خداوند متعال را سپاسگزارم که به سبب رحمت واسعه اش توفیق علم آموزی را نصیبم کرد و در مرحله ی دیگری از تحصیل و زندگیم همراهم بود.

از اولین و بزرگترین معلمانم پدر و مادر مهربانم که همواره مشوق و راهنمایم بوده اند و دلگرمی هایشان سختی این مسیر را برایم هموار نمود نهایت سپاس را دارم.

صمیمانه از استاد راهنمای بزرگوار و عزیزم آقای دکتر اکبر مجیبی که شاگردی در محضر ایشان بزرگترین افتخار زندگیم بود، به خاطر تمام مساعدت ها، زحمات، پیگیری ها و راهنمایی های بسیار ارزنده و بی دریغشان در تمامی مراحل تحقیق و نگارش این پایان نامه و اینکه جبران قطره ای از زحمت ها و محبت هایشان برایم قابل تصور نیست، نهایت تشکر و امتنان را دارم.

از استاد مشاور گرامی آقای دکتر مهدی تاتاری که در محضرشان نیز کسب علم نموده ام و از اساتید ارجمند آقای دکتر تبریزی دوز و آقای دکتر سعادتمندی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را بر عهده داشته اند تشکر فراوان دارم.

در پایان دست تمامی کسان و مخصوصاً دوستان عزیزم که در گذر زندگی چراغی فرا راهم داشتند به گرمی می فشارم.

شهریور ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

چکیده

روش‌های عددی سنتی مبتنی بر گسسته سازی شبکه برای حل مسایل در زمینه‌های مختلف علمی به‌طور چشم‌گیری توسعه یافته‌اند، اما استفاده از این روش‌ها هنوز دارای معایبی است. اگرچه در دهه‌های گذشته تلاش‌های زیادی در زمینه تولید شبکه صورت گرفته است، اما همچنان تولید شبکه فرآیندی پیچیده و زمان‌بر است.

تلاش برای غلبه بر این مشکلات، در طی سه دهه‌ی گذشته موجب پیدایش خانواده‌ای دیگر از روش‌های عددی برای حل معادلات با مشتقات پاره‌ای، تحت عنوان روش‌های بی‌نیاز از شبکه شده است که در طی سال های اخیر توجهات زیادی را به خود جلب کرده است. هدف اولیه‌ی این روش‌ها حذف یا حداقل کاهش مشکلات ناشی از تولید شبکه است. در این پایان‌نامه روش پترو-گالرکین موضعی بی‌نیاز از شبکه برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای را معرفی کرده و کارایی این روش را برای حل معادلات مستقل از زمان خطی و غیرخطی و معادلات وابسته به زمان مورد بررسی قرار خواهیم داد. با ارایه‌ی مثال‌ها و نتایج عددی دقت و کارایی روش را نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: روش‌های بی‌نیاز از شبکه، روش پترو-گالرکین موضعی بی‌نیاز از شبکه، تقریب کمترین مربعات متحرک ، معادله‌ی MHD

فصل ۱

مقدمه

در این فصل ابتدا به تاریخچه و معرفی اجمالی روش‌های‌بی‌نیاز از شبکه[۱] برای حل معادلات با مشتقات پاره‌ای از جمله روش پترو-گالرکین موضعی بی‌نیاز از شبکه[۲]می‌پردازیم. در آخر تعاریف و مفاهیم مورد استفاده در پایان‌نامه را مطرح خواهیم کرد.

۱.۱ روش‌های بی‌نیاز از شبکه

مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی اغلب منجر به تولید معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای می‌شوند. اما یافتن جواب تحلیلی برای این معادلات همیشه امکان‌پذیر نیست. بنابراین استفاده از روش‌های عددی برای حل این معادلات اجتناب ناپذیر به‌نظر می‌رسد. اگرچه روش‌های عددی سنتی مبتنی بر گسسته سازی شبکه مانندروش تفاضلات متناهی[۳](FDM)، روش عناصر متناهی[۴](FEM)، روش حجم‌های متناهی[۵](FVM) و روش عناصر مرزی[۶](BEM)برای حل مسایل در زمینه‌های مختلف علمی به‌طور چشم‌گیری توسعه یافته‌اند، اما استفاده از این روش‌ها هنوز دارای معایبی است. چگونگی رویارویی با مرزهای نامنظم در روش تفاضلات متناهی، ذخیره‌سازی حجم وسیعی از اطلاعات در روش عناصر متناهی و مسایل مربوط به

