بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

الگوریتم‌های عددی برای حل مسائل مقدار ویژه با اندازه بزرگ

پژوهشگر

نسیبه کریمی شهرکی

استاد راهنما

دکتر رضا خوش‌سیر

استادان مشاور

دکتر علیرضا انصاری و دکتر محمد شفیع دهاقین

مرداد ۱۳۹۱

تقدیم به:

اولین معلم ریاضی دیروزم: **پدر**؛

آخرین معلم ریاضی امروزم: استاد ارجمند جناب آقای **دکتر رضا خوش سیر**

و

مهربان ترین معلم همیشه زندگیم: **مادر**

سپاس گزاری...

منت خدای را که خرد از بیان شأنش قاصر و قلم از توان وصفش عاجز است، اوست که بر خلقت مکان قامت افراشت و آسمان و زمین را آفرید، آنگاه به شراب عشق ضمیر جان را سرشت و به تأدیب او همت گماشت تا بدین نشان از بهایم تمایز یابد.

وظیفه خود می دانم از جناب آقای دکتر رضا خوش سیر که با راهنمایی های ارزنده شان مرا در به سامان رساندن این پایان نامه یاری کردند، تشکر کنم، بی شک بدون هدایت ایشان انجام این کار برایم مقدور نبود. از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر علیرضا انصاری و جناب آقای دکتر محمد شفیع دهاقین که به عنوان اساتید مشاور زحمات زیادی متحمل شدند، سپاسگزارم.

همچنین از جناب آقای دکتر مهدی قاسمی و جناب آقای دکتر محمدرضا احمدی که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند، صمیمانه تشکر می کنم.

در پایان از پدر و مادر عزیزم به خاطر بردباریشان سپاسگزارم.

نسیبه کریمی شهرکی

مرداد ۱۳۹۱

چکیده

این پایان‌نامه، به بررسی تعدادی از روش‌های موجود برای حل مسائل مقادیر ویژه با اندازه بزرگ می‌پردازد و در چهار فصل تدوین شده است. در فصل اول به مفاهیم و قضایای اولیه و پایه‌ای که در فصول بعد مورد نیاز هستند، پرداخته می‌شود. در فصل دوم تعدادی از روش‌های کلاسیک موجود برای به دست آوردن مقادیر ویژه مطرح خواهد شد. در فصل سوم ابتدا روش‌های تکراری مبتنی بر زیرفضای کرایلوف را بررسی می‌کنیم. روش آرنولدی مهمترین روشی است که برای حل مسائل مقادیر ویژه با اندازه بزرگ برای ماتریس‌های نامتقارن به کار می‌رود و در این فصل به آن پرداخته می‌شود. سپس برای رسیدن به جواب بهتر، فرآیندهای شروع مجدد روش آرنولدی مطرح می‌شوند. در فرآیندهای شروع مجدد، دقیق‌تر شدن مقدار ویژه، وابسته به بهتر شدن بردار اولیه‌ای است که در آغاز روش از آن استفاده می‌شود. روش‌های شروع مجددی که در فصل سوم مطرح می‌شوند هر کدام در جهت بهبود بخشیدن به بردار اولیه هستند. در فصل چهارم روش‌های مطرح شده در فصل‌های دوم و سوم را به طور عددی بررسی و به مقایسه‌ی آن‌ها می‌پردازیم.

کلمات کلیدی : مقادیر ویژه، روش‌های تکراری، روش آرنولدی، فرآیندهای شروع مجدد.

