بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک

میانگین‌پذیری تقریبی
کلاس های اسکاتن، جبرهای لیپ شیتز و دوگان دوم جبرهای فوریه

استاد راهنما

دکتر محمود لشکری‌زاده بمی

پژوهشگر

مرضیه خلیلی

بهمن ۱۳۹۱

سپاسگزاری...

خداوند منان را شاکرم که توفیق گام نهادن در وادی علم و دانش و لذت چشیدن ذره‌ای از آن بیکران را به من ارزانی داشت، او که در این راه مرا از وجود انسان‌هایی بزرگ بهره‌مند گردانید.

بر خود میدانم که در مسیر نگارش پایان نامه‌ام فرصتی دست داد تا افتخار علم آموزی نزد استاد عزیز، جناب آقای دکتر محمود لشگری زاده بمی را در کارنامه‌ی علمی خود بنگارم. از تمامی زحمت‌های بی دریغ ایشان بسیار سپاسگذارم و از خداوند بزرگ بهترین‌ها را برایشان خواستارم.همچنین، از استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر رجالی و خانم دکتر ابطهی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند، سپاسگزارم.

از خواهر و برادر عزیزم و دوستانم که با محبت و دلگرمی خود مرا در این راه همراهی نمودند قدرردانی می‌کنم .

و در نهایت ...

از زحمات بی دریغ پدر و مادر مهربان و بزرگوارم که گرمای امید بخش وجودشان در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان من می‌باشند، کمال تشکر را دارم.

مرضیه خلیلی- بهمن ۱۳۹۱

تقدیم به :

پدرم...

استوارترین پشتوانه زندگی‌ام که همواره چتر محبتش بر سرم بوده

و مادرم...

دل انگیز ترین رایحه مهر، که دامان پر مهرش یگانه پناهم بوده

چکیده

میانگین‌پذیری کلاس های اسکاتن، جبر های لیپ شیتز و دوگان دوم جبر های فوریه با بعد متناهی آن‌ها هم ارز است. ولی میانگین‌پذیری تقریبی این جبر ها، در سال های اخیر مسئله ای باز بوده است. در این پایان نامه محک جدیدی ارائه می‌کنیم که نشان می‌دهد جبرهای باناخی که فاقد همانی تقریبی کرانداراند، نمی‌توانند میانگین‌پذیر تقریبی باشند. برای کلاس های اسکاتن و جبر های لیپ شیتز حل کاملی ارائه می‌دهیم. همچنین این محک میانگین‌پذیر تقریبی نبودن را نیز مشخص می‌کند. از این محک برای مطالعه دقیق جبرهای سگال جابجایی استفاده می‌کنیم و در اخر با استفاده از تکنیک های گوناگون ثابت می‌کنیم اگر فضای دوم جبرهای فوریه میانگین‌پذیر تقریبی کراندار باشند، آنگاه G با بعد متناهی خواهد بود.

واژگان کلیدی: میانگین‌پذیری تقریبی، کلاس‌های اسکاتن، جبرهای لیپ شیتز و دوگان دوم جبرهای فوریه

فهرست مطالب

پیشگفتار

میانگین‌پذیری جبرهای باناخ را نخستین بار جانسون در [۲۱] تعریف و مطالعه کرد. او ثابت کرد که برای گروه موضعاً فشرده‌ی G، جبر گروهی $L^1(G)$ میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر گروه G میانگین‌پذیر باشد. از آن زمان میانگین‌پذیری یکی از موضوعات اصلی در جبر باناخ و آنالیز هارمونیک گردید.