---

[۱] Meshless

[۲] Meshless local Petrov-Galerkin method(MLPG)

[۳] Finite Difference Method(FDM)

[۴] Finite Element Method(FEM)

[۵] Finite Volume Method(FVM)

[۶] Boundary Element Method(BEM)

محاسبه‌ی جواب‌های اساسی[۷] در روش عناصر مرزی از جمله مشکلات مربوط به این روش‌هاست. تولید شبکه‌های مناسب و وابستگی زیاد دقت این روش‌ها به چگونگی شبکه‌بندی دامنه‌ی فیزیکی مساله، از دیگر مشکلات عمده در بین تمامی این روش‌هاست. اگرچه در دهه‌های گذشته تلاش‌های زیادی در زمینه تولید شبکه[۸] صورت گرفته است، اما همچنان تولید شبکه فرآیندی پیچیده و زمان‌بر است.

تلاش برای غلبه بر این مشکلات، در طی سه دهه‌ی گذشته موجب پیدایش خانواده‌ای دیگر از روش‌های عددی برای حل معادلات با مشتقات پاره‌ای، تحت عنوان روش‌های بی‌نیاز از شبکه شده است که در طی سال‌های اخیر توجهات زیادی را به خود جلب کرده است. هدف اولیه‌ی این روش‌ها حذف یا حداقل کاهش مشکلات ناشی از تولید شبکه است. در این روش‌ها به منظور غلبه بر مشکلات ناشی از تولید شبکه، دامنه و مرز مساله براساس نقاط گره‌ای[۹] گسسته سازی می‌شوند، که در حالت کلی این نقاط به‌طور نامنظم و بدون ارتباط از پیش تعیین شده‌ای در دامنه پراکنده شده‌اند [۱۱]. اگرچه این روش‌ها در مقایسه با قدمت روش‌های مبتنی بر شبکه، هنوز در گام‌های ابتدایی‌اند، اما مزایای این روش‌ها باعث گسترش چشمگیر آن‌ها شده است.

با توجه به عدم نیاز به ساختار شبکه‌ای، این روش‌ها برای مسایلی با دامنه‌های پیچیده یا دامنه‌هایی که از نظر شکل هندسی تغییر می‌کنند، به‌خوبی قابل پیاده‌سازی هستند. همچنین انعطاف پذیری بالای این روش‌ها، امکان توسیع آن‌ها را به ابعاد بالاتر فراهم می‌آورد. علاوه بر این در این روش‌ها می‌توان با افزودن نقاط گرهی در ناحیه‌ای دلخواه از دامنه، دقت روش را در آن ناحیه افزایش داد. از دیگر مزایای این روش‌ها مرتبه بالای پیوستگی توابع شکل[۱۰] است [۳۸].

در کنار مزایای ذکر شده برای روش‌های بی‌نیاز از شبکه، این روش‌ها دارای معایبی نیز هستند. توابع شکل مورد استفاده در این روش‌ها اغلب در خاصیت دلتای کرونکر[۱۱] صدق نمی‌کنند بنابراین برای اعمال شرایط مرزی دیریکله[۱۲] نیازمند تکنیک‌های خاصی هستیم. از طرفی برخلاف روش عناصر متناهی، توابع شکل استفاده شده در روش‌های بی‌نیاز از شبکه چندجمله‌ای نیستند و مشتق مرتبه l-ام این توابع با افزایش l، افزایش می‌یابد. به‌علاوه ماتریس سختی معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت، به‌طور دقیق قابل محاسبه نیست. بنابراین توابع شکل مورد استفاده در روش‌های بی‌نیاز از شبکه فاقد این دو خصوصیت نسبت به

---

[۷] Fundamental Solutions

[۸] Mesh Generation

[۹] Nodes

[۱۰] Shape Functions

[۱۱] Kronoker Delta

[۱۲] Drichlete Boundary Conditions

توابع شکل مورد استفاده در روش عناصر متناهی هستند. از این رو برای محاسبه انتگرال توابع شکل روش‌های بی‌نیاز از شبکه، نیازمند روش‌های عددی با مرتبه دقت بالا هستیم که باعث افزایش هزینه‌ی محاسباتی می‌شود [۹].

