دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای برلینگ

پایان‌نامه کارشناسی ارشدریاضی محض (آنالیز)

الهام حاتمی ماربینی

استاد راهنما

دکتر رسول نصر اصفهانی

۱۳۸۶

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشدریاضی محض (آنالیز)خانم الهام حاتمی ماربینی

تحت عنوان

میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای برلینگ

در تاریخ ۱۳۸۶/۱۲/۲۶ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱— استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر رسول نصر اصفهانی

۲— استاد مشاور پایان‌نامه دکترمحمود لشکریزاده

۳— استاد داور ۱ دکترفرید بهرامی

(دانشگاه صنعتی اصفهان)

۴— استاد داور ۲ دکترمحمود منجگانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر رسول نصر اصفهانی

قلم در دست گرفتن از من که مخلوقم و استعانت از او که خالق است. شروع در سخن گفتن از من که مامورم و توفیق از او که آمر است.

در ابتدا بر خود لازم می‌دانم از اولین و بزرگترین معلمان زندگیم، پدر ومادر عزیزم از صمیم قلب تشکر کنم.

از استاد راهنمای گرانقدر جناب آقای دکتر رسول نصر اصفهانی که بدون کمک و راهنمایی‌های ایشان انجام این رساله برایم مقدور نبود، نهایت سپاس و تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر محمود لشکریزاده که به عنوان استاد مشاور، بازبینی و تصحیح رساله را برعهده گرفتند، صمیمانه سپاسگذارم.

از جناب آقای دکتر محمود منجگانی و جناب آقای دکتر فرید بهرامی که زحمت بازخوانی و داوری رساله را پذیرفتند، سپاسگذارم.

از تمام دوستان و همکلاسی‌های عزیزم که با حضورشان قوت قلبم بودند و مرا همراهی کردند، صمیمانه سپاسگذارم و برایشان آرزوی سعادت و کامیابی دارم.

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

فهرست مطالب

چکیده:

این پایان‌نامه، به دنبال مشخصه‌ای برای جبرهای گروهی وزندار روی گروه‌های غیر جابه‌جایی است. لذا نشان می‌دهیم که جبرهای گروهی وزندار روی گروه‌های گسسته و $SIN-$ گروه در صورتی میانگین‌پذیر ضعیف است که وزن آن کراندار قطری باشد. سپس برای هر گروه موضعاً فشرده نیز نتیجه‌ی مشابهی را نیز ثابت می‌کنیم. در نهایت نشان می‌دهیم که $\ell^1(SL_2(\mathbb{R}), \omega_\alpha)$ برای $\alpha > 0$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست.

فصل ۱

مقدمه

فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده با عضو همانی e و ω یک وزن روی آن باشد؛ یعنی یک تابع اندازه‌پذیر $\omega : G \longrightarrow (\circ, \infty)$ به‌طوری‌که $\omega(e) = ۱$ و

$$\omega(xy) \leq \omega(x)\,\omega(y) \qquad (x, y \in G).$$

دراین صورت فضای تمام توابع $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ با شرط $f\omega \in L^۱(G)$ را با $L^۱(G,\omega)$ نمایش می‌دهیم. در واقع، $f \in L^۱(G,\omega)$ است اگر و تنها اگر

$$\|f\|_{۱,\omega} = \int_G f(x)\,\omega(x)\,d\lambda(x) < \infty$$

هدف ما در این پایان‌نامه، بررسی میانگین‌پذیری جبر برلینگ $L^۱(G,\omega)$ است. جبر باناخ A را میانگین‌پذیرضعیف گوییم هرگاه هر مشتق از A به A^*، داخلی باشد؛ یعنی برای A—مدول دوطرفه‌ی باناخ E داشته‌باشیم $\mathcal{H}^۱(A, A^*) = \{\circ\}$.

مفهوم میانگین‌پذیری ضعیف، ابتدا توسط بید، کرتیز و دیلز[۱] [۱] در سال **۱۹۸۷** معرفی شده است. تعریف ارایه شده توسط آن‌ها تنها برای جبرهای باناخ جابه‌جایی به کار می‌رفت. در واقع، جبر باناخ جابه‌جایی A، میانگین‌پذیر ضعیف است هرگاه هر مشتق کراندار از A به یک A — مدول باناخ جابه‌جایی،

[۱] Bade W. G. , Curtis Jr P. C. and Dales H. G.

صفر باشد.