مفاهیم میانگین‌پذیری، انقباض‌پذیری تقریبی و میانگین‌پذیر اساسی در [۲۱] مطرح و در [۶] و [۱۷] و [۱۳] بیشتر مورد بررسی قرار گرفت. اما میانگین‌پذیری تقریبی کلاس‌های گوناگون جبرهای باناخ مورد بررسی قرار نگرفت.اثبات اینکه یک جبر باناخ میانگین‌پذیر تقریبی نیست بسیار مشکل تر از اثبات میانگین‌پذیری تقریبی آن است. در [۶] نشان داده شد که برای$1 \leq P < 0$ ، جبر l^p ، با ضرب نقطه‌ای میانگین‌پذیر تقریبی نیست. حال این سوال پیش می‌آید که آیا کلاس‌های اسکاتن $s_p(H)$ به طور تقریبی میانگین‌پذیر هستند؟ در بخش ۷ از [۱۳] نتایج جزئی از میانگین‌پذیری یا دیگر میانگین‌پذیری‌ها برای جبرهای لیپ شیتز کوچک $lip_\alpha(X)$ به دست آمد. اما این سوال باقی مانده بود که آیا جبر باناخ به طور تقریبی میانگین‌پذیر A لزوماً دارای تقریب همانی کراندار هستند. اخیراً قهرمانی و ژانگ ثابت کرده‌اند، اگر A به طور تقریبی انقباض‌پذیر کراندار باشد آنگاه دارای یک تقریب همانی کراندار هستند ([۳] را ببینید). نتیجه اصلی فصل سه یک محک جدید است که نشان می‌دهد جبرهای باناخ با تقریب همانی کراندار میانگین‌پذیر تقریبی نمی‌باشند. برای مثال برای نشان دادن اینکه کلاس‌های اسکاتن روی فضای هیلبرت جدایی‌پذیر با بعد نامتناهی و یا جبرهای لیپ شیتز روی فضاهای متریک فشرده نامتناهی میانگین‌پذیر تقریبی نمی‌باشند، از این محک جدید استفاده می‌کنیم. سوال باز دیگر این است که آیا زیر جبرهای سگال سره از جبرگروهی یک گروه موضعاً فشرده میانگین‌پذیر تقریبی هست؟

در این پایان نامه ثابت می‌شود زیر جبر سگال سره $\mathbb{R}^n$ میانگین‌پذیر تقریبی نمی‌باشند. همچنین توسط این محک جدید برهان‌های جدید برای نتایج نوشته شده توسط نویسندگان دیگر ارائه می‌دهیم. سوال باز دیگری که مطرح است اینکه آیا هر جبر باناخ به طور تقریبی میانگین‌پذیر انعکاسی، با بعد متناهی است؟ در این پایان نامه ثابت می‌کنیم در حالتی که جبر باناخ جابجایی و میانگین‌پذیر تقریبی کراندار باشد پاسخ مثبت استو سرانجام جبر دوگان دوم جبرفوریه‌ی گروه موضعاً فشرده‌ی G میانگین‌پذیر تقریبی کراندار است اگر و تنها اگر G با بعد متناهی باشد. این مطلب توسیعی از حالت میانگین‌پذیر است که توسط لادو و لوی در [۲۷] اثبات شده است.

در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی برای استفاده در فصل‌های بعد ذکر گردیده است که شامل سه بخش آنالیز تابعی، جبرهای باناخ و C^*- جبرها و آنالیز هارمونیک است.

در فصل دوم به مفهوم میانگین و میانگین‌پذیری تقریبی می‌پردازیم.

در فصل سوم شامل سه بخش است که در بخش اول محکی برای تعیین میانگین‌ناپذیری تقریبی جبرهای باناخ ارائه می‌دهیم. در بخش دوم با استفاده از این محک، میانگین‌پذیری تقریبی کلاس‌های اسکاتن را بررسی می‌کنیم و در بخش بعدی به کاربردهایی از این محک می‌پردازیم.

در فصل چهارم به میانگین‌پذیری تقریبی جبرهای سگال روی $L^1(\mathbb{R}^d$ و $lip_\alpha(X)$ می‌پردازیم.

فصل پنجم و ششم به ترتیب به بررسی میانگین‌پذیری تقریبی ضرب‌های تانسوری و جبرهای باناخ انعکاسی جابجایی اختصاص دارد.

و در آخر فصل هفتم از این پایان نامه را به بررسی میانگین‌پذیری تقریبی دوگان دوم جبرهای فوریه اختصاص داده‌ایم. که نشان می‌دهیم اگر G یک گروه موضعاً فشرده باشد، در این صورت متناهی بودن G، شرط لازم و کافی برای میانگین‌پذیر تقریبی کراندار $A(G)^{**}$ است.

