدآل‌های ماکسیمال حلقه $\mathbb{Z}$ به صورت $p\mathbb{Z}$ هستند که در آن p عددی اوّل است. پس $\mathrm{J}(\mathbb{Z}) = \bigcap p\mathbb{Z} = \circ$.

گزاره ۲۲.۱

۱) فرض کنیم R یک حلقه باشد، در این صورت $\mathrm{J}(R)$ یک ایدآل از R است.

۲) اگر R یک حلقه آرتینی چپ (آرتینی راست، آرتینی) باشد، در این صورت، $\mathrm{J}(R)$ پوچتوان است، یعنی عدد طبیعی n موجود است به طوری که $\mathrm{J}(R)^n = \circ$.

۳) اگر $\mathrm{J} = \mathrm{J}(R)$ و e یک خودتوان غیر صفر از حلقه R باشد آنگاه $\mathrm{J}(eRe) = e\mathrm{J}e$.

برای اثبات، صفحه (۱۸۳) از مرجع [۶] را ببینید.

۱ــ۳ حلقه‌ها و مدول‌های نوتری و آرتینی

تعریف ۲۳.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. مدول M در شرط زنجیر افزایشی (ACC) [۳] بر زیرمدول‌هایش صدق می‌کند هرگاه برای هر زنجیر

$$M_{۱} \subseteq M_{۲} \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$$

از زیرمدول‌های M عدد صحیح n موجود باشد به طوری که برای هر $i \geq ۱$، $M_n = M_{n+i}$.

تعریف ۲۴.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. مدول M در شرط زنجیر کاهشی (DCC) [۴] بر زیرمدول‌هایش صدق می‌کند هرگاه برای هر زنجیر

$$M_{۱} \supseteq M_{۲} \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$$

از زیرمدول‌های M، عدد صحیح n موجود باشد به طوری که برای هر $i \geq ۱$، $M_n = M_{n+i}$.

[۳] Ascending Chain Condition
[۴] Descending Chain Condition

تعریف ۲۵.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. مدول M نوتری (آرتینی) است هرگاه زیرمدول‌های M در شرط زنجیر افزایشی (کاهشی) صدق کنند.

تعریف ۲۶.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد. R نوتری چپ است هرگاه ایدآل‌های چپ R در شرط زنجیر افزایشی صدق کنند، و R نوتری راست است هرگاه ایدآل‌های راست R در شرط زنجیر افزایشی صدق کنند. حلقه R، نوتری است هرگاه هم نوتری چپ و هم نوتری راست باشد.

مثال ۲۷.۱

۱) هر میدان یک حلقه نوتری است.

۲) حلقه $\mathbb{Z}$ از اعداد صحیح، نوتری است.

۳) فرض کنیم p عددی اوّل باشد. مجموعه

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}, n \geq ۱\}$$

را در نظر می‌گیریم. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ زیرمدولی از $\mathbb{Z}-$مدول $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ است. هر زیرمدول دلخواه سره از $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به ازای عددی طبیعی مثل k، به صورت

$$H_k = \{\mathbb{Z}, \frac{۱}{p^{k-۱}} + \mathbb{Z}, \frac{۲}{p^{k-۱}} + \mathbb{Z}, \cdots, \frac{p^{k-۱}-۱}{p^{k-۱}} + \mathbb{Z}\}$$

می‌باشد. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ نوتری نیست، زیرا زنجیر صعودی $H_۱ \subsetneqq H_۲ \subsetneqq \cdots$ از زیرمدول‌های $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ هرگز متوقف نمی‌شود.

گزاره ۲۸.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. در این صورت M نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر هر مجموعه ناتهی از زیرمدول‌های M، عضو ماکسیمال (مینیمال) داشته باشد.
برای اثبات، صفحه (۱۵۳) از مرجع [۳۱] را ببینید.

