بسم اللّه النّور

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

قضیّه‌ی مقدار میانی در آنالیز ساختی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (منطق ریاضی)

زهرا غفوری

استاد راهنما

دکتر مجتبی آقایی

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (منطق ریاضی) خانم زهرا غفوری

تحت عنوان

قضیّه‌ی مقدار میانی در آنالیز ساختی

در تاریخ ۲۱ دی ۱۳۹۰ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر مجتبی آقایی
۲– استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر رسول رمضانیان (دانشگاه صنعتی شریف)
۳– استاد داور ۱	دکتر محمّد اردشیر (دانشگاه صنعتی شریف)
۴– استاد داور ۲	دکتر مجید علیزاده (دانشگاه تهران)

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر اعظم اعتماد

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

فهرست مطالب

چکیده:

در این پایان‌نامه به بررسی برخی از گزاره‌های معتبر کلاسیک، به طور خاص قضیّه‌ی مقدار میانی، در دنیای ساختی می‌پردازیم. در این راستا به اِجمال گونه‌های مختلف ریاضیّات ساختی معرّفی و رابطه‌ی بین آن‌ها بیان می‌گردد. سپس به بحث پیرامون اصول غیرکلاسیکی خواهیم پرداخت که نقش مهمّی در ریاضیّات ساختی بر عهده دارند. علاوه بر این، اصولی که از دیدگاه کلاسیک معتبر امّا در نوع ساختی نیازمند توجیهات مختلف هستند نیز مطرح و نتایج جالب حاصل از حضور این دو نوع اصل در کنار یکدیگر بیان می‌گردد. در ادامه به بررسی رابطه‌ی بین این اصول و قضیّه‌ی مقدار میانی خواهیم پرداخت و با معرّفی مفهوم شاید، صورت شایدی این قضیّه و مباحث جالبی پیرامون آن مطرح می‌گردد. درپایان نقیض دوگانه‌ی قضیّه‌ی مقدار میانی بیان و ارتباط آن با شمای ED و دنباله‌های یکنوای کران‌دار بدون حد بررسی می‌شود.

رده‌بندی موضوعی: ۰۳F۵۵ (۰۳F۶۰)

کلمات کلیدی: ریاضیّات ساختی، ریاضیّات شهودگرایانه، قضیّه‌ی مقدار میانی، شاید، تصمیم‌پذیری

فصل ۱

مقدمه

۱−۱ ریاضیّات ساختی چیست؟

گزاره‌ی ۲۰ در کتاب IX از ۱۳ جلد اصول اقلیدس[۱] به زبانی رایج بیان می‌کند که

تعداد نامتناهی عدد اوّل وجود دارد.

صورت امروزی شده‌ی اثبات اقلیدس به این صورت است که: فرض کنیم تنها تعداد متناهی عدد اوّل وجود دارد، مثلاً $p_۱$، ... و p_n. عدد صحیح $p = p_۱ \times p_۲ \times \ldots \times p_n + ۱$ را در نظر می‌گیریم که بزرگ‌تر از ۲ است. p به عوامل اوّل تجزیه می‌شود (یا حتّی ممکن است خود عددی اوّل باشد). چون $p_۱$، ... و p_n مقسوم‌علیه‌های p نیستند، پس عوامل اوّل p متمایز با هر p_k است که در تناقض با این است که $\{p_۱, \ldots, p_n\}$ مجموعه‌ی تمام اعداد اوّل است و از این تناقض نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌ی اعداد اوّل نامتناهی است.

اگرچه در نگاه اوّل نکته‌ی غیرمعمولی در این اثبات به چشم نمی‌خورد، امّا از دو جنبه می‌تواند مورد نقد واقع شود. اوّل اینکه از یک برهان تناقضی کاملاً غیرضروری استفاده شده است. اگر دقیق بنگریم درمی‌یابیم که این اثبات شامل الگوریتمی است که بر روی هر مجموعه‌ی $\{p_۱, \ldots, p_n\}$ از اعداد اوّل به کار برده می‌شود و ما را قادر به محاسبه‌ی عدد اوّلی متمایز با اعداد اوّل موجود در مجموعه‌ی فوق

[۱] Euclid's Elements

می‌سازد. به عبارت دیگر، استفاده از برهان تناقضی در پاراگراف قبل درون‌مایه‌ی محاسبه‌ای اثبات اقلیدس را پنهان کرده است.

انتقاد دوم وارد بر این اثبات اندکی ظریف‌تر و در رابطه با مفهوم «نامتناهی» است. این اثبات بر مبنای این ایده‌ی منفی است که یک مجموعه نامتناهی است اگر و تنها اگر فرض متناهی بودن آن به تناقض منجر شود. امّا یک نوریزی الگوریتمی از اثبات اقلیدس، همان‌طور که در پاراگراف قبل پیشنهاد شد، نشان می‌دهد که مجموعه‌ی S از اعداد اوّل به معنای مثبت‌تری نامتناهی است: یعنی، اگر با زیرمجموعه‌ی متناهی F از S شروع کنیم، آن‌گاه می‌توان عضوی از S را محاسبه کرد که متمایز با هر عضو F است.