فصل ۱

تعاریف و مقدمات اولیه

در این فصل به بیان تعاریف و قضیه هایی پرداخته ایم که در فصول بعدی مورد نیاز است و از آنجایی که فرض بر این نهاده شده است که خواننده این پایان نامه اشراف کامل به مسائل ابتدایی و مقدماتی دارد، لذا از بازگویی این نوع مطالب و اثبات قضیه ها صرف نطر کرده ایم. این فصل در ۳ بخش، آنالیز تابعی، جبر ها و C^*جبرها و آنالیز هارمونیک تنظیم شده است.

۱.۱ آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم F میدان باشد. فضای برداری[۱] V روی F را به صورت زیر تعریف می کنیم، که فضای برداری دو عمل $(+,\cdot)$ دارای خواص زیر است:

$$+ : V \times V \longrightarrow V \qquad \cdot : F \times V \longrightarrow V$$

(۱) $x + y = y + x \qquad (x, y \in V)$

[۱] Vector space

(۲) عضو صفر $\circ$ در V وجود دارد به طوری که، $(x \in X)$ $\quad x+\circ=\circ+x=x$

(۳) $x+(y+z)=(x+y)+z \qquad (x,y,z\in V)$

(۴) عضو $(-x)$ در V وجود دارد به‌طوری که $x+(-x)=\circ \qquad (x\in V)$.

(۵) $r_۱\cdot(r_۲\cdot x)=(r_۱r_۲)\cdot x \qquad (x\in X\ ,\ r_۱,r_۲\in F)$

(۶) $r\cdot(x_۱+x_۲)=r\cdot x_۱+r\cdot x_۲ \qquad (r\in F\ ,\ x_۱,x_۲\in X)$

(۷) $(r_۱+r_۲)\cdot x=r_۱\cdot x+r_۲\cdot x \qquad (r_۱,r_۲\in F\ ,\ x\in X)$

(۸) اگر ۱ عضو واحد F باشد آن‌گاه برای هر $x\in X$ داشته باشیم $۱\cdot x=x$

تعریف ۲.۱.۱. فضای ضرب برداری X را یک فضای نرم دار[۲] گوییم، اگر به ازای هر $x\in X$، عدد حقیقی و نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\| \qquad (x,y\in X)$

(۲) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\| \qquad (x\in X,\alpha$ اسکالر $)$

(۳) $\|x\|\geq\circ$ $(x\neq\circ)$ و $x=\circ \leftrightarrow \|x\|=\circ$

تعریف ۳.۱.۱. نگاشت T از فضای برداری X به فضای برداری Y را یک نگاشت خطی یا عملگر خطی[۳] نامیم در صورتی که به ازای هر $x,y\in X$ و اسکالر α داشته باشیم:

$$T(\alpha x+y)=\alpha T(x)+T(y).$$

هر عملگر خطی از فضای برداری X به فضای اعداد مختلط را یک تابعک خطی نامند.

[۲] Normed space

[۳] Linear operator

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم X و Y فضای خطی نرمدار و $T : X \longrightarrow Y$ عملگر برداری باشد. T را کران‌دار[۴] گوییم در صورتی که عدد ثابت M وجود داشته باشد که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|.$$

نرم T را با $\|T\|$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|T\| = \sup\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \;\; , \;\; \|x\| \neq ۰\} = \sup\{\|T(x)\| \; : \; \|x\| \leq ۱\}.$$

مجموعه تمام عملگرهای خطی کران‌دار از X به Y را با $B(X,Y)$ و مجموعه تمام عملگرهای خطی کران‌دار از X به X را با $B(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. نگاشت خطی $p : X \longrightarrow X$ را خود توان[۵] گوییم ، هرگاه $p^۲ = p$.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم A یک مجموعه غیر صفر باشد، هر زیر مجموعه از $A \times A$ را یک رابطه روی A گوییم و با $\leq$ نشان می‌دهیم و به جای $(\alpha, \beta) \in \leq$ می‌نویسیم $\alpha \leq \beta$.

تعریف ۷.۱.۱. رابطه $\leq$ روی A را رابطه جزئی مرتب[۶] گوییم هرگاه:

(۱) $\alpha \leq \alpha \quad (\alpha \in A)$

(۲) اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \alpha$ آن‌گاه $\alpha = \beta \quad (\alpha, \beta \in A)$.

