دانشکده علوم پایه

گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

بررسی جواب‌های تناوبی مسئله N-جسم
به کمک روش‌های حساب تغییرات

نگارش:

لیلا خوبلر

استاد راهنما:

دکتر بهروز رئیسی

استاد مشاور:

دکتر بهزاد نجفی

دی ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

به یاد پدرم و

تقدیم به مادرم.

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش خداوندی که عرصه گیتی، جلوه‌ای از آیات اوست و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاک او، که وجودمان وامدار وجودشان است.

همگان واقف‌اند جایگاه و منزلت معلمان، اجّل از آن است که در مقام قدردانی، به زبان قاصر و دستی عاجز، مطلبی نگاشته شود. اما بر حسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ و جلّ" :

ازپدر و مادر عزیزم، این نخستین و بزرگترین معلمان تاریخ زندگی من، که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی چشم‌داشت برای من بوده‌اند؛

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر بهروز رئیسی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

از استاد فاضل و صادق، جناب آقای دکتر بهزاد نجفی، که زحمت مشاوره این رساله را متقبل شدند؛

و از استاتید محترم؛ جناب آقای دکتر نصر اصفهانی و دکتر رحیم علیزاده که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند؛

کمال تشکر و قدردانی را دارم.

چکیده

هدف این پایان‌نامه مطالعه جواب‌های تناوبی مسئله $N-$جسم نیوتنی با روش‌های حساب تغییرات است. در سالهای اخیر روش‌های حساب تغییرات با موفقیت روی مسئله $N-$جسم بکار گرفته شده است. قابل توجه‌ترین موفقیت در مدار شکل هشت (منظور هشت انگلیسی) است که توسط شنسیه ، مور و مونتگمری کشف شد. در این مدار تمامی جرم‌ها روی یک مدار به شکل ∞ بدون برخورد همدیگر را تعقیب می‌کنند و به طور متناوب از پیکربندی‌های اویلری می‌گذرند. شنسیه و مونتگمری ثابت کردند که هر قطعه از مدار که از یک پیکربندی اویلری شروع می‌شود و به پیکربندی مثلث متساوی الساقین ختم می‌شود، مینیمم تابعک کنش روی یک فضای مسیری مناسبی است. کاربرد دیگر حساب تغییرات در مسئله چهار جسم متوازی‌الاضلاع است. در این پایان‌نامه، وجود یک جواب تناوبی نشان داده خواهد شد که پیکربندی آن به طور متوالی بین پیکربندی مربع و پیکربندی هم خط تغییر می کند همیشه یک پیکربندی متوازی‌الاضلاع باقی می‌ماند.

فهرست مطالب

۱ مقدمه ۱

۱.۱ مسئله $N-$جسم ۲

۱.۱.۱ معادلات نیوتن و انتگرال‌های حرکت ۳

۲.۱.۱ جواب های هموگرافیک ۵

۳.۱.۱ جواب‌های رقص‌آرایی ۶

۲.۱ حساب تغییرات ۷

۱.۲.۱ مشتق گاتو و مشتق فرشه ۸

۲.۲.۱ معادله اویلر- لاگرانژ ۱۱

۳.۲.۱ تابعک کنش مسئله $N-$ جسم ۱۴

۴.۲.۱ اصل پالیه ۱۶

۳.۱ وجود مینیمم کننده ۱۷

۱.۳.۱ اصل وردش ۱۷

۲.۳.۱ نیم‌پیوستگی ضعیف $\mathcal{A}$ ۱۸

۳.۳.۱ مسئله کپلر ۱۹

۴.۳.۱ مسئله$N-$ جسم و شرایط $(NC)_\nu$ ۲۲

۴.۱ کنش تعادل نسبی ۲۴

۲ مسئله کپلر ۲۷

۱.۲ نتایج کلاسیک ۲۷

۱.۱.۲ قوانین کپلر و معادله‌های مرتبط ۲۷
۲.۱.۲ کنش مدارهای بیضوی و هم‌خط کپلری ۳۱
۲.۲ قضیه گُردُن ۳۳
۳.۲ خاصیت کمینگی مدارهای دایره‌ای ۳۵

۳ مسئله سه جسم ۴۰

۱.۳ کاهش مسئله ۴۰
۱.۱.۳ مختصات ژاکوبی ۴۰
۲.۱.۳ مسئله سه جسم مسطح ۴۲
۲.۳ مدار شکل هشت ۴۴
۱.۲.۳ مسئله کمینه سازی ۴۴
۲.۲.۳ کنش کاهش یافته ۴۸
۳.۳ اجتناب از برخورد ۵۰

۴ مسئله چهار جسم ۵۵

۱.۴ مسئله چهار جسم متوازی‌الاضلاع ۵۵
۱.۱.۴ مقدمه ۵۵
۲.۱.۴ فضای پیکربندی کاهش یافته و کره شکل‌ها: ۵۷
۳.۱.۴ خواص تحدید $U = U(\theta, \phi)$ بر کره شکل واحد ۶۰
۲.۴ مسئله مینیمم سازی ۶۱
۱.۲.۴ وجود مینیمم کننده‌ها ۶۱
۲.۲.۴ خواص مینیمم کننده‌ها ۶۳
۳.۴ حرکت لوزی ۶۷
۴.۴ یک جواب تناوبی دیگر ۷۰