فهرست مطالب

مقدمه

مسئله مقادیر ویژه یکی از مهمترین و اساسی‌ترین موضوعات جبرخطی عددی است و قدمت آن به اوایل قرن نوزدهم بر می‌گردد. مسائل مقادیر ویژه از مسائل بسیار مهم عملی هستند و کاربردهای متنوعی در مهندسی، آمار، اقتصاد، شیمی و فیزیک دارند. هم‌چنین این مسئله در بخش‌های مختلف ریاضی نظیر آنالیز، معادلات دیفرانسیل، سیستم‌های دینامیکی و ... بسیار حائز اهمیت است. در سیستم‌های دینامیکی [۱] و سیستم‌های سخت [۲] (معادلات دیفرانسیل معمولی)، از مقادیر ویژه برای تعیین پایداری سیستم استفاده می‌شود. مثلاً در سیستم‌های دینامیکی گسسته، اگر $|\lambda_i| < 1$ باشد، سیستم پایدار و در غیر این صورت سیستم ناپایدار است. هم‌چنین در یک سیستم دینامیکی پیوسته اگر قسمت حقیقی تمام مقادیر ویژه منفی باشد، سیستم پایدار و در صورت وجود حتی یک مقدار ویژه با قسمت حقیقی مثبت، سیستم دینامیکی پیوسته ناپایدار می‌باشد.

یک نمونه از کاربرد مسئله مقادیر ویژه در فیزیک، معادله شرودینگر است. معادله شرودینگر، معادله‌ای است که چگونگی تغییر حالت کوانتومی یک سامانه فیزیکی با زمان را توصیف می‌کند. این معادله در اواخر سال ۱۹۲۵ فرمول‌بندی و در سال ۱۹۲۶ توسط فیزیکدان اتریشی، اروین شرودینگر مطرح شد. این معادله از لحاظ ریاضی به فرمول‌بندی دیگری مانند مکانیک ماتریسی ورنر هایزنبرگ تبدیل شده است. معادله مستقل از زمان شرودینگر به صورت زیر است:

$$\widehat{H}\psi = \psi E.$$

این حالت، حالت‌های پایا را توصیف می‌کند. این معادله در جبرخطی یک معادله مقدار ویژه است که در آن E همان مقدار ویژه و ψ بردار ویژه است.

مقادیر ویژه یک ماتریس صفرهای چندجمله‌ای مشخصه $\det(A - \lambda I)$ هستند. برای محاسبه مقادیر ویژه ماتریس A، ابتدا می‌توان چندجمله‌ای مشخصه آن را به دست آورد و سپس صفرهای چندجمله‌ای مشخصه را، با یک روش استاندارد محاسبه کرد. ولی متأسفانه این روش از لحاظ عددی پایدار نیست.

منابع زیادی وجود دارد که در آن‌ها روش‌های متفاوتی برای حل مسائل مقادیر ویژه مطرح شده است. ویلکینسون [۲۷] در سال ۱۹۶۵ نتایج مهمی از جبر ماتریسی و مسائل مقادیر ویژه مطرح کرده است. با وجود این که کارهای زیادی برای حل مسائل مقادیر ویژه انجام شده است، اما هنوز الگوریتمی کارا برای به