۲.۱ تاریخچه

اولین تلاش‌ها در این زمینه با معرفی روش تفاضلات متناهی تعمیم یافته روی شبکه‌های دلخواه توسط پِرون و کائو در سال ۱۹۷۵ صورت گرفت [۴۰]. در سال ۱۹۷۷ لوسی [۳۱] و پس از آن جین‌گلد و موناقان [۱۵] روش هیدرودینامیک‌های ذره‌ای هموار شده[۱۳] را معرفی کردند. این روش اولین بار برای مدل‌سازی پدیده‌های اختر فیزیک بدون مرز و سپس برای حل مسایل در مکانیک سیالات به‌وجود آمد. توسعه این روش توسط موناقان و همکارانش در طی سال‌های ۱۹۸۲ و ۱۹۸۸ صورت گرفت [۳۵،۳۶]. پس از آن، در سال ۱۹۹۲ نایرولس و همکارانش [۳۷] از تقریب کمترین مربعات متحرک[۱۴] در روش گالرکین[۱۵] استفاده کردند و آن را روش عناصر پراکنده[۱۶] نامیدند. دو سال بعد، در سال ۱۹۹۴ بلیچکو به کمک همکارانش [۱۲] روش گالرکین بی‌نیاز از عناصر[۱۷] را ارایه کرد که توسعه روش نایرولس است. روش گالرکین بی‌نیاز از عناصر به منظور بهبود فرآیند انتگرال‌گیری، شیوه اعمال شرایط مرزی دیریکله و تعیین تقریب مشتقات روش عناصر پراکنده به‌وجود آمد. روش هسته‌ی بازیافتی جزیی[۱۸] توسط لیو و همکارانش [۲۴] در سال ۱۹۹۵ معرفی شد. این روش در واقع تلاشی برای از بین بردن نواقص ناشی از پایداری در روش هیدرودینامیک‌های ذره‌ای هموار شده بود. بسیاری از مسایل در دینامیک سیالات و آنالیز نوسانات توسط این روش به‌خوبی پیاده سازی شده‌اند. در همان سال اونیاته و همکارانش [۳۹] روش نقاط متناهی[۱۹] را معرفی کردند. این روش اولین بار برای مدل‌سازی مسایل جریان سیالات[۲۰] به‌وجود آمد و پس از آن برای حل بسیاری از مسایل در مکانیک مانند مسایل کشسانی مورد استفاده قرار گرفت. از

[۱۳] Smoothed Particle Hydrodynamic Method

[۱۴] Moving Least Square(MLS)

[۱۵] Galerkin Method

[۱۶] Diffuse Element Method

[۱۷] Element Free Galerkin Method

[۱۸] Reproducing Kernel Particle Method

[۱۹] Finite Point Method

[۲۰] Fluid Flow

دیگر روش‌های بی‌نیاز از شبکه به روش افراز واحد[21] می‌توان اشاره کرد که توسط بابوشکا و مِلنک در سال ۱۹۹۷ ارایه شد [۱۰].
در سال ۱۹۹۸ آتلوری و زو [۴۸] روش پترو–گالرکین موضعی بی‌نیاز از شبکه را معرفی کردند. در سال‌های بعد آتلوری و همکارانش از این روش برای حل مسایل مربوط به مکانیک محاسباتی استفاده کردند [۸،۶].
در سال ۲۰۰۰ آتلوری و لین به حل مساله همرفت–پخش پرداختند [۲۳]. بعد از آن آتلوری و کیم مسایل مربوط به مکانیک شکست را مورد بررسی قرار دادند [۲۱].
تفاوت اصلی این روش با روش‌هایی چون گالرکین بی نیاز از عناصر و هسته‌ی بازیافتی جزئی استفاده از شکل ضعیف موضعی[22] به‌جای استفاده از شکل ضعیف سراسری[23] در انتگرال‌گیری است. نکته‌ی قابل توجه این است که ماتریس ضرایب حاصل از روش تقریب کمترین مربعات ماتریسی متقارن و معین مثبت است. از طرفی روش‌هایی که تحت عنوان روش گالرکین دسته بندی می‌شوند، اغلب نیازمند یک شبکه کمکی برای انتگرال‌گیری هستند. اما در میان این روش‌ها، روش پترو–گالرکین موضعی بی‌نیاز از شبکه برای محاسبه انتگرال نیز نیازمند شبکه‌بندی نیست، از این‌رو آتلوری در [۴] برای معرفی روش MLPG، عبارت "کاملا بی‌نیاز از شبکه" را به‌کاربرده است. در این پایان‌نامه سعی داریم روش پترو–گالرکین موضعی بی‌نیاز از شبکه را برای حل عددی معادلات با مشتقات پاره‌ای مورد بررسی بیشتر قرار دهیم.