از دیدگاه کلاسیک، تفاوت میان اثبات تناقضی قضیّه‌ی اقلیدس و گونه‌ی الگوریتمی آن، و تمایز بین مفهوم مثبت و منفی «نامتناهی» اگر نادیده گرفته نشود، بسیار مبهم و پنهان است. برای مثال، دو مفهوم «نامتناهی» در منطق کلاسیک معادلند، بنابراین اولیٰ‌تر است که در سطح زیبایی‌شناختی بررسی شود تا در جایگاه ریاضی آن.

انتقاد مشابهی به اثبات توسّط تناقض برای وجود شیء xی با خاصیّت $P(x)$ وارد است. در چنین اثباتی فرض می‌شود که $P(x)$ برای تمام اشیای قابل اِعمال x نادرست است، استنتاجی برای تناقض به دست می‌آید و سپس نتیجه گرفته می‌شود $P(x)$ باید برای xی برقرار باشد، حتّی اگر چنین اثباتی اطّلاعی به دست ندهد که برای کدام x خاصیّت مذکور برقرار است. شایان ذکر است که منطق کلاسیک تفاوتی بین دو گونه‌ی مفهوم وجود یعنی «وجود ایدآل‌گرایانه»[۱] ، نشان داده شده با چنین اثباتی، و «وجود ساختی»[۲] ، که بر مبنای الگوریتمی است که x را می‌سازد و نشان می‌دهد $P(x)$ برقرار است، قایل نمی‌شود.

در ادامه نمونه های دیگری از اثبات‌های غیرساختی بررسی می‌شوند. گزاره‌ی زیر را در نظر بگیرید:

اعداد ناگویای a و b وجود دارند که a^b گویاست.

در ریاضیّات کلاسیک می‌توان چنین استدلال کرد: $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ یا گویاست یا گویا نیست. اگر گویا باشد، a و b را برابر $\sqrt{۲}$ در نظر می‌گیریم و اگر گویا نباشد، فرض کنیم $a=\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ و $b=\sqrt{۲}$، آن‌گاه

$$a^b=\left(\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}\right)^{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}^{۲}=۲$$

که عددی گویاست. توجّه کنید که در هر دو حالت راه حل وجود دارد، امّا کدام یک از این دو حالت برقرار است؟ استدلال فوق در هر دو حالت b را برابر $\sqrt{۲}$ به دست می‌دهد ولی مقدار a را معلوم نمی‌کند و ساختمانی برای a به دست نمی‌دهد.

نمونه‌ی دیگر، برهان کلاسیک لم کونیگ است که بیان می‌کند:

---
[۱] idealistic [۲] constructive

فرض کنیم T درختی نامتناهی است که در هر رأس آن متناهی شاخه می‌روید، در این صورت T شاخه‌ای نامتناهی دارد.

شاخه‌ی نامتناهی $\alpha : \mathbb{N} \to T$ را به صورت استقرایی چنین می‌سازیم: قرار می‌دهیم $\alpha(\circ) := \langle\ \rangle_T$، که بنابر فرض تعداد نامتناهی تالی دارد. حال فرض کنیم $\alpha(n)$ به گونه‌ای ساخته شده است که تعداد نامتناهی تالی دارد. از میان تعداد متناهی تالی بلافصل $t_۱$، ... و t_k از $\alpha(n)$ در درخت T، حدّاقل t_iی وجود دارد که t_i تعداد نامتناهی تالی دارد؛ زیرا در غیر این صورت درخت T نمی‌تواند تعداد نامتناهی رأس داشته باشد. حال قرار می‌دهیم $\alpha(n+۱) := t_i$، و این، همان‌طوری که می‌خواستیم، یک شاخه‌ی نامتناهی درخت T را معیّن می‌کند.

با در نظر گرفتن یک رابطه‌ی ترتیب بر روی رأس‌ها، می‌توان توصیف مشخّص‌تری از α در این اثبات ارائه داد به این صورت که $\alpha(n+۱)$ اوّلین t_iی است که تعداد نامتناهی تالی دارد. امّا به هر حال این ساختمانِ[۱] α ساختی نیست، زیرا روشی به دست نمی‌دهد که با آن بتوان تصمیم گرفت آیا یک دنباله‌ی متناهی در T تعداد نامتناهی تالی دارد یا نه. بنابراین اثبات فوق دستورالعملی برای تولید $\alpha(n)$ برای هر n ارائه نمی‌دهد (در فصل دوم نشان می‌دهیم که LLPO مسیر حرکت برای ساختن هر رأس α را به ما نشان می‌دهد؛ البته LLPO در هر دو رویکرد شهودگرایانه و بازگشتی، که در ادامه معرّفی می‌شوند، رد می‌شود).