جانسون [۲] [۱۶] در سال ۱۹۹۱ تعریفی معادل تعریف بید، کرتیز و دیلز برای میانگین‌پذیری ضعیف جبر باناخ A بیان کرد. بنابر تعریف او، جبر باناخ جابه‌جایی A، میانگین‌پذیر ضعیف است هرگاه هر مشتق کراندار از A به A^* صفر باشد که در آن A^*، فضای دوگان A است. همچنین او شرط $\mathcal{H}^1(A, A^*) = 0$ را برای جبر باناخ ناجابه‌جایی A به کار برد. در واقع تعریف جانسون تعمیمی از تعریف بید، کرتیز و دیلز است. جانسون [۱۶] در سال ۱۹۹۱ نشان داد برای هر گروه موضعاً فشرده G، $L^1(G)$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

در این پایان‌نامه که بیشتر مبتنی بر کار پورعباس [۳] [۲۰] در سال ۲۰۰۰ و پورعباس و یگان[۲۱] در سال ۲۰۰۵ و بورویک [۴] [۳] در سال ۲۰۰۳ است به بررسی شرایطی برای میانگین‌پذیری ضعیف جبر گروهی وزندار $L^1(G, \omega)$ می‌پردازیم.

بید، کرتیز و دیلز، برای میانگین‌پذیری ضعیف $\ell^1(\mathbb{Z}, \omega)$، شرط $\omega(n)\omega(-n) = o(n)$ را ارایه دادند. همچنین گرونبیک[۵] [۱۰] در سال ۱۹۸۹ نشان داد $\ell^1(\mathbb{Z}, \omega)$ میانگین‌پذیر ضعیف است اگر و تنها اگر

$$\sup\left\{\frac{|n|}{\omega(n)\omega(-n)} : n \in \mathbb{Z}\right\} = \infty.$$

در این پایان‌نامه ثابت می‌کنیم برای یک گروه ناجابه‌جایی G، شرط $\sup\{\omega(x)\omega(x^{-1})\} < \infty$، میانگین‌پذیری ضعیف $\ell^1(G, \omega)$ را نتیجه می‌دهد. اما با بیان مثالی نشان می‌دهیم عکس آن برقرار نیست. جبر $L^1(G, \omega)$، را یک جبر برلینگ روی G می‌نامند.

این پایان‌نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول، تنها به بیان مختصری از تعاریف و قضایایی در آنالیز تابعی و آنالیز حقیقی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم، $\ell^1(G, \omega)$ را معرفی می‌کنیم و شرایطی برای میانگین‌پذیری ضعیف آن ارایه می‌دهیم. به‌علاوه مثال‌هایی برای آن بیان می‌کنیم.

در فصل سوم، ضمن معرفی $L^1(G, \omega)$ و دوگان آن، به بررسی شرایط معادل میانگین‌پذیری ضعیف آن می‌پردازیم. در ابتدای این فصل، میانگین‌پذیری ضعیف $L^1(G, \omega)$ را برای $SIN-$ گروه G بررسی می‌کنیم.

فصل چهارم را به بیان مثال زیبایی از یک جبر گروهی وزندار غیر میانگین‌پذیرضعیف اختصاص

---

[۲] Johnson B. E.
[۳] Pourabbas A.
[۴] Borwick C. R.
[۵] Grøbæk N.

داده‌ایم. در این فصل ضمن معرفی گروه $SL_{۲}(\mathbb{R})$ همراه با وزن ω_α روی آن، نشان می‌دهیم که جبر باناخ $\ell^{۱}(SL_{۲}(\mathbb{R}), \omega_\alpha)$، برای $\alpha > ۰$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست. که این فصل مبتنی بر کار بورویک [۳] در سال ۲۰۰۳ است.

فرض کنیم E، F و G فضاهای خطی باشند. در این صورت نگاشت $S : E \times F \longrightarrow G$ را دو خطی گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

(الف) برای هر عنصر $\eta \in F$، نگاشت $y \mapsto S(\xi, \eta)$ خطی باشد؛

(ب) برای هر عنصر $\xi \in E$، نگاشت $x \mapsto S(\xi, \eta)$ خطی باشد.

نگاشت دو خطی $S : E \times F \longrightarrow G$ را کران‌دار گوییم هرگاه عدد حقیقی مثبت M وجود داشته باشد به طوری که

$$\|S(\xi, \eta)\| \leq M\|\xi\|\|\eta\| \qquad (\xi \in E, \eta \in F)$$

مجموعه‌ی همه‌ی نگاشت‌های دو خطی کراندار از $E \times F$ به G را با $B(E, F; G)$ نمایش می‌دهیم. دراین صورت $B(E, F; G)$ با نرم زیر یک فضای باناخ است

$$\|S\| = \sup\{\|S(\xi, \eta)\| : \|\xi\| \leq ۱, \|\eta\| \leq ۱\|\} \qquad (S \in B(E, F; G)).$$