۳.۱ مفاهیم پایه

در این بخش به معرفی مفاهیمی می‌پردازیم که در فصل‌های آینده مورد استفاده قرار می‌گیرند. در سرتاسر این پایان نامه $\mathbf{x}$ نقطه‌ای دلخواه در $\mathbb{R}^n$ در نظر گرفته شده است که با n–تایی [24] مرتب $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نمایش داده می‌شود. کلیه‌ی مطالب این بخش برگرفته از مراجع [۲،۱۳،۱۴،۲۸،۴۱] است.

[21] Partition of Unity Method
[22] Local Weak Form
[23] Global Weak Form
[24] n–tuple

۱.۳.۱ اندیس چندگانه

اگر $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ یک n–تایی مرتب از اعداد صحیح نامنفی α_i باشد، α را یک اندیس چندگانه[۲۵] می‌نامیم.
نمادهای زیر در ارتباط با اندیس چندگانه‌ی α تعریف می‌شود.

- طول α با $|\alpha|$ نشان داده می‌شود و به‌صورت $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ تعریف می‌شود.
- اگر α و β دو اندیس چندگانه باشند، آن‌گاه $\alpha \leq \beta$ اگر برای هر $i = 1, 2, \dots, n$، $\beta_i \leq \alpha_i$.
- $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$
- برای $\beta \leq \alpha$، ضرایب بسط دوجمله‌ای به‌صورت

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}$$

تعریف می‌شود.

- تک جمله‌ای $\mathbf{x}$ از درجه‌ی $|\alpha|$ عبارت است از

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

- یک چندجمله‌ای از درجه‌ی کمتر یا مساوی m به‌صورت ترکیب خطی تک جمله‌ای‌ها تعریف می‌شود

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha,$$

که ضرایب c_α اعداد حقیقی یا مختلط هستند. فضای چندجمله‌ای‌های با درجه‌ی کمتر یا مساوی m در فضای $\mathbb{R}^n$ با نماد $\prod_m^n$ نشان داده می‌شود.

- مشتق مرتبه α–ام تابع $u \in C^m$، برای هر α که $|\alpha| \leq m$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

---

[۲۵] Multi-index

بنابراین می‌توان به‌راحتی فرمول لایبنیتز[۲۶]

$$D^{\alpha}(uv)(\mathbf{x}) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\beta}u(\mathbf{x}) D^{\alpha-\beta}v(\mathbf{x}),$$

را برای مشتق مرتبه α-ام ضرب دو تابع $u, v \in C^m$ ثابت کرد.

- فرض کنید $u \in C^{m+1}$ و $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$. چندجمله‌ای تیلور[۲۷] مرتبه $|\alpha|$ تابع u حول نقطه‌ی a که $|\alpha| = m$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$u(a+\mathbf{h}) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha}u(a)\mathbf{h}^{\alpha} + \frac{1}{(m+1)!} \sum_{|\alpha|=m+1} D^{\alpha}u(a+\theta\mathbf{h})\mathbf{h}^{\alpha},$$

که در آن $\theta \in (0,1)$.

قضیه ۱.۳.۱ (دیورژانس[۲۸]) فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ناحیه‌ای همبند و دارای مرز هموار یا قطعه‌ای هموار Γ باشد. اگر F یک میدان برداری به‌طور پیوسته مشتق پذیر در همسایگی Ω باشد، در این‌صورت داریم

$$\int_{\Omega} \nabla . F = \int_{\Gamma} F.n,$$

که در آن n بردار نرمال برون سو روی مرز Γ است.

۲.۳.۱ فضاهای سوبولف

تعریف ۲.۳.۱ فرض کنید X یک فضای برداری[۲۹] (خطی) باشد. اگر تابع $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ در شرایط

(الف) $\|u\| \geq 0$ برای هر $u \in X$،

(ب) $\|u\| = 0$ اگروفقط‌اگر $u = 0$،

(ج) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$ برای هر $u \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$،

(د) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ برای هر $u, v \in X$،

---

[۲۶] Leibniz Formula

[۲۷] Taylor Polynomial

[۲۸] Divergence

[۲۹] Vector Space

صدق کند، آن‌گاه تابع $\|.\|$ را یک نرم و X را یک فضای خطی نرم‌دار[۳۰] با نرم $\|.\|$ می‌نامیم.