لیست تصاویر

۱.۱ چند ضلعی‌های منتظم با جرم‌های برابر ۷
۲.۱ جواب‌های رقص‌آرایی غیر ساده با تقارن‌های جرمی ۷
۳.۱ مدار شکل هشت. ۷
۴.۱ یک مدار تناوبی که به طور مدام بین پیکربندی مربع و هم خط گذر می‌کند. ۸
۵.۱ شکل ۲۳

۱.۲ مدارهای کپلری ۲۹

۱.۳ کره شکل. ۴۴
۲.۳ مدار شکل هشت ($T = \bar{T}/۱۲$) ۴۵
۳.۳ منحنی‌های تراز $U(\theta, \phi) = \frac{۵}{\sqrt{۲}}$ روی کره شکل واحد. ۴۹

۱.۴ تعادل‌های نسبی که پیکربندی آنها متوازی‌الاضلاع است. ۵۶
۲.۴ کره شکل واحد و منحنی‌های تراز $U(\theta, \phi)$ ۵۸
۳.۴ مسیر قدیم (خط پر) و مسیر جدید (خط چین). ۶۶
۴.۴ حرکت لوزی مینیمم کننده کنش ۶۸
۵.۴ مدار مینیمم کننده کنش. ۷۰
۶.۴ مسیر قدیم (خط پر) و مسیر جدید (خط چین). ۷۴

فصل ۱

مقدمه

حساب تغییرات تاریخی دراز در تعامل با شاخه‌های دیگر ریاضی نظیر هندسه، معادلات دیفرانسیل و نیز فیزیک، به خصوص مکانیک دارد. کاربردهایی از آن نیز در اقتصاد و مهندسی برق مشاهده می‌شود. برای مثال بیشتر ریاضیات مورد استفاده در نظریه کنترل را می‌توان بخشی از حساب ورشی درنظر گرفت.

موضوع مورد بررسی دراین علم تعمیم مسئله یافتن اکسترمم‌های توابع حقیقی چند متغیره معمول روی $\mathbb{R}^n$ به فضاهای تابعی مجرد است. بر این اساس حساب تغییرات شاخه‌ای از بهینه سازی محسوب می‌شود. با این حال مسائل و تکنیک‌های مطرح به طور قابل ملاحظه‌ای متفاوت با بهینه سازی معمولی است که این مطلب ناشی از تفاوت موجود در طبیعت دامنه کمیت‌هایی است که هدف بهینه سازی قرار دارند.

برای یک تابعک، یک مینیمم کننده، تابعی است که مقدار تابعک را مینیمم می‌کند. تابعک‌ها معمولاً به صورت انتگرال‌های معین تعریف می‌شوند و فضای تابعی مورد بحث نیز اغلب با قیدهای مشتق پذیری و شرایط مرزی مناسبی همراه است که در فرمول بندی مسئله مورد نظر ظاهر می‌شود.

حساب تغییرات قدمتی به اندازه‌ی حساب دیفرانسیل و انتگرال دارد و در برهه‌هایی از زمان، هر دو موضوع به صورت موازی توسعه یافته‌اند. در قرن ۱۸ میلادی، برادران برنولی، [۱] نیوتن، [۲] لایب نیتز، [۳] اویلر، [۴] لاگرانژ [۵] و لژاندر [۶] بر روی

[۱] Bernoulli

[۲] Newton

[۳] Leibniz

[۴] Euler

[۵] Lagrange

[۶] Legendre

این موضوع با یکدیگر همکاری کردند و کارهای آن‌ها یک قرن بعد توسط وایرشتراس [۷] و ژاکوبی [۸] به طور قابل ملاحظه‌ای گسترش پیدا کرد. دیوید هیلبرت در سخنرانی معروف خود در کنگره بین المللی ریاضی (در سال ۱۹۰۰)، ۲۳ مسئله را به جهان ریاضی عرضه کرد. بیست و سومین مسئله او درباره‌ی توسعه بیشتر روش‌های حساب تغییرات بود. او قبل از توصیف مسئله خاطر نشان می‌سازد

"...علاقه مندم موضوع سخنرانی را با یک مسئله کلی که به طور مکرر در این سخنرانی به طور ضمنی از آن یاد شد، خاتمه دهم. موضوعی که به رغم توسعه‌های قابل ملاحظه توسط وایرشتراس، هنوز به عقیده‌ی من به ارزش والای خود نرسیده است. منظور من حساب تغییرات است."

در اوایل قرن بیستم، هیلبرت، نوتر، لبگ و هادامارد به همراه دیگر ریاضی‌دانان همکاری قابل ملاحظه‌ای در این حوزه داشتند. برای مطالعه‌ی عمیق تاریخچه موضوع تا پایان قرن نوزدهم می‌توان به [۲۷] مراجعه کرد.

اقبال عمومی حساب تغییرات در قسمت‌های است که در کاربردها ظاهر می شود. به طور خاص، می‌توان از رابطه آن با مکانیک کلاسیک یاد کرد. این علم نفوذ فراوانی در فیزیک و به خصوص در مکانیک دارد. اصل هامیلتون در مکانیک کلاسیک یک مثال برجسته است. مثال اولیه دیگر اصل کمترین زمان فرما در اپتیک هندسی است. عامل اصلی توسعه حساب تغییرات در قرن ۱۸ و ۱۹ مسائل ظاهر شده در مکانیک بود. به رغم موفقیت های عمده‌ی حساب تغییرات در مکانیک کلاسیک، اولین موفقیت آن در بکارگیری مسئله $N-$ جسم بسیار دیر ظاهر گشت. در سال ۱۹۷۷ گُردَن[۹] [۱۱] مسئله کپلر را به همراه بهینه سازی تابعکی روی یک فضای مسیری با قیدهای توپولوژیکی مناسب در نظر گرفت و اولین موفقیت در این زمینه حاصل گردید. مدار شکل هشت مثال دیگری از این دست است. در این پایان‌نامه مسئله به کارگیری تکنیک‌های حساب تغییرات در مسئله $N-$جسم بررسی می‌شود.