[۱] Dynamical system
[۲] Stiff system

دست آوردن جفت‌های ویژه که برای همه ماتریس‌ها قابل کاربرد باشد وجود ندارد.
حل مسائل مقادیر ویژه با اندازه بزرگ، مسئله‌ای است که امروزه بسیار مورد توجه بوده است. زمینه‌های کاربردی نظیر دستگاه‌های نیرو، علوم فضایی، شیمی، فیزیک کوانتومی و مطالعات هسته‌ای وجود دارند که در آن‌ها معمولاً مسائل ویژه برای ماتریس‌های از مرتبه بسیار بزرگ پیدا می‌شوند. بیشتر مسائل بزرگی که در این زمینه‌ها مطرح می‌شوند، خلوت هستند. اخیراً این مسائل برای ماتریس‌های بزرگ نامتقارن مطرح شده و پیشرفت‌های قابل توجه‌ای در این راستا انجام گرفته است و هنوز تحقیقات زیادی در این جهت انجام می‌شود. روش‌های تکراری، روش‌هایی برای به دست آوردن جفت‌های ویژه هستند که روش توانی، روش تکرار معکوس، روش تکرار زیرفضایی، روش آرنولدی [۱۰] و روش لانکسوز از جمله این روش‌ها می‌باشند. روش تکرار زیرفضایی ابتدا توسط بوئر [۳] مطرح شده است. آرنولدی [۴] روش مهمی را تحت عنوان روش آرنولدی در سال ۱۹۵۱ مطرح و در سال ۱۹۵۷ آن را بهبود بخشیده است. روش لانکسوز نیز ابتدا در سال ۱۹۵۰ توسط لانکسوز [۵] مطرح گردیده است. این روش بیشتر برای ماتریس‌های متقارن استفاده می‌شود [۳]. روش ژاکوب-دیویدسن نیز، روشی برای حل مسائل مقادیر ویژه ماتریس‌های متقارن است که پایه آن، روش قدیمی ژاکوبی می‌باشد [۲۱]. سورنسن [۲۴] چندین الگوریتم عددی برای به دست آوردن مقادیر ویژه ماتریس‌های با مقیاس بزرگ مطرح و بررسی کرده است. این الگوریتم‌ها توسط پارلت [۱۴] برای ماتریس‌های متقارن ارایه شده است. سعد نیز به بررسی مسئله مقادیر ویژه برای ماتریس‌های نامتقارن پرداخته است. سورنسن، هم‌چنین فرآیندی با عنوان شروع مجدد، برای رسیدن به نتیجه مطلوب‌تر برای روش آرنولدی مطرح کرده است. صابری نجفی و خالقی [۲۰] نیز الگوریتم جدیدی برای یافتن مقادیر ویژه ارایه و صابری نجفی و قزوینی [۶] آن را بهبود بخشیده‌اند.

[۳] Bauer
[۴] Arnoldi
[۵] Lanczos

فهرست نمادها

فصل ۱

مقدمه‌ای بر انواع ماتریس، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

۱.۱ مقدمه

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه‌ای از اعضای یک میدان را که به صورت سطر و ستون مشخص مرتب می‌شوند، ماتریس می‌گوییم. اگر m سطر و n ستون داشته باشیم، ماتریس را $m \times n$گوییم و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

مهمترین مبحثی که در مورد ماتریس‌ها مطرح می‌شود، محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه است که در این مطالعه به این مبحث برای ماتریس‌های با مقیاس بزرگ می‌پردازیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم A ماتریس $n \times n$ باشد. اگر بردار ناصفر مانند x وجود داشته باشد به قسمی که $Ax = \lambda x$ یا $(A - \lambda I)x = ۰$، آن‌گاه λ را مقدار ویژه ماتریس A متناظر با بردار x نامند. بردار x، بردار ویژه راست A، وابسته به مقدار ویژه λنامیده می‌شود. زوج مرتب (λ, x) را یک زوج ویژه ماتریس A گویند. اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد آن‌گاه ریشه‌های معادله $\det(A - \lambda I) = ۰$ مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند. معادله $\det(A - \lambda I) = ۰$ را معادله مشخصه ماتریس A گویند. هم‌چنین اگر برای بردار y داشته باشیم $y^t A = \lambda y^t$، آن‌گاه y را یک بردار ویژه چپ ماتریس A، وابسته به مقدار ویژه λ نامند.

تعریف ۳.۱.۱. اگر $\lambda_۱$، بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس A از نظر قدر مطلق باشد آن را مقدار ویژه غالب می‌نامیم و بردار ویژه $q_۱$، متناظر با $\lambda_۱$ را بردار ویژه غالب نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. حداکثر تعداد ستون‌ها یا سطرهای مستقل خطی یک ماتریس را رتبه ماتریس گوییم.
ماتریس مربعی A را معکوس‌پذیر گوییم، هرگاه تمام سطرها یا ستون‌های آن مستقل خطی باشند، یا اصطلاحاً

ماتریس A رتبه تمام [۱] باشد.

تعریف ۵.۱.۱. مجموعه تمام مقادیر ویژه ماتریس A را طیف [۲] A گویند و مجموعه

$$L(\lambda) = \{x|(A - \lambda I)x = \circ\},$$

یک زیرفضای خطی از $\mathbb{C}^n$ با بعد $q(\lambda) = n - \text{rank}(A - \lambda I)$ می‌باشد. وقتی که $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه باشد آن‌گاه $\rho(\lambda) > \circ$، یعنی ماتریس $(A - \lambda I)$ منفرد است.