تعریف ۳.۳.۱ فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی باشد. اگر تابع $(.,.) : X \to \mathbb{R}$ در شرایط

(الف) $(u,v) = (v,u)$ برای هر $u, v \in X$،

(ب) $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u,w) + \beta(v,w)$ برای هر $u, v \in X$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$،

(ج) $(u,u) \geq 0$ برای هر $u \in X$،

(د) $(u,u) = 0$ اگروفقط‌اگر $u = 0$،

صدق کند، آن‌گاه X را یک فضای حاصل‌ضرب داخلی با ضرب داخلی $(.,.)$ می‌نامیم.

ملاحظه ۴.۳.۱ برای فضای حاصل‌ضرب داخلی X با ضرب داخلی $(.,.)$ رابطه‌ی

$$\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}},$$

بیان‌گر یک نرم روی X است که نرم القایی حاصل از ضرب داخلی نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۳.۱ تابع v تعریف شده روی $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ را پیوسته‌ی لیپ‌شیتز گوییم هرگاه ثابت C وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ نامساوی زیر برقرار باشد

$$|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| \leq C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

تعریف ۶.۳.۱ فضای C^m فضای توابعی است که تمام مشتقات پاره‌ای مرتبه‌ی α از آن‌ها به‌ازای $0 \leq |\alpha| \leq m$ پیوسته باشند، یعنی

$$C^m(\Omega) = \{u : D^\alpha u \in C(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

C^∞ نیز فضای توابعی است که تمام مشتقات پاره‌ای آن‌ها وجود دارند و روی Ω پیوسته هستند.

تعریف ۷.۳.۱ فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ یک مجموعه‌ی باز غیرتهی باشد. فضای توابع اندازه پذیر [۳۱]

---

[۳۰] Normed Linear Space

[۳۱] Measurable Functions

$u : \Omega \to \mathbb{R}$ را فضای لبگ[۳۲] $L_p(\Omega)$ می‌نامند و برای $1 \le p \le \infty$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$L_p(\Omega) := \{u \,|\, \|u\|_{L_p(\Omega)} < \infty\},$$

که در آن نرم $\|.\|_{L_p(\Omega)}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^p \mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty,$$

که در آن $\mathrm{d}\mathbf{x}$ اندازه لبگ است.

فضای $L_\infty(\Omega)$ نیز فضای توابع اندازه پذیر کران‌دار u روی Ω است. نرم $\|.\|_\infty$ در این فضا به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}\|u\|_{L_\infty}(\Omega) &= \operatorname{ess\,sup}\{|u(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in \Omega\},\\ &= \inf\{\, M : \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : |u(\mathbf{x})| > M\,\} = 0\}.\end{aligned}$$

قضیه ۸.۳.۱ (نامساوی هولدر[۳۳]) فرض کنیم $1 \le p, q \le \infty$ به‌طوری‌که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، در این‌صورت

۱) اگر $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$، آن‌گاه

$$|\sum_{i=1}^n a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q}.$$

۲) اگر $u \in L_p(\Omega)$ و $v \in L_q(\Omega)$ آن‌گاه $uv \in L_1(\Omega)$ و

$$\|uv\|_{L_1(\Omega)} \le \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}.$$

تعریف ۹.۳.۱ محمل[۳۴] تابع u بستار مجموعه‌ای تعریف می‌شود که u داخل آن مجموعه غیرصفر است،

[۳۲] Lebesgue Space

[۳۳] Hölder Inequality

[۳۴] Support

یعنی داریم

$$supp(u)=\overline{\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\ :u(\mathbf{x})\neq 0\}},$$

اگر u در دامنه $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ تعریف شده باشد و محمل u مجموعه‌ای فشرده در Ω باشد، آن‌گاه تابع u تابعی با محمل فشرده[۳۵] نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۳.۱ فرض کنید $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ دامنه‌ای کران‌دار باشد، فضای$\mathcal{D}(\Omega)$ یا $C_0^\infty(\Omega)$ فضای توابعی از C^∞ است که در Ω دارای محمل فشرده هستند.