دو نمونه‌ی اخیر از برهان‌های غیرساختی نشان می‌دهد که تعبیر ساختی «A یا B» و «$\exists x A(x)$» به «می‌توان بین A و B تصمیم گرفت» و «می‌توان xی ساخت که $A(x)$» با تمام قوانین منطق کلاسیک مطابقت ندارد. به طور خاص «A یا $\neg A$» با تعبیر فوق برقرار نیست: دلیلی وجود ندارد که فرض کنیم برای هر اظهار[۲] A همواره می‌توانیم تصمیم بگیریم که A درست است یا ردشدنی است.

۱ــ۲ گونه‌های مختلف ریاضیّات ساختی

از ابتدای قرن بیستم مواضع مختلفی نسبت به مبانی ریاضیّات ساختی فرمول‌بندی شده است که از آن‌ها به عنوان گونه‌های ساخت‌گرایی یاد می‌شود.

به طور خاص، یک نگاه ساخت‌گرایانه خواستار نوعی صراحت و آشکارسازی اشیای مورد مطالعه در ریاضیّات است، آن‌ها باید به طور ملموس نمایش‌پذیر، یا به طور صریح تعریف‌پذیر، یا به صورت ساختمان‌های ذهنی قابل مشاهده باشند. در ادامه به بررسی پنج نمونه از گونه‌های ساخت‌گرایی پرداخته خواهد شد:

[۱] construction
[۲] assertion

۱–۲–۱ متناهی‌گرایی

در این دیدگاه تأکید بر روی نمایش‌پذیری ملموس[۱] اشیای ریاضیّات است و از تجریدهای بالاتر اجتناب می‌شود. بنابراین توابع خاصی از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ مورد توجّه قرار می‌گیرند و از به کار بردن مفهوم یک تابع دلخواه از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ احتراز می‌شود. به عبارت دیگر می‌توان گفت اصول اصلی متناهی‌گرایی[۲] عبارتند از:

۱) اشیای ریاضیّات تنها ساختارهای[۳] (به طور متناهی) نمایش‌پذیرِ ملموس هستند؛ عمل‌گرها بر روی چنین ساختارهایی باید دارای ماهیّت ترکیبیاتی و لذا کارآمد[۴] باشند.

۲) مفاهیم مجرّد مانند مجموعه (دلخواه)، عمل‌گر، ساختمان و ... جایی در ریاضیّات متناهی‌گرایانه ندارند.

در این مکتب استفاده از منطق محدود می‌شود؛ به خصوص استفاده از سورها در روی دامنه‌های نامتناهی. به جای تمامیّت‌های نامتناهی کامل شده، دامنه‌های نامتناهی به عنوان دامنه‌های متناهی که به صورت نامحدودی قابل گسترش اند در نظر گرفته می‌شود. متناهی‌گرایی نه تنها به عنوان گونه‌ای از ساخت‌گرایی مورد توجّه است، بلکه یک مؤلفه‌ی کلیدی در برنامه‌ی ابتدایی هیلبرت[۵] است: هیلبرت قصد داشت سازگاری نظریّه‌ی مدل‌های ریاضی صوری را با ابزار «متناهی‌گرایانه» محقّق کند، زیرا از نظر وی این‌ها به طور بدیهی موجّه و غیرقابل مناقشه‌اند.

کرونکر[۶] (۱۸۹۱–۱۸۲۳)، که با برخی توجیهات ممکن از او به عنوان اوّلین ساختی‌گرا یاد می‌شود، می‌تواند بیش‌تر به عنوان منادی دیدگاه متناهی‌گرایی در نظر گرفته شود. متناهی‌گرایی به طور ویژه توسّط اسکولم[۷] در مقاله‌اش (۱۹۲۳) و در دو کتاب از گوداشتاین[۸] (۱۹۵۷ و ۱۹۶۱) بیان شد.

۱–۲–۲ محمول‌گرایی

محمول‌گرایی[۹] روی بیان صریح و مشخّصه‌ی غیردوری تعاریف تمرکز می‌کند. در این دیدگاه اعدادطبیعی از قبل داده شده در نظر گرفته می‌شوند؛ امّا مجموعه‌هایی از اعداد طبیعی باید به طور صریح تعریف شوند، و در تعریف یک شیء ریاضی مانند A نباید به تمامیّت اشیایی که A عضوی از آن است ارجاع داده شود. این دیدگاه می‌تواند به عنوان «ساخت‌گرایی نسبت به تعاریف» در نظر گرفته شود. در محمول‌گرایی:

[۱] concrete
[۲] Finitism
[۳] structure
[۴] efffective
[۵] D. Hilbert
[۶] L. Kronecker
[۷] Skolem
[۸] Goodstein
[۹] Predicativism

۱) تعاریف اشیای ریاضی باید محمولی باشند، به عبارت دیگر در تعریف شیء d مجاز نیستیم به مجموعه‌ی D که d عضوی از آن است رجوع کنیم؛ به طور خاص در تعریف d تسویر بر روی D مجاز نیست (پرهیز از «دور باطل»[۱] در تعاریف).

۲) تقاضا برای تعاریف محمولی را سازگار با منطق کلاسیک در نظر می‌گیرند، به عبارت دیگر گزاره‌های ریاضی درست یا غلط فرض شده‌اند — بدون در نظر گرفتن دانش بشری (که این در تضّاد با شهودگرایی است که در ادامه به آن پرداخته خواهد شد).