گزاره ۲۹.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. در این صورت M نوتری است اگر و تنها اگر هر زیرمدول از M متناهی مولد باشد.
برای اثبات، صفحه (۱۵۷) از مرجع [۳۱] را ببینید.

تعریف ۳۰.۱ فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. زنجیر

$$۰ = M_۰ \subsetneqq M_۱ \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_n = M$$

از زیرمدول‌های M را زنجیر سره از زیرمدول‌های M می‌نامیم و n را طول زنجیر تعریف می‌کنیم. اگر به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، R–مدول‌های خارج قسمتی $\frac{M_i}{M_{i-1}}$ ساده باشند، زنجیر را سری ترکیبی برای M می‌نامیم.

تعریف ۳۱.۱ یک مدول M که دارای یک سری ترکیبی باشد یک مدول با طول متناهی نامیده می‌شود. طول یک سری ترکیبی از M طول M نامیده می‌شود و با $\lg(M)$ نشان داده می‌شود.

گزاره ۳۲.۱ فرض کنیم M یک R–مدول باشد. در این صورت M با طول متناهی است اگر و تنها اگر M هم آرتینی و هم نوتری باشد.

اثبات: فرض کنیم $\cdots \subsetneqq M_2 \subsetneqq M_1$ یک زنجیر افزایشی از زیرمدول‌های M باشد، و فرض کنیم l طول M (یعنی طول یک سری ترکیبی از M) باشد. ادعا می‌کنیم که در این زنجیر حداکثر $l+1$، M_i متفاوت ظاهر می‌شود. فرض کنیم بیشتر از $l+1$ وجود داشته باشد، آنگاه یک زیرزنجیر از زنجیر بالا به فرم

$$M_{i_1} \subsetneqq M_{i_2} \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_{i_{l+2}}$$

وجود دارد که باید یک سری ترکیبی از M باشد و در نتیجه M باید دارای طول بیشتر یا مساوی $l+1$ باشد. اما اگر زنجیر بالا دارای تنها تعدادی متناهی M_i متفاوت باشد آنگاه زنجیر بالا ایستا است، بنابراین M نوتری است. به طور مشابه نتیجه می‌شود که M آرتینی است.

برعکس: چون M نوتری است هر زیرمدول آن نیز نوتری است. بنابراین هر زیرمدول از M از جمله خود آن دارای یک زیرمدول ماکسیمال است. زنجیر

$$M \supsetneqq M' \supsetneqq M'' \supsetneqq \cdots$$

از زیرمدول‌های M را در نظر می‌گیریم که هر یک در ماقبل خود ماکسیمال است. چون M آرتینی است لذا این زنجیر ایستا است و یک سری ترکیبی است یعنی M دارای طول متناهی است. ■

۱–۴ حلقه ساده و نیم‌ساده

تعریف ۳۳.۱ حلقه R را ساده می‌گوییم هرگاه ایدآل غیر بدیهی نداشته باشد.

قضیه ۳۴.۱ برای حلقه R عبارات زیر معادل می‌باشند:

۱) R ساده است؛

۲) $\mathrm{Z}(R)$ میدان است و برای هر ایدآل $I \neq 0$ از R داریم $I \cap \mathrm{Z}(R) \neq 0$؛

۳) خودتوان مرکزی غیر صفر در R وجود دارد به طوری که هر ایدآل غیر صفر از R را تولید می‌کند.

برای اثبات، صفحه (۱۵) از مرجع [۶] را ببینید.

تعریف ۳۵.۱ حلقه R را نیم‌ساده چپ[۵] (راست) می‌گوییم هرگاه R جمع مستقیم ایدآل‌های چپ (راست) مینیمال باشد.

قضیه ۳۶.۱ برای حلقه R عبارات زیر معادل می‌باشند:

۱) R نیم‌ساده چپ است؛

۲) R جمع متناهی از ایدآل‌های چپ مینیمال است؛

۳) هر ایدآل چپ جمعوند مستقیم R می‌باشد؛

۴) هرایدآل چپ R با یک خودتوان تولید می‌شود؛

۵) R نیم‌ساده راست است.