تعریف ۱۱.۳.۱ برای $1\leq p\leq\infty$ تابع $u:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ را به‌طور موضعی p-انتگرال‌پذیر گوییم، $u\in L^p_{loc}$، هر گاه برای هر $\mathbf{x}\in\Omega$ همسایگی باز Ω' حول $\mathbf{x}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\bar{\Omega}'\subset\Omega$ و $u\in L_p(\Omega')$.

تعریف ۱۲.۳.۱ (انتگرال‌گیری جزبه‌جز) فرض کنید $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ یک مجموعه‌ی باز باشد. آن‌گاه برای هر $u\in C^m(\Omega)$، $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ و $|\alpha|\leq m$ داریم

$$\int_\Omega u(\mathbf{x})D^\alpha\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

لم ۱۳.۳.۱ فرض کنید $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ که در آن $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ یک مجموعه‌ی باز ناتهی است. اگر به‌ازای هر $\phi(\mathbf{x})\in\mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega u(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}=0,$$

آن‌گاه v روی Ω تقریبا همه جا صفر است.

تعریف ۱۴.۳.۱ فرض کنید $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ یک مجموعه‌ی باز ناتهی باشد و $u,v\in L^1_{loc}(\Omega)$ آن‌گاه تابع v مشتق ضعیف[۳۶] مرتبه α-ام تابع u نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\phi(\mathbf{x})\in\mathcal{D}(\Omega)$، داشته باشیم

$$\int_\Omega u(\mathbf{x})D^\alpha\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

---

[۳۵] Compact Support

[۳۶] Weak Derivative

تعریف ۱۵.۳.۱ فرض کنید m عدد صحیح نامنفی باشد و $p \in [1, \infty]$. فضای سوبولف $W^{m,p}(\Omega)$ فضای توابعی است که تمام مشتقات ضعیف مرتبه‌ی α-ام آن‌ها به‌ازای $|\alpha| \leq m$، در $L_p(\Omega)$ قرار دارد، یعنی

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u :\ D^\alpha u \in L_p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

از نماد $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ برای نشان دادن نرم فضای $W^{m,p}$ استفاده می‌کنیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left[\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)}\right]^{1/p}, && 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \max_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}, && p = \infty. \end{aligned}$$

علاوه براین نیم‌نرم[۳۷] $|u|_{W^{m,p}(\Omega)}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} |u|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left[\sum_{|\alpha|= m} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)}\right]^{1/p}, && 1 \leq p < \infty, \\ |u|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \max_{|\alpha|= m} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}, && p = \infty. \end{aligned}$$

تعریف ۱۶.۳.۱ در حالت خاص، فضای سوبولف $W^{m,2}(\Omega)$ را با نماد $H^m(\Omega)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین $H^m(\Omega)$، فضای توابعی است که مشتقات ضعیف مرتبه‌ی α آن‌ها به‌ازای $0 \leq |\alpha| \leq m$، در $L_2(\Omega)$ قرار دارد، یعنی

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

---

[۳۷] Semi-Norm

برای نابرابری سوبولف ابتدا مفاهیم زیر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۷.۳.۱

فرض کنید $V \subset U \subset \mathbb{R}^n$ دو مجموعه‌ی باز و کران‌دار باشند. گوییم V به‌طور فشرده نشانده شده[۳۸] در U نامیده می‌شود، اگر $V \subset \bar{V} \subset U$ و $\bar{V}$ فشرده باشد و با نماد $V \subset\subset U$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۸.۳.۱

مجموعه‌ی Ω نسبت به گوی $B \subset\subset \Omega$ ستاره‌گون[۳۹] نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\mathbf{x} \in \Omega$، پوسته‌ی محدب و بسته‌ی $\{\mathbf{x}\} \cup B$ زیر مجموعه Ω باشد.

تعریف ۱۹.۳.۱

مجموعه Ω را با قطر d در نظر بگیرید. فرض کنید

$$\rho_{max} = sup\{\rho : \text{نسبت به گویی با شعاع } \rho \text{ ستاره‌گون است } \Omega\},$$

در این‌صورت پارامتر ضخامت[۴۰] Ω به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\gamma = \frac{d}{\rho_{max}}.$$

قضیه ۲۰.۳.۱ (نابرابری سوبولف) فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ دامنه‌ای با مرز لیپ‌شیتز با قطر d و نسبت به گوی B ستاره گون باشد. اگر عدد حقیقی $1 \leq p \leq \infty$ و عدد صحیح مثبت m به‌گونه‌ای باشند که در یکی از دو حالت زیر صدق کنند