تعریف ۱.۱. فرض کنیم E و F دو فضای خطی باشند. منظور از حاصل‌ضرب تانسوری E و F یک جفت (l, K) است که K یک فضای خطی و l یک نگاشت دو خطی از $E \times F$ به K است به طوری که خاصیت زیر را دارا می‌باشد

برای هر فضای خطی H [illegible] یکتای $T : K \longrightarrow H$ وجود داشته‌باشد به طوری که $S = T \circ l$؛ یعنی نمودار زیر را جابه‌جا کند

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "l"] \arrow[d, "S"'] & K \arrow[dl, "T"] \\ H & \end{tikzcd}$$

یک چنین ضرب تانسوری همواره وجود دارد و تحت یکریختی خطی یکتاست. فضای K و عنصر $l(\xi,\eta)$ $(\xi \in E, \eta \in F)$ را به ترتیب با $E \otimes F$ و $\xi \otimes y$ نمایش می‌دهیم. هر عنصر $\zeta \in E \otimes F$ را می‌توانیم به صورت زیر نمایش دهیم

$$\zeta = \sum_{i=۱}^{n} \xi_i \otimes \eta_i$$

که $n \in \mathbb{N}$ و $\xi_i \in E$ و $\eta_i \in F$ $(i = ۱, \cdots, n)$. به علاوه برای هر $\xi_۱, \xi_۲, \xi \in E$، $\eta_۱, \eta_۲, \eta \in F$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داریم

$$(\xi_۱ + \xi_۲) \otimes \eta = \xi_۱ \otimes \eta + \xi_۲ \otimes \eta;$$

$$x \otimes (\eta_۱ + \eta_۲) = \xi \otimes \eta_۱ + \xi \otimes \eta_۲;$$

$$\alpha(\xi \otimes \eta) = (\alpha\xi) \otimes \eta = \xi \otimes (\alpha\eta).$$

گزاره ۲.۱. فرض کنیم E، F و K فضای باناخ باشند. در این صورت برای هر نگاشت $S \in B(E, F; K)$، نگاشت یکتای $T_S : E \otimes F \longrightarrow K$ وجود دارد به طوری که

$$T_S(\xi \otimes \eta) = S(\xi, \eta) \qquad (\xi \in E, \eta \in F).$$

اثبات. به صفحه‌ی ۲۶ از [۵] رجوع کنید. ■

فرض کنیم E و F فضاهای باناخ باشند. در این صورت نرم

$$\|\zeta\|_\pi = \inf\left\{\sum_{i=۱}^{n} \|\xi_i\|\|\eta_i\| : \zeta = \sum_{i=۱}^{n} \xi_i \otimes \eta_i,\ \xi_i \in E,\ \eta_i \in F\right\} \qquad (\zeta \in E \otimes F)$$

را روی $E \otimes F$ در نظر می‌گیریم، کامل‌سازی $(E \otimes F, \|\cdot\|_\pi)$ را با $E\widehat{\otimes}F$ نمایش می‌دهیم. دراین صورت

$$E\widehat{\otimes}F = \left\{\sum_{i=۱}^{\infty} \xi_i \otimes \eta_i \ : \ \sum_{i=۱}^{\infty} \|\xi_i\|\|\eta_i\| < \infty,\ \xi_i \in E,\ \eta_i \in F\right\}.$$

همراه با نرم

$$\|\zeta\|_\pi = \inf\left\{\sum_{i=۱}^{\infty} \|\xi_i\|\|\eta_i\| : \zeta = \sum_{i=۱}^{\infty} \xi_i \otimes \eta_i,\ \xi_i \in E,\ \eta_i \in F\right\} \qquad (\zeta \in E\widehat{\otimes}F)$$

یک فضای باناخ است که آن را حاصل‌ضرب تانسوری تصویری E و F گوییم. به وضوح

$$\|\xi \otimes \eta\| = \|\xi\|\|y\| \quad (\xi \in E, \eta \in F).$$

فرض کنیم $B(E,F)$ فضای باناخ تمام عملگرهای خطی و کران‌دار از E به F را نشان می دهد. در این صورت منظور از $B(E)$، $B(E,E)$ و منظور از E^*، $B(E,\mathbb{C})$ است که آن را فضای دوگان E می‌نامیم. به علاوه برای هر تابعک $f \in E^*$ و عنصر $\xi \in E$، $f(\xi)$ را با $\langle f, \xi \rangle$ نیز نمایش می‌دهیم.

گزاره ۳.۱. فرض کنیم E، F و G فضاهای باناخ باشند و $S \in B(E,F;G)$. در این صورت نگاشت خطی و پیوسته‌ی یکتای $T_S : E\widehat{\otimes}F \longrightarrow G$ وجود دارد که

$$T_S(\xi \otimes \eta) = S(\xi, \eta) \quad (\xi \in E, \eta \in F)$$

و به علاوه نگاشت $S \mapsto T_S$، $B(E,F;G) \longrightarrow B(E\widehat{\otimes}F, G)$، یک نگاشت دوسویی خطی و طولپاست.