۱.۱ مسئله $N-$جسم

در این بخش به معرفی مسئله $N-$جسم و مفاهیم اساسی حساب تغییرات پرداخته و به طور خاص به کاربرد آن در مسئله یاد شده نظر داریم. لازم به ذکر است که اکثر مطالب بیان شده قابل تعمیم هستند، اما برای اجتناب از پیچیدگی‌های تکنیکی که دور از هدف این رساله است، همواره فرضیات را طوری در نظر می‌گیریم که متناسب با مسئله N جسم باشند.

[۷] Weierstrass

[۸] Jacobi

[۹] Gordon

۱.۱.۱ معادلات نیوتن و انتگرال‌های حرکت

مسئله $N-$ جسم نیوتنی یا به طور خلاصه مسئله $N-$جسم به بررسی حرکت $N \geq ۲$ جرم ذره‌ای $m_۱, m_۲, \ldots, m_N$ می‌پردازد که در $\mathbb{R}^۳$ تحت قانون گرانش نیوتن حرکت می‌کنند:

$$m_k \ddot{x}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} U(x), \qquad k = ۱, \ldots, N, \tag{۱.۱}$$

که در آن $x_k \in \mathbb{R}^۳$، مکان جرم نقطه‌ای $k-$ام است و $U(x)$ پتانسیل گرانشی نیوتونی است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$U = \sum_{۱ \leq j < i \leq N} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |x_i - x_j|.$$

در اینجا G ثابت جهانی گرانش است که در سراسر این پایان‌نامه آن را برابر یک فرض می‌کنیم. تابع $U(x)$ را برای سادگی تابع پتانسیل می‌نامیم.

فرض کنید $x = (x_۱, \cdots, x_N),\ y = (y_۱, \cdots, y_N) \in \mathbb{R}^{۳N}$. سیستم ۱.۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{cases} \dot{x} = M^{-۱} y \\ \dot{y} = \nabla U(x) \end{cases} \tag{۲.۱}$$

که در آن M یک ماتریس قطری به صورت

$$M = diag[m_۱, m_۱, m_۱, m_۲, m_۲, m_۲, \cdots, m_n, m_n, m_n]$$

است. این معادلات را صورت هامیلتونی معادله ۱.۱ می نامند. دستگاه معادلات ۲.۱ یک سیستم دینامیکی در $\mathbb{R}^{۶N}$ تعریف می‌کند. اما ۱۰ انتگرال شناخته شده برای سیستم مذکور وجود دارد که اجازه می‌دهد مسئله را به یک سیستم دینامیکی

روی منیفلدی $(۶N - ۱۰)$ بعدی به نام منیفلد انتگرال کاهش دهیم. این انتگرال‌ها به صورت زیر هستند.

$$\begin{cases} \sum_{k=۱}^{N}(m_k x_k - t y_k) & \text{سه انتگرال مرکز جرم} \\ \sum_{k=۱}^{N} y_k & \text{سه انتگرال تکانه خطی} \\ \sum_{k=۱}^{N} x_k \times y_k & \text{سه انتگرال تکانه زاویه‌ای} \\ H = K(M^{-۱}y) - U(x) & \text{یک انتگرال انرژی} \end{cases}$$

در اینجا $K(\dot{x}) = K(M^{-۱}y) = \frac{۱}{۲}y^T M^{-۱} y$ انرژی جنبشی می‌باشد. انتگرال $H(x,y)$ را هامیلتونی سیستم ۱.۱ می‌نامند.

گروه تبدیلات گالیله، گروه تبدیلاتی از $\mathbb{R}^۳ \times \mathbb{R}$ (فضا زمان) است که توسط انتقال‌ها در فضا زمان، دوران حول محورها و حرکت‌های یکنواخت $(\mathbf{x}, t) \mapsto (\mathbf{x} + t\mathbf{v}, t)$ به وجود می‌آید. معادلات ۱.۱ و ۲.۱ تحت تبدیلات گالیله ناوردا هستند. دو جواب سیستم ۱.۱ را معادل در نظر گرفته اگر بتوان یکی از آنها را تحت تبدیل گالیه از دیگری بدست آورد. بنابراین با در نظر گرفتن یک تبدیل گالیله مناسب و (با قرار دادن $\bar{x}_k = x_k - \frac{t}{m_k}y_k, \bar{y} = m_k\dot{\bar{x}}$)، بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد:

$$\sum_{k=۱}^{N} m_k x_k = ۰ \quad \text{و} \quad \sum_{k=۱}^{N} y_k = ۰. \tag{۳.۱}$$

تعریف ۱.۱.۱. برای سیستم ۱.۱، فضای پیکربندی، V، یک فضای برداری $۳(N-۱)$ بعدی متشکل از تمام $x \in \mathbb{R}^{۳N}$ هایی است که در اولین اتحاد ۳.۱ صدق می‌کنند.