برای مثال، تعریف کوچک‌ترین کران بالای مجموعه‌ی X از اعداد حقیقی (تعریف شده به عنوان برش‌های (چپ) ددکیند) به‌عنوان اشتراک همه‌ی برش‌های چپی که کران بالا برای X هستند، مجاز شمرده نمی‌شود: کوچک‌ترین کران بالایی خود در میان مجموعه‌ی کران‌های بالایی واقع شده است.

وایل[۲] اوّلین کسی بود که در رساله‌ی خویش (۱۹۱۸) نشان داد بخش‌هایی از آنالیز می‌تواند به صورت محمول‌گرایی گسترش یابد. پوانکاره[۳] و «تجربه‌گرایان»[۴] فرانسوی مانند بورل[۵] به عنوان پیشروان محمول‌گرایی در نظر گرفته می‌شوند، امّا آن‌ها بخش‌هایی از ریاضیّات را به طور محمولی در مسیری نظام‌مند گسترش ندادند.

۱—۲—۳ شهودگرایی (INT)

اگرچه افرادی همچون کرونکر در قرن نوزدهم به طرفداری از دیدگاه ساختی پرداخته‌اند، امّا درواقع داستان ساخت‌گرایی نوین در سال ۱۹۰۷، وقتی که براوئر[۶] از رساله‌ی دکترای خود، «درباره‌ی مبانی ریاضیّات»، در دانشگاه آمستردام دفاع کرد، آغاز شد. بخش‌هایی از این رساله که در آن براوئر به شرح عقاید فلسفی خویش پرداخته بود و مبنای فلسفه‌ی شهودگرایی[۷] محسوب می‌شود، به دلیل «غیرریاضی بودن» مورد قبول استادش واقع نشد و براوئر مجبور به حذف آن بخش‌ها از رساله شد. این بخش‌ها بعدها در منابع مختلفی از جمله در مجموعه‌ی آثارش منتشر شد. اصول فلسفه‌ی شهودگرایی براوئر را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱) ریاضیّات «آفرینش آزاد ذهن» است، مستقل از تجربه؛ به این معنا که ریاضیّات حاصل یک فرآیند پویای مداوم ذهنی مستقل از تجربه به معنای عام است.

---

[۱] vicious circle
[۲] H. Weyl
[۳] Poincaré
[۴] empiricists
[۵] Borel
[۶] L. E. J. Brouwer
[۷] Intuitionism

۲) تنها «شهود پیشینی» در آفرینش آزاد ریاضیّات، حرکت زمان است؛ به عبارت دیگر، تنها شرط پیشینی برای آفرینش آزاد ریاضیّات، زمان و حرکت در زمان است.

۳) اشیای ریاضی «ساختمان‌های ذهنی» هستند. این اشیا وقتی و فقط وقتی به منصه‌ی «وجود» درمی‌آیند که «ساخته» شوند و با همین تعبیر است که در نظر شهودگرایان، یک شیء ریاضی تنها زمانی «وجود دارد» که «ساخته شود».

۴) دامنه‌ی وجود اشیای ریاضی ثابت نیست. در حقیقت، از آنجا که تلقّی شهودگرایان از «وجود» همان «ساختن» است، در طول زمان اشیای جدیدی ساخته می‌شوند و «دامنه‌ی وجود» گسترده‌تر می‌شود.

۵) مفهوم «ساختمان» تعریف نشده است، یعنی علی‌رغم اینکه مفهوم «وجود» در ریاضیّات شهودگرایانه به مفهوم «ساختمان» و «ساختن» احاله می‌شود، خود مفهوم «ساختن» تعریف نمی‌شود.

٦) یک حکم ریاضی راست است اگر برهانی برای آن وجود داشته باشد، و غلط است اگر فرض برهان داشتن آن به تناقض برسد. در حقیقت در شهودگرایی «راستی» و «برهان داشتن» یکی گرفته می‌شود.

۷) «ساختی بودن» برهان با دیدن آن تأیید یا رد می‌شود.

۸) ریاضیّات بدون «زبان» است. «زبان» در آفرینش آزاد ریاضیّات امری ثانوی است و تنها برای ارتباط متقابل ریاضی‌دانان است.

۹) ریاضیّات مستقل از منطق است.

۱۰) منطق یکی از کاربردهای ریاضیّات است.