اثبات. به قضیه‌ی ۳ − ٦۹ در پیوست A از [۵] رجوع کنید. ■

گزاره ۴.۱. فرض کنیم E و F دو فضای باناخ باشند. برای هر نگاشت $\phi \in (E \otimes F)^*$، نگاشت $T_\phi : E \longrightarrow F^*$ را با دستور زیر تعریف می کنیم

$$T_\phi(\xi)(\eta) = \phi(\xi \otimes \eta) \quad (\xi \in E, \eta \in F).$$

در این صورت نگاشت $\phi \mapsto T_\phi$، $(E \otimes F)^* \longrightarrow B(E, F^*)$ یک نگاشت دوسویی خطی و طولپاست. به عبارت دیگر

$$(E \otimes F)^* \cong B(E, F^*).$$

اثبات. به گزاره‌ی ۳ − ۷۰ در پیوست A از [۵] رجوع کنید. ■

یادآوری می‌کنیم که منظور از توپولوژی ضعیف * $w^* = \sigma(E^*, E)$ روی E^*، ضعیف‌ترین توپولوژی روی E^* است که تحت آن برای هر $f \in E^*$، تابعک $(\xi \in E) f \mapsto f(\xi)$ پیوسته باشد.

قضیه ۵.۱. فرض کنیم E یک فضای خطی نرم‌دار باشد. در این صورت تابعک خطی $\theta : E^* \longrightarrow \mathbb{C}$، پیوسته‌ی ضعیف* است اگر و تنها اگر عنصر $\xi \in E$ وجود داشته باشد به طوری که $\theta(f) = f(\xi)$ برای هر $f \in E^*$.

اثبات. به قضیه‌ی ۲ در پیوست A از [۱۷] رجوع کنید. ■

قضیه ۶.۱ (باناخ–آلااُغلو). فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار باشد. در این صورت B_{E^*} در E^* تحت توپولوژی ضعیف*، فشرده است.

اثبات. به قضیه‌ی ۱۵ از فصل ۳ در [۴] رجوع کنید. ■

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. گوییم تور $(\xi_\alpha)_{\alpha \in D}$ در X به ξ همگرا ست اگر برای هر همسایگی U از ξ در X عنصر $\alpha_\circ \in D$ موجود باشد به طوری که $\xi_\alpha \in U$ برای هر $\alpha > \alpha_\circ$ و می‌نویسیم $\xi_\alpha \longrightarrow \xi_\circ$ یا $\lim_\alpha \xi_\alpha = \xi_\circ$.

در صفحه‌ی ۱۴ از [۱۲] مشاهده می‌کنیم که برای هر $A \subseteq X$، اگر $\overline{A}$ بستار A در X را نشان دهد، آن‌گاه $\xi \in \overline{A}$ اگر و تنها اگر یک تور (ξ_α) در A موجود باشد که $\xi_\alpha \longrightarrow \xi$. به علاوه A فشرده است اگر و تنها اگر هر تور در A دارای زیر تور همگرا باشد.

تعریف ۷.۱ . فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته مختلط–مقدار روی X را با $C(X)$ نمایش می‌دهیم. $C(X)$ همراه اعمال نقطه‌ای توابع، یک فضای برداری است.

منظور از $C_b(X)$، مجموعه تمام توابع پیوسته مختلط–مقدار کران‌دار روی X است که با نرم $\|.\|_\infty$ زیر یک فضای باناخ است

$$\|f\|_\infty = \sup\{f(\xi) \ : \ \xi \in X\} \quad (f \in C_b(X)).$$

مجموعه تمام توابع $f \in C(X)$ را که در بی‌نهایت صفر می‌شوند با $C_\circ(X)$ نمایش می‌دهیم؛ در بی‌نهایت صفر شدن به این معنی است که برای هر $\epsilon > \circ$، زیرمجموعه‌ی فشرده K از X وجود داشته باشد که برای هر $\xi \in X \backslash K$، $|f(\xi)| < \epsilon$. به وضوح $C_\circ(X)$ یک زیرفضای $C(X)$ است که همراه $\|\cdot\|_\infty$ یک

فضای باناخ است.

برای تابعک $f\in C(X)$ محمل f، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\operatorname{supp}(f)=\{\overline{x\in X: f(x)\neq \circ}\}.$$

منظور از $C_{\circ\circ}(X)$ مجموعه‌ی تمام توابع $f\in C(X)$ با محمل فشرده است، که زیرفضای $C(X)$ است. فضای $C_{\circ\circ}(X)$ همراه $\|\cdot\|_\infty$ یک فضای باناخ و در $C_\circ(X)$ چگال است. توجه کنید که

$$C_{\circ\circ}(X)\subseteq C_\circ(X)\subseteq C_b(X)\subseteq C(X)$$

و اگر X فشرده باشد داریم $C_{\circ\circ}(X)=C_\circ(X)=C_b(X)=C(X)$.