فرض کنید $\{\mathbf{e}_i\}_{i=۱}^{۳}$ پایه استاندارد $\mathbb{R}^۳$ باشد. بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد

$$\sum_{k=۱}^{N} x_k \times y_k \tag{۴.۱}$$

در راستای $\mathbf{e}_۳$ باشد. از آنجا که ۱.۱ تحت دوران حول محور $\mathbf{e}_۳$ ناوردا است، (عمل گروه $\mathcal{SO}(۲)$ روی منیفلد انتگرال) بنابراین بعد سیستم را می توان با خارج قسمت تقارن‌های دورانی به $۶N - ۱۱$ کاهش داد. اگر $\mathcal{M}$ نشان دهنده منیفلد انتگرال باشد در این صورت فضای خارج قسمتی $\bar{\mathcal{M}} := \mathcal{M}/\mathcal{SO}(۲)$ را منیفلد انتگرال کاهش یافته می‌نامند. فضای

خارج قسمی $\bar{V} := V/\mathcal{SO}(۲)$ نیز فضای پیکربندی کاهش یافته نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. برای سیستم ۱.۱، مجموعه برخورد، Δ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta = \{x = (x_۱, ..., x_N) \in (R^۳)^N : x_i = x_j \text{ که } i \neq j \text{ وجود داشته باشد، } \}$$

در این صورت $V \cap \Delta$ مجموعه تکینگی‌های میدان برداری تعریف شده توسط ۱.۱ روی کلاف مماس V است. به جز در مواردی که ذکر خواهد شد، منظور ما از یک «جواب» جواب‌های بدون برخورد است، یعنی جواب‌ها در $V \backslash \Delta$.

۲.۱.۱ جواب های هموگرافیک

رده خاصی از جواب های سیستم ۱.۱، به نام جواب‌های هموگرافیک، حدود دو قرن مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. این جواب‌ها، پیکربندی‌هایی از مسئله $N-$ جسم می‌باشند که در هر زمان، متشابه باقی می‌مانند. یک جواب هموگرافیک را هموتتیک می‌گویند اگر پیکربندی دورانی نباشد. اگر جواب تناوبی هموگرافیک «صلب» باشد، به این معنی که پیکربندی حاصل از $N-$جسم با پیکربندی اولیه متجانس باقی‌بماند، در این صورت آن را تعادل نسبی می‌نامند. یک تعادل نسبی، جوابی تعادلی از ۱.۱ در سیستم مختصات دوار یکنواخت است. این جواب‌ها متعلق به خانواده‌ای از جواب‌های هموگرافیک تناوبی هستند که از یک پیکربندی خاص به نام پیکربندی‌مرکزی شروع می‌شوند.

پیکربندی $x \in \mathbb{R}^{۳N} \backslash \Delta$ را یک پیکربندی مرکزی (برای ۱.۱) می‌گویند اگر $\lambda \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری‌که:

$$M^{-۱}\nabla U(x) = ۲\lambda x \qquad (۵.۱)$$

اگر $\mathcal{I}(x) = \sum_{k=۱}^{N} m_k |x_k|^۲$ ممان اینرسی باشد در این صورت رابطه ۵.۱ با رابطه زیر معادل است:

$$\nabla U(x) = \lambda \nabla \mathcal{I}(x),$$

که در آن λ ضریب لاگرانژ تحدید U بر روی سطح تراز $\mathcal{I}$ است. از آنجا که $U(x)$ تابع همگن از درجه -۱ است (یعنی $U(ax) = a^{-۱}U(x)$)، به آسانی در می‌یابیم که $\lambda = \frac{-U(x)}{۲\mathcal{I}(x)}$. در این صورت اتحاد فوق به رابطه زیر تبدیل می‌شود

$$۲\mathcal{I}(x)\nabla U(x) + U(x)\nabla \mathcal{I}(x) = ۰.$$

درنتیجه، x پیکربندی مرکزی است، اگر و تنها اگر نقطه بحرانی تابع $\tilde{U} := \sqrt{\mathcal{I}}U$ باشد.

تابع $\tilde{U}$ همگن از درجه صفر است و تحت تبدیل‌های متعامد، ناوردا است، بنابراین دو پیکربندی مرکزی را معادل گوییم اگر یکی از دیگری با یک دوران و احتمالاً تأخیر در زمان بدست آید. منظور از تعداد پیکربندی‌های مرکزی اشاره به تعداد کلاس‌های هم ارزی پیکربندی‌های مرکزی و یا به طور معادل $O(۳)$-مدارهای پیکربندی مرکزی در کره پیکربندی (یا کره شکل دارد) کره شکل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = V \cap \mathcal{I}^{-۱}(۱). \qquad (۶.۱)$$

برای مسئله سه جسم به طور دقیق چهار پیکربندی مرکزی وجود دارد که عبارت‌اند از یک پیکربندی مثلث متساوی الاضلاع لاگرانژ و سه پیکربندی هم خط اویلری. برای هر N به طور دقیق تعداد $\frac{N!}{۲}$ پیکربندی هم‌خط وجود دارد که آنها را پیکربندی مولتن می‌نامند [۲۰، ۲۴] . در حالت $N \geq ۴$ ثابت شده که پیکربندی‌های غیر مسطح وجود دارند. ([۱۸]). برای مطالعه‌ی اهمیت و کاربرد پیکربندی‌های مرکزی می‌توان به منابع [۲۶، ۱۸، ۲۴، ۱۴، ۱۵، ۱۶] مراجعه کرد.