۱) اگر $p = 1$ آن‌گاه $m \geq s$،

۲) اگر $p > 1$ آن‌گاه $mp > s$،

آن‌گاه هر $u \in W^{m,p}(\Omega)$ روی Ω پیوسته است و ثابت C وابسته به پارامترهای m، d، s و γ وجود دارند

[۳۸] Compactly Embeded

[۳۹] Star-Shaped

[۴۰] Chunkiness Parameter

به‌گونه‌ای که

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C_{m,s,\gamma,d}\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}. \quad (۱.۱)$$

۳.۳.۱ مروری بر فصل‌های دیگر

در این پایان‌نامه که با هدف بررسی روش پترو–گالرکین موضعی بی‌نیاز از شبکه در حل معادلات با مشتقات پاره‌ای تدوین شده است، سعی داریم کارایی و دقت این روش را برای حل مسایل مختلف، شامل معادلات مستقل از زمان[۴۱] و وابسته به زمان[۴۲] خطی و غیر خطی بررسی کنیم. مطالب این پایان نامه در فصول بعدی به‌ترتیب زیر ارایه شده است.

در فصل دوم ابتدا تقریب کمترین مربعات متحرک معرفی و بررسی می‌شود و با ارایه روشی پایدار در محاسبات، خطای این تقریب مورد تحلیل قرار می‌گیرد. پس از آن به معرفی روش پترو–گالرکین موضعی بی‌نیاز از شبکه می‌پردازیم.

در فصل سوم با بررسی معادلات خطی و غیرخطی به بررسی خطای روش پترو–گالرکین موضعی بی‌نیاز از شبکه برای حل مسایل بیضوی می‌پردازیم.

در فصل چهارم روش پترو–گالرکین موضعی بی‌نیاز از شبکه برای حل مسایل سهموی مطرح می‌شود و با حل برخی از معادلات، خطای این روش را بررسی می‌کنیم. همچنین نمونه‌ای از دستگاه معادلات سهموی ارایه می‌شود.

---

[۴۱] Time Independent

[۴۲] Time Dependent

فصل ۲

روش پترو-گالرکین موضعی بی نیاز از شبکه

روش پترو-گالرکین موضعی بی‌نیاز از شبکه یکی از روش‌های بی‌نیاز از شبکه در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای است و به‌این دلیل که هم در تقریب توابع شکل و هم در انتگرال‌گیری بی‌نیاز از شبکه است، یک روش کاملا بی‌نیاز از شبکه محسوب می‌شود. در این روش از تقریب کمترین مربعات متحرک برای ساخت توابع تقریب بی‌نیاز از شبکه استفاده می‌شود. در این فصل ابتدا حالت کلی پیاده سازی روش‌های بی‌نیاز از شبکه را بیان می‌کنیم. سپس به بررسی تقریب کمترین مربعات متحرک و تحلیل خطای آن و در پایان به روش پترو-گالرکین موضعی بی‌نیاز از شبکه می‌پردازیم.

۱.۲ نحوه پیاده سازی روش‌های بی‌نیاز از شبکه

در این بخش روند حل مساله در روش‌های بی‌نیاز از شبکه در مقایسه با روش عناصر متناهی را به‌طور خلاصه بیان می‌کنیم [۲۶]. همان‌طوری که در فصل قبل بیان شد، عدم نیاز به تولید شبکه در روش‌های بی‌نیاز از شبکه، تفاوت اصلی بین این روش‌ها و روش عناصر متناهی است. همچنین ساخت توابع شکل در این دو روش متفاوت است. در روش عناصر متناهی، توابع شکل با استفاده از عناصر از پیش تعریف شده ساخته می‌شوند و این توابع برای کلیه‌ی عناصر یکسان هستند. اما در روش‌های بی‌نیاز از شبکه توابع شکل معمولا برای گره‌های دلخواهی، که به‌صورت محلی انتخاب می‌شوند، ساخته می‌شوند و با تغییر نقاط، توابع شکل نیز تغییر می‌کنند.

این روش‌ها در گسسته سازی دستگاه معادلات یکسان عمل می‌کنند، یعنی در هر دو روش از تقریب تابع مجهول برای گسسته سازی دستگاه معادلات استفاده می‌شود. این تقریب در فضایی با بعد متناهی در نظر گرفته می‌شود، بنابراین بسیاری از تکنیک‌هایی که در روش عناصر متناهی استفاده می‌شود را می‌توان برای