اگر به مثال مربوط به $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$، مطرح شده در بخش اوّل، بازگردیم می‌بینیم که شهودگرایی نمی‌تواند همه‌ی ریاضیّات کلاسیک را بپذیرد؛ در واقع، از بعضی جنبه‌ها شهودگرایی ریاضیّات کلاسیک را محدود می‌کند، در حالی که از جنبه‌های دیگری آن را توسعه می‌دهد. جنبه‌ی محدود کننده از زمان دفاع براوئر از رساله‌ی دکترای خویش آشکار بود. جنبه‌ی دوم تنها در سال‌های ۱۹۱۷–۱۹۱٦ آشکار شد، وقتی که براوئر نوع جدیدی از اشیای ریاضی را معرّفی کرد، یعنی دنباله‌های انتخاب را، و نیز شکلی از آنالیز ریاضی را توسعه داد که حدّاقل به اندازه‌ی آنالیز کلاسیک غنی است. لازم به ذکر است که یک دنباله‌ی انتخاب دنباله‌ای بالقوّه نامتناهی از اشیای ریاضی است که ذهن آفریننده یکی بعد از دیگری انتخاب می‌کند. این دنباله هرگز پایان نمی‌پذیرد و ممکن است تحت شرایط مختلف فرق کند. از آنجا که دنباله‌های انتخاب در

ریاضیّات کلاسیک هویّاتی پذیرفتنی نیستند، عجیب نیست که در نظریه‌ی اعداد حقیقی نتایجی یافت شود که از نظر شهودگرایی راست‌اند ولی از منظر ریاضیّات کلاسیک غلط‌اند. پس ریاضیّات شهودگرایانه اقدامی عمیقاً تجدیدنظرطلبانه است.

۱—۲—۴ ریاضیّات بازگشتی ساختی (CRM)

حدود ۱۹۴۹—۱۹۴۸ در اتّحاد جماهیر شوروی سابق، مارکوف[۱] برنامه‌ی ریاضیّات بازگشتی ساختی[۲] (**CRM**) را آغاز کرد، ریاضیّاتی که از منطق شهودی استفاده می‌کند و بر مبنای فرضیّه‌ی چرچ—تورینگ—مارکوف استوار است که می‌گوید: تمام توابع جزیی محاسبه‌پذیر[۳] از مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ از اعداد طبیعی به خودش بازگشتی هستند. اصول این دیدگاه عبارتند از:

۱) اشیای ریاضیّات ساختی اشیایی ساختی هستند، به طور ملموس: کلماتی در الفباهای گوناگون.

۲) یک تجرید وجود بالقوّه[۴] (تحقّق‌پذیری بالقوّه) پذیرفتنی است، امّا تجرید بی‌نهایت بالفعل[۵] اجازه داده نمی‌شود. تحقّق‌پذیری بالقوّه یعنی، برای مثال، می‌توان جمع را به عنوان یک عمل‌گر خوش‌تعریف در نظر گرفت، چون می‌دانیم چگونه آن را برای اعداد به اندازه‌ی دلخواه بزرگ حساب کنیم. این پذیرفتنی بودن راه را برای پذیرش «اصل مارکوف» هموار ساخته است: اگر توقّف نکردن یک محاسبه‌ی الگوریتمی غیرممکن باشد، در حقیقت توقّف می‌کند. ردّ بی‌نهایت بالفعل به مثابه‌ی ردّ منطق کلاسیک است.

۳) مفهوم دقیق الگوریتم به عنوان یک مبنا در نظر گرفته می‌شود (مارکوف مفهوم «مارکوف—الگوریتم»[۶] خودش را برای آن انتخاب کرد). چون مارکوف—الگوریتم‌ها توسّط کلماتی در الفباهای مناسب کد شده‌اند، آن‌ها اشیای **CRM** هستند. به طور عکس، هر کلمه در الفبایی معیّن می‌تواند به عنوان مارکوف—الگوریتم تعبیر شود.

۴) گزاره‌های ترکیبی منطقی باید به نحوی تعبیر شوند که نکات پیشین درمورد آن‌ها به حساب آورده شود.

اصل مارکوف در **INT** و **BCM** (که در قسمت بعد معرّفی خواهد شد) برقرار نیست.

[۱] A. A. Markov
[۲] Constructive Recursive Mathematics
[۳] computable partial functions
[۴] potential
[۵] actual
[۶] Markov-algorithm

۱–۲–۵ ریاضیّات ساختی بی‌شاپ (BCM)

این دیدگاه به طور عمده در کتاب «مبانی آنالیز ساختی»[۱] بی‌شاپ[۲] بیان شده است. در این مکتب گفت‌وگوهای اندکی درمورد اصول فلسفی وجود دارد و تأکید بیش‌تر بر روی عمل‌کرد ریاضیّات ساختی است نه فلسفه‌ی آن‌ها.

۱) عبارت کلیدی این است که «احکام ریاضی باید معنای عددی داشته باشند». یعنی، به طور خاص، احکام وجودی باید به طور صریح بیان شوند (و همچنین در اظهار $A \vee B$، انتخاب بین A یا B باید علی‌الاصول ممکن باشد): نشان دادن وجود یک شیء فقط با دادن دستورالعملی متناهی برای یافتن آن ممکن است.

۲) در BCM چنین فرض نمی‌شود که تمام اشیای ریاضی باید به صورت الگوریتم (در مفهوم دقیق ریاضی آن از نظریّه‌ی توابع بازگشتی) داده شود. دنباله‌های انتخاب به عنوان اشیای قانونی پذیرفته شده نیستند. بی‌شاپ در پذیرفتن مفاهیم مجرّد مانند «قواعد» یا «عمل‌گر» تردیدی نداشت.