(۳) اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$ آن‌گاه $\alpha \leq \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in A)$.

قضیه ۸.۱.۱. فرض کنیم X, Y دو فضای نرم دار باشند و $T : X \longrightarrow Y$ خطی باشد، آن‌گاه شرایط زیر با هم هم ارزند:

---

[۴] Bounded

[۵] Idempotent

[۶] Ordered partially

(۱) T پیوسته است.

(۲) T کران‌دار است.

(۳) هرگاه $x_n \to \circ$، آن‌گاه $T(x_n) \to \circ$.

اثبات. به مرجع [۳۲]، قضیه (۱.۲۳) مراجعه شود. □

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری و N زیر فضایی از آن باشد، $\frac{X}{N}$ فضای خارج قسمتی[۷] X به پیمانه N را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\frac{X}{N} = \{x + N \ : \ x \in X\} = \{x + y \ : \ x \in X, y \in N\}.$$

$\frac{X}{N}$ با جمع و ضرب اسکالر زیر تشکیل یک فضای برداری را می‌دهند:

$$\alpha\pi(x) = \pi(\alpha x)$$
$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y).$$

صفر $\frac{X}{N}$، N می‌شود و نگاشت $\pi : X \longrightarrow \frac{X}{N}$ با ضابطه $x \longmapsto \pi(x)$ نگاشت خارج قسمتی نام دارد.

حال اگر N زیر فضای بسته از فضای نرم دار X باشد، در این صورت $\frac{X}{N}$ با نرم زیر تشکیل یک فضای نرم دار می‌دهد:

$$\|x + N\| = \inf\{\|x - y\| \ : \ y \in N\}$$

قضیه ۱۰.۱.۱. اگر X فضای باناخ باشد و N زیر فضای بسته از X، آن‌گاه $\frac{X}{N}$ فضای باناخ است.

[۷] Quotient space

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم X فضای برداری باشد، $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را نیم نرم گوییم هرگاه :

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

$$p(tx) = tp(x) \quad (t \geq ۰).$$

قضیه ۱۲.۱.۱. (قضیه هان-باناخ[۸]) فرض کنیم M زیر فضایی از فضای برداری حقیقی X و p یک نیم نرم بر X و f یک تابعک خطی بر M باشد به‌طوری که به ازای هر $x \in M$ داریم:

$$|f(x)| \leq p(x),$$

در این صورت f یک تابعک خطی Λ بر X توسیع می‌یابد که برای هر $x \in X$ در شرط زیر صدق می کند:

$$|\Lambda x| \leq p(x).$$

اثبات. به مرجع [۳۷]، قضیه (۳.۳) مراجعه شود. □

از قضیه هان باناخ، دو نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱۳.۱.۱. اگر X یک فضای نرم دار باشد و $x_۰ \in X$، آن‌گاه $\Lambda \in X^*$ای وجود دارد که $\Lambda x_۰ = \|x_۰\|$ و $\|\Lambda\| = ۱$.

اثبات. به مرجع [۳۷]، قضیه (۳.۳) مراجعه شود. □

نتیجه ۱۴.۱.۱. فرض کنیم M زیر فضا از فضای باناخ X باشد و x عضو $\overline{M}$ نباشد، در این صورت $f \in X^*$ وجود دارد به طوری که

$$\langle f, x \rangle = ۰$$

[۸] Hahn-Banach theorem

و

$$\langle f, u\rangle \neq 0 \qquad (u \in M)$$

اثبات. به مرجع [۳۷] رجوع شود. $\square$

تعریف ۱۵.۱.۱. هرگاه (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد، به طوری که برای هر $x \neq y$ همسایگی G از x و همسایگی H از y وجود داشته باشند که $G \cap H = \varnothing$، آن‌گاه (X, τ) را یک فضای هاسدورف گویند.