در حالتی که مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ مجهز به توپولوژی گسسته باشد، $C_{\circ\circ}(\mathbb{N})$ و $C_\circ(\mathbb{N})$ را به‌ترتیب با $c_{\circ\circ}$ و $c_\circ$ نمایش می‌دهیم.

لم ۸.۱ (اوریسون). فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده‌ی هاسدورف، V یک مجموعه‌ی باز و K یک زیرمجموعه‌ی فشرده از X باشد که $K\subseteq V$. در این صورت تابع $f\in C_{\circ\circ}(X)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f|_K\equiv ۱\ ,\ \operatorname{supp}(f)\subseteq V\ ,\ f(X)\subseteq[\circ,۱].$$

اثبات. به لم ۲ − ۲ از [۲۳] رجوع کنید. ■

تعریف ۹.۱. فرض کنیم X یک مجموعه باشد. خانواده‌ی $\sum$ از زیرمجموعه‌های X را یک σ−جبر در X گوییم هرگاه $\sum$ دارای خواص زیر باشد

(الف) $X\in\sum$.

(ب) اگر $A\in\sum$، آن‌گاه $X\backslash A\in\sum$.

(ج) اگر $A_۱,A_۲,\dots\in\sum$، آن گاه $\bigcup_{i=۱}^{\infty}A_i\in\sum$.

مجموعه‌ی X مجهز به σ−جبر $\sum$ را با $(X,\sum)$ نمایش می‌دهیم و $(X,\sum)$ را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\sum$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامیم.

هرگاه $(X,\sum)$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد. نگاشت $f:X\longrightarrow\mathbb{C}$ را اندازه‌پذیر گوییم هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی باز V در $\mathbb{C}$، $f^{-۱}(V)\in\sum$.

هرگاه $(X,\sum)$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد، تابع مثبت $\mu:\sum\longrightarrow[\circ,\infty]$ را یک اندازه‌ی مثبت گوییم اگر $\mu(\emptyset)=\circ$ و μ جمعی شمارش‌پذیر باشد؛ یعنی برای دنباله‌ی (A_i) از عناصر دو به دو مجزای $\sum$ داشته باشیم

$$\mu(\bigcup_{i=\text{۱}}^{\infty}A_i)=\sum_{i=\text{۱}}^{\infty}\mu(A_i).$$

در این حالت، $(X,\sum,\mu)$ یا به طور ساده (X,μ) را یک فضای اندازه گوییم. اندازه‌ی مثبت μ را یک اندازه‌ی متناهی گوییم هرگاه $\mu(X)<\infty$. تابع جمعی شمارشی $\mu:\sum\longrightarrow\mathbb{C}$ را اندازه‌ی مختلط روی X گوییم.

تعریف ۱.۱۰. فرض کنیم $(X,\sum,\mu)$ یک فضای اندازه باشد. در این صورت هر تابع مختلط مقدار S بر X با برد متناهی را یک تابع ساده می‌نامیم. در واقع، اگر $c_\text{۱},\cdots,c_n$ مقادیر متمایز تابع ساده‌ی S باشند و قرار دهیم $A_i=\{\xi\in X:S(\xi)=c_i\}$، آن‌گاه $S=\sum_{i=\text{۱}}^{n}c_i\chi_{A_i}$ که در آن χ_{A_i} تابع مشخصه‌ی A_i تعریف شده روی X است.

فرض کنیم $S:X\longrightarrow[\circ,\infty)$ یک تابع ساده‌ی اندازه‌پذیر باشد و $A\in\sum$. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_A S\,d\mu=\sum_{i=\text{۱}}^{\infty}c_i\mu(A_i\cap A)$$

و اگر $f:X\longrightarrow[\circ,\infty)$ تابعی اندازه‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم

$$\int_A f\,d\mu=\sup\left\{\int_A S\,d\mu:\circ\leq S\leq f,\ \text{تابع اندازه‌پذیر ساده}\ S\right\}.$$