۳.۱.۱ جواب‌های رقص‌آرایی

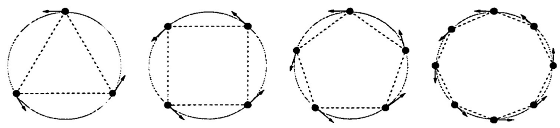
یک جواب رقص‌آرایی برای مسئله ۱.۱ جواب تناوبی مانند x است که مدارهای آن اجتماعی از خم‌های بسته باشد و هر یک مسیری حداقل برای دو جسم باشد. اگر تمامی جرم‌ها مسیر یکسانی داشته باشند در این صورت جواب را رقص‌آرایی ساده می‌نامند.

یک مدار کپلری بیضوی رقص‌آرایی است اگر و تنها اگر هر دو جرم برابر باشند. برای مسئله سه جسم اولین نمونه از جواب‌های رقص‌آرایی، پیکربندی متساوی الاضلاع لاگرانژ با جرم‌های یکسان می‌باشد. به طور قابل توجهی دومین مثال از این نوع حدود دو قرن بعد از آن کشف شد. مثال‌های فراوانی از جواب‌های رقص‌آرایی که تعادل نسبی نیز هستند وجود دارند، با این حال مطالعه جواب‌های رقص‌آرایی غیر هموگرافیک به طور گسترده‌ای در مراحل شبیه‌سازی عددی قرار دارند[۷، ۲۳]. در پایان این قسمت چند نمونه از جواب‌های پیکربندی مرکزی و غیره ارائه می‌گردد.

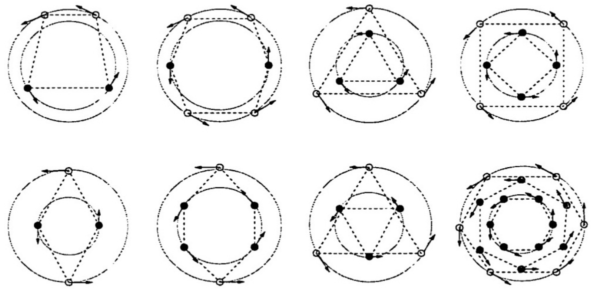
مثال ۳.۱.۱. در حالتی که تمامی اجرام برابر باشند، واضح است که هر N ضلعی منتظم یک پیکربندی مرکزی خواهد بود. تعادل‌های نسبی منسوب به این پیکربندی‌های مرکزی مثال‌هایی از جواب‌های رقص‌آرایی ساده هستند (شکل ۱.۱).

مثال ۴.۱.۱. بسیاری از تعادل‌های نسبی با تقارن جرمی، جواب‌های رقص‌آرایی غیر ساده را نتیجه می‌دهند (شکل ۲.۱).

مثال ۵.۱.۱. مدار شکل هشت یا مدار CM به طور مستقل توسط مور [۱۹] و شنسیه، مونتگرومی [۸] کشف شد. (شکل ۳.۱ را ببینید). جزئیات مربوط به این مدار را در فصل سوم بررسی خواهیم کرد.



شکل ۱.۱: چند ضلعی‌های منتظم با جرم‌های برابر



شکل ۲.۱: جواب‌های رقص‌آرایی غیر ساده با تقارن‌های جرمی

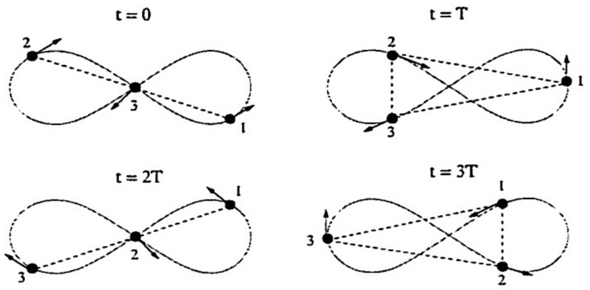
مثال ۶.۱.۱. شکل مثالی از پیکربندی رقص‌آرایی غیر هموگرافیک و غیر ساده را در مسئله چهار جسم نشان می‌دهد. در فصل چهارم جزئیات بیشتری درباره آن ذکر خواهد شد.

۲.۱ حساب تغییرات

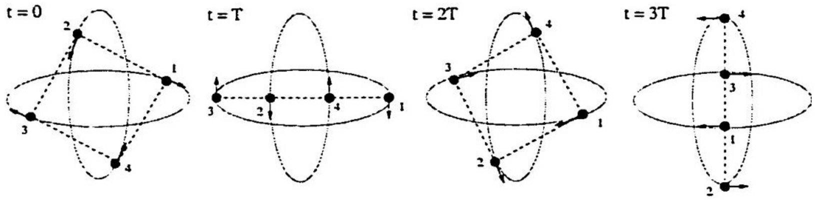
فرض کنید χ یک فضای تابعی باشد و $\mathcal{A}$ یک تابعک روی χ باشد یعنی $\mathcal{A} : \chi \to \mathbb{R}$. هدف حساب تغییرات پیدا کردن شرایط لازمی است که وجود عضوی مانند $f \in \chi$ که $\mathcal{A}(f)$ یک اکسترمم نسبی برای $\mathcal{A}$ باشد را تضمین کنند. البته بررسی مسئله در حالت کلی دور از هدف این پایان نامه است و همواره χ و $\mathcal{A}$ را طوری در نظر می گیریم که در مسئله $N-$ جسم ظاهر می شود. با این حال برخی مفاهیم را در حالت کلی معرفی می‌کنیم.