تعریف ۶.۱.۱. ترانهاده [۳] ماتریس $n \times m$، A که با A^t نشان داده می‌شود، ماتریسی $m \times n$ است که درایه‌های آن به صورت زیر هستند:

$$(A^t)_{ij} = (A)_{ji}.$$

تعریف ۷.۱.۱. مزدوج مختلط [۴] ماتریس مختلط A، ماتریسی است که هر درایه آن، مزدوج مختلط متناظر با درایه‌های ماتریس A است و با $\overline{A}$ نشان داده می‌شود.
مزدوج مختلط ماتریس حقیقی A با خودش برابر است، یعنی:

$$A = \overline{A}.$$

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم A ماتریسی $n \times m$ باشد. مزدوج ترانهاده [۵] ماتریس A را که با A^* نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A^* = \overline{A^t} = \overline{A}^t.$$

تعریف ۹.۱.۱. اگر A یک ماتریس $n \times m$ باشد، ماتریس A یک ماتریس مربعی [۶] نامیده می‌شود هرگاه $n = m$ باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر ماتریس A که از مرتبه $n \times n$ است، کمتر از n بردار ویژه مستقل خطی داشته باشد یک ماتریس رتبه ناقص نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. ماتریس A را خلوت [۷] گویند هرگاه اکثر مؤلفه‌های آن صفر باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. ماتریس A را پر [۸] گویند هرگاه اکثر مؤلفه‌های آن ناصفر باشد.

[۱] Full rank
[۲] Spectrum
[۳] Transpose
[۴] Complex conjugate
[۵] Transpose conjugate
[۶] Squar matrix
[۷] Sparse
[۸] Full

تعریف ۱.۱.۱۳. یک ماتریس مربعی $A = [a_{ij}]_{n\times n}$، بالا مثلثی [۹] است اگر $a_{ij} = 0$ به ازای $i > j$.
ترانهاده یک ماتریس بالا مثلثی، پایین مثلثی [۱۰] است، یعنی $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ پایین مثلثی است اگر $a_{ij} = 0$ به ازای $i < j$ و ترانهاده یک ماتریس پایین مثلثی، بالا مثلثی است.
ماتریس قطری [۱۱] A، ماتریسی است که هم بالا مثلثی و هم پایین مثلثی باشد، یعنی درایه‌های ناصفر فقط روی قطرهستند.

تعریف ۱.۱.۱۴. ماتریس A را قطری شدنی گویند هرگاه ماتریس نامنفردی چون P یافت شود به قسمی که $P^{-1}AP$ یک ماتریس قطری باشد.

تعریف ۱.۱.۱۵. ماتریس A را متقارن [۱۲] گوییم هرگاه ترانهاده آن با خودش برابر باشد، یعنی:

$$A^t = A.$$

تعریف ۱.۱.۱۶. ماتریس مربعی A را هرمیتی [۱۳] گوییم هرگاه مزدوج ترانهاده آن، با خودش برابر باشد، یعنی:

$$A^* = A.$$

تعریف ۱.۱.۱۷. ماتریس مربعی H را بالا هسنبرگی [۱۴] گوییم اگر برای $i > j + 1$، $h_{ij} = 0$ باشد، یعنی H به صورت زیر می‌باشد.