هرگاه f یک تابع حقیقی مقدار روی X باشد، تعریف می‌کنیم

$$f^+=\max\{f,\circ\}\ \ ,\ \ f^-=-\min\{f,\circ\}$$

که به وضوح f^+ و f^- توابعی نامنفی هستند و $f=f^+-f^-$ و $|f|=f^++f^-$. اگر $\int_X f^+\,d\mu$ و $\int_X f^-\,d\mu$ متناهی باشند قرار می‌دهیم

$$\int_X f\,d\mu=\int_X f^+\,d\mu-\int_X f^-\,d\mu.$$

هرگاه $f=f_\text{۱}+if_\text{۲}$ تابعی مختلط—مقدار روی X باشد که $\int_X f_i\,d\mu$ برای $i=\text{۱},\text{۲}$ تعریف شده و متناهی باشد، تعریف می‌کنیم

$$\int_X f\,d\mu=\int_X f_\text{۱}\,d\mu+i\int_X f_\text{۲}\,d\mu.$$

تعریف ۱.۱۱. فرض کنیم $(X, \sum, \mu)$ و $(Y, \sum', \nu)$ دو فضای اندازه باشند. در این صورت اندازه‌ی $\mu \times \nu$ را اندازه‌ی حاصل‌ضربی μ و ν می‌نامیم و برای $Q \in \sum \times \sum'$ تعریف می‌شود

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int_X \nu(Q_\xi)\, d\mu(\xi),$$

در صورتی که $Q_\xi = \{\eta \in Y : (\xi, \eta) \in Q\}$ برای هر $\xi \in X$ مجموعه‌ای ν—اندازه‌پذیر باشد.

قضیه ۱.۱۲ (فوبینی). فرض کنیم (X, μ) و (Y, ν) دو فضای اندازه باشند و f یک تابع مختلط—مقدار $\mu \times \nu$—اندازه‌پذیر روی $X \times Y$ باشد که خارج از مجموعه‌ی $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ تقریباً همه‌جا صفر می‌شود و هر A_n مجموعه‌ی $\mu \times \nu$—اندازه‌پذیر است و $(\mu \times \nu)(A_n) < \infty$. در این صورت انتگرال‌های زیر

$$\int_{X\times Y} f(\xi,\eta)\, d\mu \times \nu(\xi,\eta), \quad \int_X \int_Y f(\xi,\eta)\, d\nu(\eta) d\mu(\xi), \quad \int_Y \int_X f(\xi,\eta)\, d\mu(\xi)\, d\nu(\eta)$$

مساوی و متناهی هستند اگر و تنها اگر یکی از انتگرال‌های زیر متناهی باشد

$$\int_{X\times Y} |f(\xi,\eta)|\, d\mu \times \nu(\xi,\eta), \quad \int_X \int_Y |f(\xi,\eta)|\, d\nu(\eta) d\mu(\xi), \quad \int_Y \int_X |f(\xi,\eta)|\, d\mu(\xi)\, d\nu(\eta).$$

اثبات. به قضیه‌ی ۳ − ۱۰ از [۱۲] رجوع کنید. ■

تعریف ۱.۱۳. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. منظور از $\mathcal{B}_X$ کوچکترین σ—جبر شامل تمام زیرمجموعه‌های باز X است و آن را σ—جبر مجموعه‌های بورل X می‌نامیم. به علاوه اعضای $\mathcal{B}_X$ را مجموعه‌های بورل گوییم، در واقع $(X, \mathcal{B}_X)$ یک فضای اندازه‌پذیر است.

اندازه‌ی مثبت یا مختلط μ را بورل روی X گوییم هرگاه (حداقل) روی $\mathcal{B}_X$ تعریف شده باشد.

اندازه‌ی مثبت μ روی X را منظم درونی روی $E \in \mathcal{B}_X$ می‌نامیم اگر

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E \text{ فشرده است}\}$$

و μ رامنظم بیرونی گوییم هرگاه

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : V \supseteq E \text{ باز است}\}.$$

اندازه‌ی μ را منظم روی E گوییم هرگاه منظم درونی و منظم بیرونی باشد.

. هرگاه μ یک اندازه مختلط باشد، تغییر کلی μ را با $|\mu|: \mathcal{B}_X \longrightarrow [0,\infty)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \qquad (E \in \mathcal{B}_X)$$

که سوپریمم روی همه‌ی افرازهای متناهی $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ از E متشکل از مجموعه‌های بورل تغییر می‌کند. $|\mu|$ یک اندازه‌ی مثبت متناهی روی X است.

اندازه‌ی مختلط بورل μ را روی E منظم گوییم اگر $|\mu|$ روی E منظم باشد. به علاوه برای هر عدد مختلط α و اندازه‌های مختلط μ، ν و $E \in \mathcal{B}_X$ تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} (\mu+\nu)(E) &= \mu(E)+\nu(E) \\ (\alpha\mu)(E) &= \alpha\mu(E) \\ \|\mu\| &= |\mu|(X). \end{aligned}$$

هرگاه $M(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی اندازه‌های مختلط بورل منظم روی X باشد، آن‌گاه $M(X)$ با جمع و ضرب اسکالر و نرم فوق یک فضای باناخ است.