برای اثبات، صفحه (۱٦) از مرجع [٦] را ببینید.

مثال ۳۷.۱ :

۱) اگر D حلقه تقسیم باشد آنگاه D و $M_n(D)$ نیم‌ساده چپ و راست می‌باشند.

۲) اگر $D_1, \cdots, D_n$ حلقه تقسیم باشند آنگاه $\prod_{i=1}^{n} M_{n_i}(D_i)$ حلقه نیم‌ساده چپ و راست می‌باشد.

تعریف ۳۸.۱ مطابق قضیه قبل نیم‌ساده چپ و نیم‌ساده راست معادل هستند. از این رو حلقه‌های با این خاصیت را به صورت خلاصه، نیم‌ساده می‌نامیم.

تعریف ۳۹.۱ حلقه R را J-نیم‌ساده یا نیمه‌اولیه[٦] می‌گوییم هرگاه $\mathrm{J}(R) = 0$ باشد.

تعریف ۴۰.۱ حلقه R را نیمه‌ابتدایی[۷] می‌گوییم هرگاه $\mathrm{J}(R)$ پوچتوان باشد و $\frac{R}{\mathrm{J}(R)}$ حلقه‌ای نیم‌ساده باشد.

قضیه ۴۱.۱ (قضیه هاپکینز) فرض کنید R حلقه‌ای نیمه‌اولیه و $\mathrm{J}(R)$ پوچتوان باشد و M یک R-مدول باشد آنگاه M نوتری است اگر و فقط اگر آرتینی باشد.

برای اثبات، صفحه (۲۰۳) از مرجع [۳۱] را ببینید.

---
[۵] left semisimple
[٦] Semiprimitive Ring
[۷] Semiprimary Ring

مثال ۴۲.۱ :

۱) هر حلقه تقسیم، J$-$نیم‌ساده است.

۲) $\mathbb{Z}$، J$-$نیم‌ساده است.

۳) برای هر حلقه R، حلقه $\frac{R}{\mathrm{J}(R)}$، J$-$نیم‌ساده است.

قضیه ۴۳.۱ فرض کنید R یک حلقه و M یک $R-$مدول چپ باشد در این صورت:

۱) R حلقه‌ای نیم‌ساده است اگر و فقط اگر R آرتینی چپ (آرتینی راست، آرتینی) و J$-$نیم‌ساده باشد.

۲) اگر R آرتینی چپ (آرتینی راست، آرتینی) باشد آنگاه $\frac{R}{\mathrm{J}(R)}$ نیم‌ساده است.

۳) اگر R آرتینی چپ و M یک $R-$مدول چپ باشد در این صورت M نوتری است اگر و فقط اگر آرتینی باشد.

برای اثبات، صفحه (۲۰۵) از مرجع [۳۱] را ببینید.

قضیه ۴۴.۱ برای حلقه R عبارات زیر معادل می‌باشند:

۱) R حلقه نیم‌ساده است؛

۲) هر $R-$مدول چپ (راست) نیم‌ساده است؛

۳) هر دنباله دقیق کوتاه از $R-$مدول‌های چپ (راست) و $R-$همریختی‌ها شکافته می‌شود؛

۴) هر $R-$مدول چپ (راست) پروژکتیو است؛

۵) هر $R-$مدول چپ (راست) انژکتیو است؛

۶) هر ایدآل چپ (راست) R به صورت Re (eR) می‌باشد؛ (e خودتوان است.)

۷) R را می‌توان به صورت $R = \bigoplus_{i=1}^{n} L_i$ نوشت که در آن هر L_i ایدآل چپ مینیمال از R می‌باشد و به ازای هر i، $L_i = Re_i$ که در آن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ مجموعه‌ای کامل از خودتوان‌های متعامد R می‌باشد؛

۸) R آرتینی چپ و J$-$نیم‌ساده می‌باشد.