۱.۲.۱ مشتق گاتو و مشتق فرشه

منظور از یک فضای تابعی مجموعه تمامی توابع از مجموعه مانند X به مجموعه Y است. معمولاً X و Y مجهز به ساختارهای ریاضی مختلفی همانند توپولوژی، متر، نرم و غیره هستند. تعمیم‌هایی طبیعی از فضای اقلیدسی منجر به ظهور فضاهای گوناگونی گردیده است. برای مثال فضای باناخ X فضای برداری نرمداری است که با این نرم کامل است. فضای هیلبرت فضای باناخی است که دارای یک ساختار ضرب داخلی باشد و نرم آن از ضرب داخلی القاء شده باشد. از مهمترین فضاهای باناخ می‌توان به مجموعه توابع پیوسته از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ مجهز به نرم $||f|| = \{\sup |f(x)|\}$ نام برد. فضای L^2 رده بسیار مهمی از فضاهای هیلبرت است. L^2 شامل تمام توابع حقیقی مقدار اندازه‌پذیر f با دامنه $\mathbb{R}$ است که کمیت زیر متناهی



شکل ۳.۱: مدار شکل هشت.



شکل ۴.۱: یک مدار تناوبی که به طور مدام بین پیکربندی مربع و هم خط گذر می‌کند.

باشد.

$$\left(\int_R f^{2}(x)dx\right)^{1/2} < \infty.$$

برای هر f و g در L^{2} ضرب داخلی به صورت $< f, g >= \int_R f(x)g(x)dx$ تعریف می‌شود. مجموعه تمام توابع خطی از χ به $\mathbb{R}$ را فضای دوگان χ می‌نامند و با χ^* نمایش می‌دهند. فضای باناخ X، بازتابی است اگر $X = X^{**}$ که X^{**} فضای دوگان X^* است.

برای یک فضای برداری حقیقی مانند V، مجموعه‌ی $B \subseteq V$ را یک زیر مجموعه متعادل شده می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in B$، خطی که x و $-x$ را به هم وصل می‌کند نیز به طور کامل در Bقرار داشته باشد. به عبارت دیگر برای هر $x \in B$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ که $|\alpha| \leq 1$، آنگاه $\alpha x \in B$.

همانگونه که ذکر شد حساب تغییرات، تعمیم حساب دیفرانسیل توابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ به تابعک‌ها روی فضاهای تابعی است. برای این منظور نیاز است که مفاهیم مشتق‌گیری توابع معمول در حساب دیفرانسیل را به تابع‌های تعریف شده روی فضاهای باناخ تعمیم دهیم. مشتق گاتو [۱۰] که در ذیل مطرح می‌شود تعمیم مشتق جهتی به فضاهای برداری موضعاً محدب مانند فضاهای باناخ است.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید χ یک فضای باناخ و $F : \chi \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ یک تابعک حقیقی مقدار باشد. برای $x \in \chi$،

[۱۰] Gateaux

فرض کنید $F(x) < \infty$ باشد. اگر $h \in \chi$ و تابعک خطی کراندار $L : \chi \to \mathbb{R}$ چنان موجود باشند که

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\{F(x+sh) - F(x) - L(sh)\} = 0$$

در این صورت $L(h)$ را وردش گاتو F در نقطه‌ی x و در جهت $h \in \chi$ می‌نامیم و آن را با $\delta_x F(h)$ نشان می‌دهیم.

لازم به یادآوری است که برخلاف سایر صورت‌های تعریف شده از مشتق، مشتق گاتو خاصیت خطی ندارد. برای مثال اگر مشتق گاتو F در x و y به ترتیب L و M باشد در این صورت لزومی ندارد که F حتی در $x + ay$ که $a \in \mathbb{R}$، مشتق گاتو داشته باشد. با این حال فضای $\mathfrak{D}_x$ متشکل از همه جهت‌هایی که مشتق گاتو در آنها تعریف شده، تشکیل یک زیرفضای خطی از χ می‌دهند که را فضای وردش‌های پذیرفتنی در x نامیده می‌شود.

روی فضای وردش‌های پذیرفتنی در x، نگاشت $\delta_x F : h \to \delta_x F(h)$ را وردش گاتو F در x می‌نامند که طبق تعریف روی $\mathfrak{D}_x$، خطی است. اگر $\mathfrak{D}_x = \chi$ باشد در این صورت F را در نقطه‌ی x مشتق‌پذیر گاتو (یا مشتق پذیر به معنی گاتو) می‌نامند و در این حالت تابع $\delta_x F$ را مشتق گاتو F در x می‌نامند.

تعریف بعد تعمیم مفهوم مشتق پذیری در $\mathbb{R}^n$ به فضاهای باناخ است.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید χ یک فضای باناخ و $F : \chi \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ را یک تابعک در نظر بگیرید. F را در نقطه‌ی $x \in \chi$ مشتق‌پذیر فرشه گویند هرگاه $F(x) < \infty$ و یک تابعک خطی کراندار $L : \chi \to \mathbb{R}$ چنان موجود باشد که

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{F(x+h) - F(x) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

L را با $DF(x)$ نمایش می‌دهیم.

اگر $DF(x) = 0$، (که در اینجا ۰، تابعک خطی صفر است) در این صورت x را یک نقطه‌ی بحرانی F گویند. اگر $\chi_0 \subset \chi$ یک زیر فضا یا زیر منیفلد χ باشد و $DF(x)$ به عنوان یک تابعک خطی روی $T_x\chi_0$، (فضای مماس بر χ_0 در x) مساوی صفر باشد، آنگاه x را یک نقطه‌ی بحرانی F روی χ_0 گویند.