اندازه‌ی $\delta_\xi \in M(X)$ روی X برای هر زیرمجموعه‌ی بورل E از X به صورت $\delta_\xi(E) = \chi_E(\xi)$ تعریف می‌شود واندازه‌ی دیراک در ξ نامیده می‌شود.

اندازه‌ی بورل مثبت μ را روی X رادون گوییم هرگاه روی مجموعه‌های فشرده متناهی، روی مجموعه‌های بورل منظم بیرونی و روی مجموعه‌های باز منظم درونی باشد.

یک مجموعه‌ی موضعاً پوچ A در X، مجموعه‌ای است که برای هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی $K \subseteq X$، $\mu(A\cap K) = 0$. یک خاصیت وابسته به $\xi \in X$ را موضعاً تقریباً همه‌جا در X برقرار می‌نامیم اگر مجموعه‌ی نقاطی که دارای آن خاصیت نیست، موضعاً پوچ باشد.

فرض کنیم (X,μ) یک فضای اندازه باشد. در این صورت منظور از $L^1(X,\mu)$ مجموعه‌ی تمام توابع اندازه‌پذیر f روی X است که

$$\|f\|_1 = \int_X |f(\xi)|\, d\mu(\xi) < \infty.$$

در $L^1(X,\mu)$ توابعی را که موضعاً تقریباً همه جا یکسان هستند، یکی می‌گیریم. در این صورت $L^1(X,\mu)$ با اعمال جمع، ضرب اسکالر توابع و نرم $\|\cdot\|_1$ یک فضای باناخ است.

هرگاه μ یک اندازه‌ی شمارشی روی مجموعه‌ی X باشد، یعنی اندازه‌ای که برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی $A \subseteq X$، تعداد عناصر A و برای هر زیرمجموعه نامتناهی A از X، ∞ را نظیر می‌کند، $L^1(X,\mu)$ را با $\ell^1(X)$ نمایش می‌دهیم. لذا $\ell^1(X)$ فضای همه‌ی توابع $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ است که

$$\|f\|_1 = \sum_{x\in X} |f(\xi)| < \infty,$$

که در آن

$$\sum_{\xi\in X} |f(\xi)| = \sup\left\{\sum_{\xi\in F} |f(\xi)| : \text{متناهی است } F \subseteq X\right\}.$$

برای هر $\xi \in X$ تابع $\delta_\xi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ را با دستور

$$\delta_\xi(\eta) = \begin{cases} 1 & \xi = \eta \\ 0 & \xi \neq \eta \end{cases} \qquad (\eta \in X)$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت چون برای هر $f \in \ell^1(X)$، مجموعه‌ی $\{\xi \in X : f(\xi) \neq 0\}$ شماراست، تابع $f \in \ell^1(X)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f = \sum_{\xi\in X} f(\xi)\delta_\xi.$$

به عبارت دیگر $f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\delta_{\xi_i}$ که ξ_iها عناصر متمایز در X و α_iها اعداد مختلط هستند.

منظور از $L^\infty(X,\mu)$ مجموعه‌ی تمام توابع انتگرال‌پذیر و مختلط—مقدار f روی X است که

$$\|f\|_\infty = \inf\{t \in \mathbb{R} : t \geq 0, \text{برا ی موضعاً تقریباً هر } \xi \in X \ \ |f(\xi)| \leq t\} < \infty.$$

در $L^\infty(X,\mu)$ توابعی را که موضعاً تقریباً همه جا یکسان هستند، یکی می‌گیریم. در این صورت $L^\infty(X,\mu)$ با اعمال نقطه‌ای و نرم $\|\cdot\|_\infty$ یک فضای باناخ است. به علاوه $L^\infty(X,\mu)$ دوگان فضای $L^1(X,\mu)$ است.

هرگاه μ اندازه‌ی شمارشی روی مجموعه‌ی X باشد، $L^\infty(X,\mu)$ را با $\ell^\infty(X)$ نمایش می‌دهیم. $\ell^\infty(\mathbb{N})$ و $\ell^1(\mathbb{N})$ رابه ترتیب با ℓ^∞ و ℓ^1 نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۴.۱ (نمایش ریس) فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده‌ی هاسدورف و P یک تابعک خطی مثبت روی $C_{00}(X)$ باشد. در این صورت یک اندازه‌ی رادون یکتا مانند μ روی X وجود دارد به طوری که $\|f\| = \|\mu\|$ و