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \cdots & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \cdots & \cdots & h_{2n} \\ 0 & h_{32} & h_{33} & \cdots & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & 0 & h_{43} & \cdots & \cdots & h_{4n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 0 & & h_{n-1,n-2} & h_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix}.$$

تعریف ۱.۱.۱۸. ماتریس مربعی A را سه‌قطری [۱۵] نامیم هرگاه:

$$a_{ij} = 0, \quad | i - j | > 1.$$

[۹] Upper triangular
[۱۰] Lower triangular
[۱۱] Diagonal
[۱۲] Symmetric
[۱۳] Hermitian
[۱۴] Upper Hessenberg
[۱۵] Tridiagonal

یک ماتریس سه‌قطری در حالت کلی به صورت زیر است:

$$H=\begin{bmatrix} b_۱ & c_۱ & & & & \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ & & ۰ & \\ & a_۳ & b_۳ & c_۳ & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & ۰ & & a_{n-۱} & b_{n-۱} & c_{n-۱} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix}.$$

تعریف ۱.۱.۱۹. ماتریس‌های A و B را متشابه نامیم هرگاه ماتریس وارون پذیری چون P موجود باشد به طوری که $B=P^{-۱}AP$.

قضیه ۱.۱.۲۰. *دو ماتریس متشابه دارای مقادیر ویژه یکسان هستند. یعنی مقادیر ویژه A و $PAP^{-۱}$ برای همه ماتریس‌های P یکسان هستند.*

قضیه ۱.۱.۲۱. *بردارهای ویژه وابسته به مقادیر ویژه متمایز یک ماتریس، مستقل خطی هستند.*

قضیه ۱.۱.۲۲. *ماتریس A نامنفرد است اگر و فقط اگر هیچ یک از مقادیر ویژه آن صفر نباشند.*

قضیه ۱.۱.۲۳. *مقادیر ویژه ماتریس‌های مثلثی و قطری همان عناصر واقع بر قطر اصلی‌اند.*

قضیه ۱.۱.۲۴. *مقادیر ویژه ماتریس‌های A و A^t یکسان هستند و بردارهای ویژه آن ها در حالت کلی متفاوتند.*

قضیه ۱.۱.۲۵. *اگر $\lambda_۱,\cdots,\lambda_n$ مقادیر ویژه A باشند، آن‌گاه مقادیر ویژه A^k عبارتند از:*

$$\lambda_۱^k,\cdots,\lambda_n^k,\ (k\in\mathbb{N})$$

و بردارهای ویژه بدون تغییر باقی می‌مانند.

قضیه ۱.۱.۲۶. *فرض کنید λ یک مقدار ویژه A و q بردار ویژه نظیر آن است. اگر $A^{-۱}$ موجود باشد آن‌گاه $\frac{۱}{\lambda}$ مقدار ویژه $A^{-۱}$ است و بردار ویژه نظیر آن همان q است.*

قضیه ۱.۱.۲۷. *اگر λ یک مقدار ویژه A و q بردار ویژه‌ی نظیر λ و σ یک عدد حقیقی دلخواه باشد، آن‌گاه $\lambda-\sigma$ مقدار ویژه ماتریس $A-\sigma I$ و q بردار ویژه نظیر آن است.*

قضیه ۱.۱.۲۸. *مقادیر ویژه ماتریس‌های هرمیتی، حقیقی‌اند.*

برهان. فرض کنیم A یک ماتریس هرمیتی و λ یک مقدار ویژه آن باشد. در این صورت بردار ناصفر q موجود است به قسمی که:

$$Aq=\lambda q.$$

حال از طرفین مزدج ترانهاده می‌گیریم، پس داریم:

$$(Aq)^* = (\lambda q)^* \Longrightarrow q^* A^* = \overline{\lambda} q^*.$$

از این که A هرمیتی است، داریم:

$$\begin{aligned} q^* A^* = \overline{\lambda} q^* \quad &\Longrightarrow \quad q^* A q = \overline{\lambda} q^* q \;\Longrightarrow\; q^*(\lambda q) = \overline{\lambda} q^* q \\ &\Longrightarrow \quad \lambda q^* q = \overline{\lambda} q^* q. \; (q^* q \neq ۰) \end{aligned}$$

پس $\lambda = \overline{\lambda}$ و بنابراین λ حقیقی است. □

تعریف ۲۹.۱.۱. برای بردار $V = (v_۱, v_۲, \cdots, v_n)^t$، نرم‌های برداری به صورت‌های زیر تعریف می‌شوند:

۱. نرم مجموع یا نرم یک:

$$\| V \|_۱ = | v_۱ | + | v_۲ | + \cdots + | v_n | \, .$$

۲. نرم اقلیدسی یا نرم ۲:

$$\| V \|_۲ = (\sum_{i=۱}^{n} | v_i |^۲)^{\frac{۱}{۲}}.$$

۳. نرم بی‌نهایت یا نرم ماکزیمم:

$$\| V \|_\infty = \max_i | v_i | \, .$$

و نرم-۲ ماتریس القایی به صورت زیر است:

$$\| A \| = \| A \|_۲ = \sup_{V \neq ۰} \frac{\| AV \|_۲}{\| V \|_۲}.$$

ماتریس های متعامد، نقش مهمی را در آنالیز عددی بازی می کنند. این ماتریس ها متشکل از سطرها یا ستون هایی هستند که تشکیل مجموعه ای متعامد می دهند، لذا می توان ادعا کرد که سطرها یا ستون های ماتریس، نسبت به هم عمودند.

تعریف ۳۰.۱.۱. ماتریس مربعی و حقیقی Q را متعامد گوییم هرگاه معکوس ماتریس، با ترانهاده آن برابر باشد، یعنی :

$$Q^t Q = Q Q^t = I.$$

تعریف ۳۱.۱.۱. ماتریس مربعی Q را یکانی گوییم هرگاه معکوس Q برابر با مزدوج ترانهاده ماتریس Q باشد، یعنی :

$$Q^*Q = QQ^* = I.$$

تعریف ۳۲.۱.۱. جفت بردارهای u و v متعامدند اگر $u \neq v,\ u^*v = ۰$، اگر u و v حقیقی باشند آن‌گاه u و v بر هم عمودند. دو مجموعه از بردارهای U و V بر هم متعامدند، اگر هر $u \in U$ و هر $v \in V$ متعامد باشند. یک مجموعه از بردارهای ناصفر مانند $\mathbb{S}$ متعامدند اگر اعضا جفت به جفت متعامد باشند، یعنی اگر:

$$u, v \in \mathbb{S},\ u \neq v \implies u^*v = ۰$$

یک مجموعه از بردارهای $\mathbb{S}$ متعامد یکه‌اند، اگر بردارها متعامد باشند و نیز برای هر $u \in \mathbb{S}$، $\| u \| = ۱$ باشد.

قضیه ۳۳.۱.۱.

الف. حاصلضرب دو ماتریس متعامد، متعامد است.

ب. وارون یک ماتریس متعامد، متعامد است.

قضیه ۳۴.۱.۱. *اگر A هرمیتی باشد آن‌گاه بردارهای ویژه A، متناظر با مقادیر ویژه متمایز، متعامدند.*

برهان. فرض کنید A یک ماتریس هرمیتی و λ و μ مقادیر ویژه‌ی متمایز A باشند، در این صورت بردارهای ناصفر u و v موجودند به قسمی که:

$$Au = \lambda u,$$

$$Av = \mu v,\ \lambda \neq \mu$$

بنابر قضیه‌ی (۲۸.۱.۱)، λ و μ حقیقی‌اند. چون $Au = \lambda u$ و A هرمیتی است، پس داریم:

$$u^*A = \lambda u^*.$$

با ضرب v در رابطه‌ی فوق داریم:

$$u^*Av = \lambda u^*v. \tag{۱.۱}$$

از طرفی چون $Av = \mu v$، پس:

$$u^*Av = \mu u^*v \tag{۲.۱}$$

و بنابر روابط (۱.۱) و (۲.۱) داریم:

$$\lambda u^* v = \mu u^* v.$$

لذا

$$(\lambda - \mu) u^* v = \circ$$

وچون $\mu \neq \lambda$، پس $u^* v = \circ$ و حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۳۵.۱.۱. *مقادیر ویژه ماتریس‌های حقیقی و متقارن حقیقی‌اند و بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه متمایز آن ها متعامدند.*