به وضوح مشتق پذیری فرشه پیوستگی و مشتق پذیری گاتو را نتیجه می دهد و در صورتی که هر دو مشتق (یعنی فرشه و گاتو) تعریف شده باشند، با هم برابر خواهند بود $DF(x) = \delta_x F$.

فرض کنید χ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی $< .,. >_\chi$ باشد. اگر Φ یک تابعک خطی روی χ باشد در این صورت عنصر منحصر به فرد $g \in \chi$ چنان موجود است که برای هر $f \in \chi$، $\Phi(f) =< f, g >_\chi$ (قضیه نمایش ریس). حال اگر F مشتق پذیر فرشه باشد، عنصر منحصر به فرد $\nabla F(x) \in \chi$ چنان موجود است که برای هر $h \in \chi$، $DF(x)(h) =< \nabla F(x), h >_\chi$. $\nabla F(x)$ را $\chi-$ گرادیان F در x می‌نامیم.

اکنون به بیان لمی می‌پردازیم که بسیار مشابه آزمون مشتق اول در حساب دیفرانسیل است.

لم ۳.۲.۱. فرض کنید F، χ و $\mathfrak{D}_x$ مشابه بالا تعریف شده باشند و تحدید F روی زیر مجموعه χ. از χ، در نقطه‌ی $x \in \chi$. دارای یک اکسترمم نسبی متناهی باشد. اگر زیر مجموعه‌ی متعادل غیر تهی $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{D}_x$ چنان موجود باشد که $x + \mathfrak{B} \subset \chi$. در این صورت برای هر $h \in \mathfrak{B}$، $\delta_x F(h) = ۰$.

اثبات. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید اکسترمم مفروض، مینیمم باشد. از آنجایی که $\mathfrak{B}$ متعادل است برای هر $h \in \mathfrak{B}$ و $|s| < ۱$ خواهیم داشت $\pm sh \in \mathfrak{B}$. بنا به فرض $x \pm sh \in \chi$. در این صورت چون F در x دارای مینیمم نسبی است برای مقادیر کوچک $|s| \leq ۱$، $F(x) \leq F(x+sh)$ در نتیجه $۰ \leq F(x+sh) - F(x)$، $F(x) \leq F(x-sh)$ در نتیجه

$$۰ \leq F(x-sh) - F(x)$$

، اما چون $\delta_x F$ روی $\mathfrak{D}_x$ خطی است $\delta_x F(sh) = s\delta_x F(h)$ و بنابراین با اضافه کردن این تساوی به نامساوی‌های فوق، در حالتی که $s < ۰$ باشد آنگاه $-s\delta_x F(h) \leq (F(x+sh) - F(x) - \delta_x F(sh))$ و بنابراین

$$-\delta_x F(h) \leq \frac{۱}{s}\left(F(x+sh) - F(x) - \delta_x F(sh)\right).$$

از طرف دیگر اگر $s > ۰$ باشد $s\delta_x F(h) \leq (F(x+sh) - F(x) + \delta_x F(sh))$ آنگاه

$$\delta_x F(h) \leq \frac{۱}{s}\left(F(x+sh) - F(x) + \delta_x F(sh)\right)$$

حال اگر $s \to ۰$ از دو رابطه اخیر خواهیم داشت $-\delta_x F(h) \leq ۰, \delta_x F(h) \leq ۰$ و بنابراین $\delta_x F(h) = ۰$ $\square$

در فضای هیلبرت گاهی نیاز است که اعضای آن در یک فرم مناسبی از مشتق پذیری صدق کنند. اما در مورد اعضای این فضاها معمولاً از مشتق پذیری سخنی به میان نمی‌آید. برای مثال هیچ ضرورتی ندارد که اعضای فضای $L^۲$ مشتق پذیر باشند. شاید بخواهیم مجموعه تمام توابع مشتق پذیر در $L^۲$ را در نظر بگیریم در این صورت فضای حاصل شده کامل نمی‌باشد و بنابراین همگرایی دنباله‌ها در آن تضمین نمی‌شود. برای اجتناب از این مشکل مفهوم مشتق‌پذیری را ضعیف کرده به طوری که بتوان یک فضای هیلبرت از توابع مشتق پذیر به مفهوم ضعیف داشته باشیم. فضاهای سوبولف به این ترتیب تعریف می‌شوند. فرض کنیم f تابعی مشتق پذیر روی R باشد. قانون انتگرال گیری جز به جز $\int fdg = fg - \int gdf$ را در نظر بگیرید. اگر f مشتق پذیر نباشد ولی تابعی مانند Df وجود داشته باشد که قانون انتگرال گیری جز به جز برای هر g برقرار باشد آنگاه Df را مشتق ضعیف f می‌نامند. تعریف دقیق‌تر در ادامه است.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید Ω زیر مجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$ و $u \in C^k(\Omega)$ باشد. بعلاوه برای هر تابع بینهایت بار مشتق پذیر ϕ با محمل فشرده ($\phi \in C_c^\infty(\Omega)$) یک تابع موضعاً انتگرال‌پذیر v چنان موجود باشد که

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-۱)^{|\alpha|} \int_\Omega \phi v dx$$

در این صورت v را $\alpha-$امین مشتق جزئی ضعیف u می‌نامند.

تعریف ۵.۲.۱. برای هر دو عدد صحیح مثبت p و k، فضای سوبولف $W^{k,p}$ متشکل از تمام توابع $u \in L^p(\Omega)$ است که

به ازای هر اندیس α که $|\alpha| < k$ باشد، مشتق ضعیف مرتبه α u یعنی $D^\alpha u$ متعلق به $L^p(\Omega)$ باشد یعنی:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega): \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega) \,\forall\, |\alpha| < k\}.$$

برای $u \in W^{k,p}(\Omega)$ یک نرم به صورت زیر تعریف می‌شود.