$$P(f) = \int_X f\,d\mu \qquad (f \in C_{00}(X)).$$

اثبات. به قضیه‌ی ۲ − ۱۴ از [۲۳] رجوع کنید. ■

نتیجه ۱.۱۵. فرض کنیم X یک فضای موضعاً فشرده‌ی هاسدورف و F یک تابعک خطی و کران‌دار روی $C_\circ(X)$ باشد. در این صورت یک اندازه‌ی رادون یکتای $\mu \in M(X)$ وجود دارد به طوری که $\|F\| = \|\mu\|$ و

$$F(f) = \int_X f\, d\mu \qquad (f \in C_\circ(X)).$$

اثبات. به ۶ − ۱۹ از [۲۳] رجوع کنید. ■

تعریف ۱.۱۶. فرض کنیم A یک فضای خطی روی $\mathbb{C}$ همراه با عمل ضرب $\cdot : A \times A \longrightarrow A$ باشد به‌طوری که برای هر $a, b, c \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

(الف) $(ab)c = a(bc)$،

(ب) $(a+b)c = ac + bc$،

(ج) $a(b+c) = ab + ac$،

(د) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.

در این صورت A را یک جبر می‌نامیم.

زیرفضای B از A را یک زیرجبر از A گوییم هرگاه همراه با اعمال A یک جبر باشد.

زیرجبر I از A را یک ایده‌آل چپ (راست) A گوییم هرگاه $IA \subseteq I$ $(AI \subseteq I)$.

جبر A را جابه‌جایی گوییم هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته‌باشیم $ab = ba$.

جبر A را یکدار می‌نامیم اگر عنصر $e \in A$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$ داشته باشیم $ae = ea = a$. در این حالت e را عنصر یکه یا همانی A می‌نامیم.

جبر A را نرم‌دار گوییم هرگاه به‌عنوان یک فضای خطی، نرم‌دار باشد و برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$. در این حالت $\|\cdot\|$ را یک نرم‌جبری گوییم.

جبر نرم‌دار A را جبر باناخ گوییم اگر به‌عنوان یک فضای خطی نرم‌دار، کامل باشد.

فرض کنیم A یک جبر نرم‌دار باشد. در این صورت تور (e_α) در A یک همانی تقریبی چپ (راست)

برای A است هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم $a \longrightarrow e_\alpha a$ $(a \longrightarrow ae_\alpha)$. در حالتی‌که (e_α) کران‌دار باشد آن را همانی تقریبی چپ (راست) کران‌دار می‌نامیم.

فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. در این صورت فضای باناخ E مجهز به نگاشت $(a, \xi) \mapsto a \cdot \xi$، $A \times E \longrightarrow E$، را یک $A-$مدول چپ باناخ گوییم هرگاه یک مقدار ثابت و نامنفی $C = C_E$ وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که برای هر $a, b \in A$، $\xi, \eta \in E$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

(۱) $a \cdot (\alpha\xi + \eta) = \alpha(a \cdot \xi) + a \cdot \eta$،

(۲) $(\alpha a + b) \cdot \xi = \alpha a \cdot \xi + b \cdot \xi$،

(۳) $(ab) \cdot \xi = a \cdot (b \cdot \xi)$،

(۴) $\|a \cdot \xi\| \leq C\|a\|\|\xi\|$.

$A-$مدول راست باناخ نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود. فضای باناخ E را $A-$مدول دوطرفه باناخ گوییم هرگاه $A-$مدول راست باناخ و $A-$مدول چپ باناخ باشد و برای هر $a, b \in A$ و $\xi \in E$ داشته باشیم

$$a \cdot (\xi \cdot b) = (a \cdot \xi) \cdot b.$$

فرض کنیم A یک جبر باناخ یکدار با عنصر همانی e باشد. در این صورت E را یک $A-$مدول چپ باناخ یکدار می‌نامیم اگر یک $A-$مدول چپ باناخ باشد و

$$e \cdot \xi = \xi \qquad (\xi \in E).$$

گزاره **۱.۱۷.** فرض کنیم A یک جبر باناخ، E یک $A-$مدول چپ باناخ و F یک فضای باناخ باشد. در این صورت $E\widehat{\otimes}F$ یک $A-$مدول چپ باناخ با ضرب زیر است

$$a \cdot (\xi \otimes \eta) = (a \cdot \xi) \otimes \eta \qquad (a \in A, \xi \in E, \eta \in F).$$

اثبات. برای $a \in A$ نگاشت ${}_a\rho : E \times F \longrightarrow E\widehat{\otimes}F$ را با دستور

$${}_a\rho(x, y) = (a \cdot \xi) \otimes \eta$$

تعریف می‌کنیم، خوش‌تعریفی این نگاشت واضح است. به‌علاوه برای هر $\xi \in E$ و $\eta \in F$ داریم

$$\|{}_a\rho(\xi, \eta)\|_\pi \quad = \quad \|(a \cdot \xi) \otimes \eta\|_\pi$$