در BCM هیچ موضع معیّنی نسبت به پذیرفتنی بودن تعاریف غیرمحمولی اتّخاذ نمی‌شود؛ در عمل، مفاهیم استقرایی تعمیم‌یافته پذیرفته شده هستند.

۱–۳ مقایسه‌ی BCM، CRM و INT

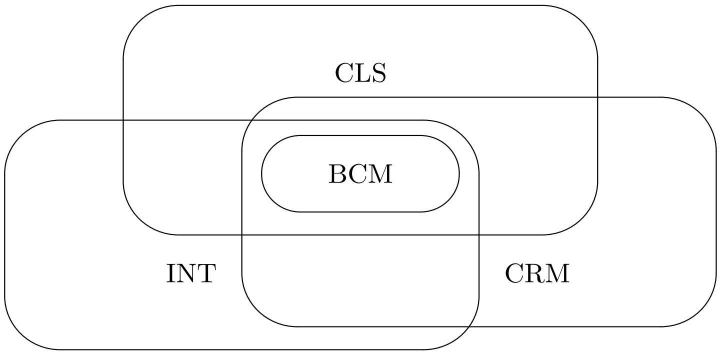
دراین بخش به طور مختصر سه گونه‌ی ریاضیّات ساختی INT، CRM و BCM با یکدیگر و با CLS مقایسه خواهند شد.

BCM با CLS، ریاضیّاتی که امروزه توسّط بیش‌تر ریاضی‌دانان به کار برده می‌شود، سازگار است. هر گزاره‌ی P در BCM دارای یک تعبیر آنی در CLS است و یک اثبات P در BCM یک اثبات P در CLS نیز است. البته این مطلب درمورد دو گونه‌ی دیگر INT و CRM درست نیست. به عنوان مثال، در هر دوی آن‌ها اثبات می‌شود که هر تابع با مقادیر حقیقی بر روی بازه‌ی $[۰,۱]$ پیوسته‌ی نقطه‌وار است.

از سوی دیگر هر اثبات گزاره‌ی P در BCM یک اثبات P در INT و CRM نیز می‌باشد. در واقع، دو گونه‌ی اخیر را می‌توان به عنوان گسترشی از BCM در نظر گرفت. CRM با افزودن صورتی از فرضیّه‌ی چرچ، که می‌گوید تمام دنباله‌های اعداد طبیعی بازگشتی‌اند، به BCM حاصل می شود، و INT نیز با افزودن دو اصل پیوستگی و بادبزن به BCM به دست می‌آید؛ البته از نقطه نظر فلسفی در هر دو مورد به اصولی بیش از این نیاز است.

[۱] Foundations of constructive analysis [۲] E. Bishop

در ادامه رابطه‌ی صوری بین **INT**، **CRM**، **BCM** و **CLS** در حوزه‌ی آنالیز ریاضی به تصویر کشیده شده است:



مثال‌های زیر غیرتهی بودن نواحی نشان داده شده را نشان می‌دهد:

۱) $\mathbf{CLS} \setminus (\mathbf{INT} \cap \mathbf{CRM})$: توابع روی $[۰, ۱]$ پیوسته‌اند؛

۲) $\mathbf{INT} \setminus (\mathbf{CRM} \cap \mathbf{CLS})$: برای اعداد حقیقی x و y، اگر $x \neq y$، آن گاه $x\#y$؛

۳) $\mathbf{CRM} \setminus (\mathbf{INT} \cap \mathbf{CLS})$: توابع پیوسته روی $[۰, ۱]$ پیوسته‌ی یکنواخت هستند، نتیجه‌ای از فشردگی $[۰, ۱]$؛

۴) $(\mathbf{CRM} \cup \mathbf{CLS}) \setminus \mathbf{INT}$: تمام توابع روی $[۰, ۱]$ پیوسته‌ی یکنواخت هستند (ترکیبی از ۱ و ۳)؛

۵) $(\mathbf{CRM} \cup \mathbf{INT}) \setminus \mathbf{CLS}$: تصمیم‌پذیری تساوی بین اعداد حقیقی؛

۶) $(\mathbf{INT} \cup \mathbf{CLS}) \setminus \mathbf{CRM}$: وجود دنباله‌های اسپکر قوی، فشرده نبودن $[۰, ۱]$ و وجود توابع پیوسته، امّا نه پیوسته‌ی یکنواخت، بی‌کران روی $[۰, ۱]$ را نتیجه می‌دهد.

توجّه کنید که چون نتایج ریاضی **BCM**، **CRM** و **INT** را می‌توان در یک زبان مشترک بیان کرد، تصویر نشان داده شده ممکن است. با این وجود این تصویر تنها بیان‌گر یک رابطه‌ی صوری است. اعداد حقیقی تعابیر متفاوتی در **CLS**، **INT** و **CRM** دارند، و در واقع شکل می‌گوید که اگر به اشیای ریاضی تعابیر مناسب متناظرشان در هر گونه‌ی ساخت‌گرایی داده شود، چگونه نتایج تغییر می‌کنند.