برای $1 \leq p < \infty$

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

و برای $p = \infty$

$$||u||_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq \alpha \leq k} \left\{ \sup_{x \in U} |D^\alpha U(x)| \right\}$$

برای $p = 2$ گاهی $W^{k,2}(\Omega)$ را با $H^k(\Omega)$ نشان می‌دهند زیرا در این حالت فضای سوبولف یک فضای هیلبرت می‌باشد.

۲.۲.۱ معادله اویلر - لاگرانژ

فرض کنید $T > 0$ ثابت باشد و تابعک زیر را در نظر بگیرید:

$$F(x) = \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t), t) dt, \tag{۷.۱}$$

که در اینجا $x \in \chi = H^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ است. به عبارت دیگر χ فضای تمام خم‌های در $\mathbb{R}^n$ است که مشتق مرتبه اول ضعیف آنها موجود باشد. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ تابعی از پایین کراندار باشد و روی یک مجموعه باز به صورت $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ که در آن $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$، دو بار مشتق پذیر باشد. فرض کنید

$$x \in H^1([0, T], \Omega), \qquad \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x(t), \dot{x}(t), t) \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n). \tag{۸.۱}$$

فرض کنید $h \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$، برای هر s به اندازه‌ی کافی کوچک، و هر $t \in [0, T]$ متعلق به $x(t) + sh(t) \in \Omega$ خواهد بود، حال بسط تیلور f را در نظر می گیریم

$$f(x + sh, \dot{x} + s\dot{h}, t) = f(x, \dot{x}, t) + (\frac{\partial}{\partial x} f(x, \dot{x}, t) \cdot h + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) \cdot \dot{h}) s + O(s^2).$$

در این صورت با تقسیم رابطه فوق بر s داریم:

$$\frac{f(x+sh,\dot{x}+s\dot{h},t)-f(x,\dot{x},t)}{s}=\frac{\partial}{\partial x}f(x,\dot{x},t)\cdot h+\frac{\partial}{\partial \dot{x}}f(x,\dot{x},t)\cdot\dot{h}+o(s)$$

با توجه به ۷.۱

$$\frac{1}{s}\{F(x+sh)-F(x)\}=\int_0^T\frac{\partial}{\partial x}f(x,\dot{x},t)\cdot h+\frac{\partial}{\partial \dot{x}}f(x,\dot{x},t)\cdot\dot{h}dt+O(s) \tag{۹.۱}$$

فرض کنید $\phi_x(t)=\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}f(x(\tau),\dot{x}(\tau),\tau)d\tau$. در این صورت با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$\int_0^T\frac{\partial}{\partial x}f(x,\dot{x},t)\cdot hdt=\phi_x(T)\cdot h(T)-\int_0^T\phi_x(t)\cdot\dot{h}dt$$

با جایگذاری در عبارت ۹.۱ داریم:

$$\frac{1}{s}\{F(x+sh)-F(x)\}=\phi_x(T)\cdot h(T)+\int_0^T(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}f(x,\dot{x},t)-\phi_x(t))\cdot\dot{h}dt+O(s).$$

عبارت زیر انتگرال ظاهر شده در سمت راست معادله فوق پیوسته است. تحت فرض ۸.۱ در عبارت فوق اگر $s\to 0$ داریم:

$$\frac{1}{s}\{F(x+sh)-F(x)\}=\phi_x(T)\cdot h(T)+\int_0^T\frac{\partial}{\partial \dot{x}}f(x,\dot{x},t)-\phi_x(t)dt$$

و لذا $C^1([0,T],\mathbb{R}^n)\subseteq\mathfrak{D}_x$. بنابراین مشتق گاتو x در راستای h به صورت زیر است

$$\delta_xF(x)=\phi_x(T)\cdot h(T)+\int_0^T(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}f(x,\dot{x},t)-\phi_x(t))\cdot\dot{h}dt$$

در بسیاری از کاربرد های عملی، وردش‌های پذیرفتنی را روی مجموعه‌هایی به صورت زیر در نظر می‌گیرند

$$\mathfrak{B}_\epsilon=\{h\in C^1([0,T],\mathbb{R}^n):h(0)=h(T)=0,\sup_{[0,T]}|h|<\epsilon\} \tag{۱۰.۱}$$

اگر $h\in\mathfrak{B}_\epsilon$ و $|s|<1$ در این صورت $sh\in\mathfrak{B}_\epsilon$، و به وضوح $\mathfrak{B}_\epsilon$ یک مجموعه‌ی متعادل است. اگر $h\in\mathfrak{B}_\epsilon$ در این صورت وردش گاتو F در x و در جهت h به فرم زیر تبدیل می شود (زیرا $h(t)=0$)

$$\delta_xF(h)=\int_0^T(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}f(x,\dot{x},t)-\phi_x(t))\cdot\dot{h}dt. \tag{۱۱.۱}$$

برای استفاده لم ۳.۲.۱ نیاز به لم ریموند [۱۱] یا لم بنیادی مرتبه دوم داریم:

لم ۶.۲.۱. فرض کنیم $\mathfrak{B}_\epsilon$ ، همانند ۱۰.۱ تعریف شده باشد و $\epsilon>0$ دلخواه باشد. اگر $H\in C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$، و برای

[۱۱] Bois-Reymond Du