تعریف ۳۶.۱.۱. عدد $n_g(\lambda) = \dim L(\lambda)$ حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی متناظر به یک مقدار ویژه را مشخص می‌کند. این عدد چندگانگی هندسی مقدار ویژه λ نامیده می‌شود و مرتبه تکرار ریشه λ در معادله مشخصه را چندگانگی جبری مقدار ویژه λ گویند و با نماد n_a نمایش می‌دهند. مثلاً اگر A ماتریس قطری مرتبه n باشد آن‌گاه داریم:

$$n_a(\lambda) = n = n_g(\lambda)$$

و همیشه داریم $1 \leq n_g(\lambda) \leq n_a(\lambda) \leq n$.
مقدار ویژه‌ی λ ساده است اگر $n_a(\lambda) = 1$ و A موهن [۱۶] است اگر $n_g(\lambda) > 1$ برای بعضی λها برقرار باشد.

تعریف ۳۷.۱.۱. اگر $n_a(\lambda) > n_g(\lambda)$ برقرار باشد، ماتریس A یک ماتریس رتبه ناقص و در غیر این صورت ماتریس رتبه کامل است.

تعریف ۳۸.۱.۱. زیرفضای $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$ یک زیرفضای پایای A است اگر $A\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ باشد.

تعریف ۳۹.۱.۱. ماتریس A را ماتریس نرمال [۱۷] گوییم هرگاه با ماتریس الحاقی‌اش $(A^* = \overline{A}^t)$ تعویض‌پذیر باشد، یعنی $A^*A = AA^*$.

۲.۱ تجزیه شور

تعریف ۱.۲.۱. ماتریس مربعی A به طور یکانی قطری‌پذیر است، اگر ماتریس یکانی Q وجود داشته باشد به طوری که:

$$A = Q\Lambda Q^*,$$

که در آن Λ یک ماتریس قطری است.

[۱۶] Derogatory
[۱۷] Normal

قضیه ۲.۲.۱ (شور). *هرماتریس مربعی A یک تجزیه شور [۱۸] دارد که به صورت زیر است :*

$$AQ = QR,$$

که در آن Q یک ماتریس یکانی $(Q^*Q = I)$ و R یک ماتریس بالا مثلثی است که عناصر روی قطر ماتریس R مقادیر ویژه A هستند.

برهان. اگر $n = ۱$ باشد قضیه به صورت بدیهی برقرار است. حال فرض می‌کنیم که قضیه برای $n - ۱$ درست باشد. نشان خواهیم داد که قضیه برای n نیز درست می‌باشد. فرض کنیم u بردار ویژه‌ی A متناظر با λ است. u را طوری انتخاب می‌کنیم که $\| u \| = ۱$ بوده و ستون اول یک ماتریس یکانی مانند U باشد. همواره می‌توانیم ماتریس $(n - ۱) \times n$ بعدی $U_۱$ را طوری انتخاب کنیم که:

$$U = (u, U_۱),$$

یکانی باشد. چون $AU = A(u, U_۱) = (\lambda u, AU_۱)$، داریم:

$$U^*AU = \begin{bmatrix} u^* \\ U_۱^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda u & AU_۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & B \\ \circ & C \end{bmatrix},$$

که در آن B یک بردار $(n - ۱)$تایی سطری و $C = U^*AU$ از بعد $(n - ۱) \times (n - ۱)$ می‌باشد. به جز λ مقادیر ویژه A و C یکسان هستند. طبق فرض تجزیه شور برای ماتریس C وجود دارد، یعنی ماتریس یکانی V و از مرتبه $(n - ۱)$ به قسمی وجود دارد که:

$$\widehat{R} = V^*CV,$$

مثلثی باشد. سپس ماتریس زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & V \end{bmatrix},$$

که یک ماتریس یکانی است (چون V یکانی است) و

$$Q = U \begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & V \end{bmatrix}.$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} Q^*AQ &= \begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & V^* \end{bmatrix} U^*AU \begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & V \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & V^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & B \\ \circ & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & V \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & B \\ \circ & V^*C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & V \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & BV \\ \circ & V^*CV \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

[۱۸] Schur decomposition