۱—۴ گذری بر فصل‌های پایان‌نامه

در این پایان‌نامه ابتدا در فصل اوّل، باتوجّه به آنچه مشاهده کردید، به معرّفی ریاضیّات ساختی و مروری اِجمالی بر گونه‌های مختلف آن پرداخته شد؛ [۱]، [۷]، [۸]، [۱۷] و [۱۸].

در فصل دوم به بیان برخی از اصول غیرکلاسیک پرداخته خواهد شد (مانند فرضیّه‌ی چرچ و اصل پیوستگی برای دنباله‌های انتخاب). سپس اصولی معرّفی می‌شوند که از دیدگاه کلاسیک معتبرند امّا تعبیر ساختی آن‌ها نیازمند توجیهات متفاوتی است (مانند اصل انتخاب شمارش‌پذیر، اصل مارکوف و شمای کریپکی). در ادامه نیز نتایج جالبی از ترکیب این اصول بیان خواهد شد. در بخش آخر اصول همه‌دانی معرّفی و به طور ویژه روابط بین این اصول و برخی از احکام شناخته‌شده‌ی ریاضیّات ساختی بیان می‌گردد؛ [۱]، [۳]، [۶]، [۷]، [۸]، [۱۳]، [۱۵] و [۱۸].

در فصل سوّم به معرّفی اعداد حقیقی از رویکرد ساخت‌گرایانه توسّط دنباله‌های بنیادی پرداخته خواهد شد. سپس برخی از ویژگی‌های کلاسیک شناخته‌شده‌ی اعداد حقیقی در این دیدگاه بررسی می‌شود؛ [۱] و [۱۸].

به منظور برقراری ارتباط بیش‌تر با ریاضیّات ساختی، در فصل چهارم به بیان نمونه‌هایی از آنالیز ساختی مانند قضیّه‌ی مقدار میانی و ... پرداخته می‌شود. در ادامه نتایجی از اصل پیوستگی ضعیف، قضیّه‌ی بادبزن و شمای کریپکی بیان می‌شوند و در آخر نیز نمونه‌هایی از آنالیز در **CRM** بررسی خواهد شد (نتایجی که بیش‌تر ناشی از فشرده نبودن $[0,1]$ تحت فرض CT_0 است)؛ [۱]، [۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲] و [۱۸].

در فصل پنجم مجموعه‌ی $\mathcal{F}$ از تمام توابع پیوسته‌ی ϕ از $[0,1]$ به $\mathbb{R}$ معرّفی می‌شود که $\phi(0)=0$ و $\phi(1)=1$. $\mathcal{I}_0$ مجموعه‌ی تمام توابع ϕ در $\mathcal{F}$ است که برای آن‌ها xی در $[0,1]$ یافت می‌شود که $\phi(x)=\frac{1}{2}$. وجود توابعی در $\mathcal{F}$ که عضویّت آن‌ها در $\mathcal{I}_0$ قابل اثبات نیست، مسئله‌ای کاملاً شناخته‌شده است. در حضور اصل پیوستگی براوئر فرض $\mathcal{F}=\mathcal{I}_0$ به تناقض منجر می‌شود، یعنی $\mathcal{F}\neq\mathcal{I}_0$. درواقع $\mathcal{F}=\mathcal{I}_0$ معادل با اصل غیر کلاسیک LLPO است که با فرض اصل پیوستگی براوئر رد می‌شود. در این فصل نشان داده می‌شود که با استفاده از اصل پیوستگی براوئر می‌توان تعداد ناشمارا زیرمجموعه‌ی $\mathcal{G}$ از $\mathcal{F}$ با خاصیّت $\mathcal{I}_0\subseteq\mathcal{G}\subset\mathcal{I}_0^{\neg\neg}$ تولید کرد ($\mathcal{I}_0^{\neg\neg}$ مکمّل مکمّل $\mathcal{I}_0$ در $\mathcal{F}$ است)، که برای این منظور ولدمَن به معرّفی رده‌های خاصّی از توابع پرداخته است؛ [۱۹]، [۲۰] و [۲۱]. در این راستا برای روشن شدن بحث و درک عمیق‌تری از موضوع به رسم رده‌های مختلف این توابع پرداخته‌ایم و الگوریتمی برای تولید و رسم آن‌ها ارائه کرده‌ایم.

و در آخرین فصل به بررسی سؤال $\mathcal{F}\stackrel{?}{=}\mathcal{I}_0^{\neg\neg}$ پرداخته می‌شود و این سؤال به شمای ED درباره‌ی تصمیم‌پذیری شهودی تقلیل داده می‌شود. این شما بیان می‌کند که یک مجموعه‌ی شمارش‌پذیر شهودی وجود دارد که تصمیم‌پذیر شهودی نیست. همچنین در ادامه مفهوم دنباله‌های دوگانه‌ی اسپکر قوی معرّفی و ثابت می‌شود که وجود چنین دنباله‌ی دوگانه‌ای معادل با وجود تابع ϕ در $\mathcal{F}_{mon}$ است که $\neg\exists x\in[0,1](\phi(x)=\frac{1}{2})$، یعنی $(\mathcal{I}_0)_{mon}^{\neg\neg}\subsetneq\mathcal{F}_{mon}$؛ [۲]، [۳] و [۲۰].

فصل ۲

اصول غیرکلاسیک

دراین فصل به بحث درمورد اصولی پرداخته می‌شود که نقش مهمّی در گونه‌های مختلف ریاضیّات ساختی بر عهده دارند. از میان این اصول آن‌هایی که با منطق کلاسیک ناسازگارند جذّاب‌تر به نظر می‌رسند؛ مانند فرضیّه‌ی چرچ که بیان می‌کند «تمام عمل‌گرها در ریاضیّات الگوریتمی هستند» (متناظر با **CRM**) و اصل پیوستگی براوئر برای دنباله‌های انتخاب که از پذیرش دنباله‌های از پیش تعیین‌نشده به عنوان اشیایی قانونی ناشی می‌شود.

علاوه بر این اصول غیرکلاسیک، اصول دیگری نیز وجود دارد که در روایتی کلاسیک از عمل‌گرهای منطقی معتبرند، امّا در نوع ساختی نیازمند توجیهات متفاوتی هستند و در ترکیب با اصول غیرکلاسیک اشاره‌شده در بالا، به لحاظ ریاضی بسیار جذّاب می‌شوند. مانند اصل انتخاب شمارش‌پذیر، اصل مارکوف، شمای کریپکی و ...، و در بخش آخر نیز به معرّفی اصول همه‌دانی و ارتباط آن‌ها با دیگر مفاهیم شناخته‌شده پرداخته خواهد شد.

در این راستا ابتدا به معرّفی چند اصل و یک لم می پردازیم:

$$A \vee \neg A, \tag{PEM}$$

$$\forall\alpha(\forall x(\alpha(x) = 0) \vee \neg\forall x(\alpha(x) = 0)), \tag{$\forall - \mathrm{PEM}$}$$

$$\forall\alpha(\exists x(\alpha(x) = 0) \vee \neg\exists x(\alpha(x) = 0)). \tag{$\exists - \mathrm{PEM}$}$$

که $\forall - \mathrm{PEM}$ معادل است با

$$\forall\alpha(\forall x(\alpha(x) \neq 0) \vee \neg\forall x(\alpha(x) \neq 0));$$

زیرا برای αای دلخواه، دنباله‌ی α' را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\alpha'(x) = \begin{cases} 1 & \alpha(x) = 0, \\ 0 & \alpha(x) = 1. \end{cases}$$

طبق $\forall - \mathrm{PEM}$ داریم $\forall x(\alpha'(x) = 0) \vee \neg\forall x(\alpha'(x) = 0)$ و باتوجّه به تعریف دنباله‌ی α'، $\forall x(\alpha(x) \neq 0) \vee \neg\forall x(\alpha(x) \neq 0)$، لذا $\forall\alpha(\forall x(\alpha(x) \neq 0) \vee \neg\forall x(\alpha(x) \neq 0))$.

همچنین می‌توان ثابت کرد $\vdash \exists - \mathrm{PEM} \to \forall - \mathrm{PEM}$، بنابراین $\vdash \neg\forall - \mathrm{PEM} \to \neg\exists - \mathrm{PEM}$.

لم ۱.۲ $\vdash \neg\forall - \mathrm{PEM} \to \neg\forall \mathrm{P}(\neg\mathrm{P} \vee \neg\neg\mathrm{P})$.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $\vdash \forall P(\neg P \vee \neg\neg P) \to \forall - \mathrm{PEM}$. برای این منظور فرض کنیم برای هر گزاره‌ی P داریم $\neg P \vee \neg\neg P$، پس $\forall\alpha(\neg P(\alpha) \vee \neg\neg P(\alpha))$. حال قرار می‌دهیم $P(\alpha) := \exists x(\alpha(x) \neq 0)$، پس

$$\forall\alpha(\neg\exists x(\alpha(x) \neq 0) \vee \neg\neg\exists x(\alpha(x) \neq 0))$$

و به طور معادل

$$\forall\alpha(\forall x(\alpha(x) = 0) \vee \neg\forall x(\alpha(x) = 0)),$$

که همان $\forall - \mathrm{PEM}$ می‌باشد. بنابراین $\vdash \neg\forall - \mathrm{PEM} \to \neg\forall \mathrm{P}(\neg\mathrm{P} \vee \neg\neg\mathrm{P})$. ■

۲—۱ اصول انتخاب شمارش‌پذیر

صورت‌های مختلفی از اصل انتخاب در نوشتارگان منطقی وجود دارد. در اینجا ابتدا **اصل انتخاب کامل**[1] بیان خواهد شد:

> اگر S زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ باشد و برای هر x در A عضو yی در B وجود داشته باشد که $(x, y) \in S$، آن‌گاه تابع f از A به B وجود دارد که برای هر x در A داریم $(x, f(x)) \in S$.

[1] the full axiom of choice