تعریف ۱۶.۱.۱. فضای هاسدورف (X, τ) را موضعا فشرده[۹] گوییم اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$ همسایگی G از x وجود داشته باشد به طوری که $\overline{G}$ فشرده باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱. یک فضای توپولوژیکی برداری $(T \cdot V \cdot S)$ یک فضای برداری X با یک توپولوژی است، که در آن نگاشت‌های زیر پیوسته اند.

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$
$$(x, y) \longmapsto x + y$$

$$\mathbb{F} \times X \longrightarrow X$$
$$(\alpha, x) \longmapsto \alpha x.$$

تعریف ۱۸.۱.۱. یک فضای موضعا فشرده $(L \cdot C \cdot S)$، یک $(T \cdot V \cdot S)$ است هرگاه توپولوژی آن توسط یک خانواده P از نیم نرم ها بدست بیاید به قسمی که

$$\bigcap_{p \in P} \{x \ : \ p(x) = 0\} = \{0\}$$

[۹] Locally compact

تعریف ۱.۱.۱۹. اگر X فضای نرم دار باشد، فضای دوگان[۱۰] X، فضای برداری تمام تابعک‌های خطی پیوسته بر X است که با X^* نمایش می‌دهیم و اعمال جمع و ضرب اسکالر معمولی توابع را روی آن تعریف می کنیم:

$$(\alpha f + g)(x) = \alpha f(x) + g(x).$$

X^* با نرم زیر یک فضای نرم دار است:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|\ ,\ \|x\| \leq ۱\} < \infty.$$

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنیم X یک فضای نرم دار باشد. ω^*-توپولوژی روی X^*، ضعیف ترین توپولوژی روی X^* است که تحت آن تمام تابعک های F_x در قضیه نشانده طبیعی پیوسته اند و این توپولوژی را توپولوژی ضعیف ستاره یا (ωk^*) روی X گوییم.

تعریف ۱.۱.۲۱. برای یک فضای موضعا محدب، فضای تابعک‌های خطی و پیوسته بر X را با X^* نشان می‌دهیم، به سادگی X^* یک فضای برداری تشکیل می‌دهد و برای هر $x^* \in X^*$، $x^*(x)$ را با $\langle x, x^* \rangle$ نشان می‌دهیم، بنابراین همیشه

$$x(x^*) = \langle x^*, x \rangle = \langle x, x^* \rangle = x^*(x).$$

توجه کنیم که X دارای دو توپولوژی ضعیف[۱۱] و توپولوژی اصلی[۱۲] است. ولی X^* فقط دارای توپولوژی $(\omega k)^*$ می‌باشد. در حالی که X یک فضای باناخ باشد، X^* یک فضای باناخ با توپولوژی نرم است.

وقتی می گوییم $f \in X^*$ نسبت به توپولوژی ضعیف پیوسته است، یعنی، اگر $x_i \xrightarrow{\omega} x$، آن گاه $f(x_i) \longrightarrow f(x)$.

[۱۰] Dual space

[۱۱] Weak

[۱۲] Strang

قضیه ۲۲.۱.۱. ([13]گلدشتاین) فرض کنیم M یک فضای باناخ باشد. به ازای هر $\phi \in M^{**}$، تور (x_α) در M وجود دارد که به ازای هر α،

$$x_\alpha \xrightarrow{\omega^*} \phi$$

و

$$\|x_\alpha\| \leq \|\phi\|. \qquad (\alpha)$$

اثبات. به مرجع [۹]، قضیه (۵.۴.۷) مراجعه شود. □

قضیه ۲۳.۱.۱. فرض کنیم M زیر فضایی از فضای موضعا محدب X و $x_\circ \in X$. هرگاه $x_\circ$ در $\overline{M}$ نباشد، آن‌گاه $\Lambda \in X^*$ وجود دارد به طوری که $\Lambda x_\circ = ۱$ و به ازای هر $x \in M$ داریم $\Lambda x = \circ$.

اثبات. به مرجع [۳۲]، قضیه (۵.۳) مراجعه شود. □

قضیه ۲۴.۱.۱. (نشاننده طبیعی) فرض کنیم X فضای نرم دار باشد. آن‌گاه هر $x \in X$ روی X^* تابعک خطی مانند F_x یا $\widehat{x}$ القا می کند که

$$\|\widehat{x}\| = \|F_x\| = \|x\|.$$

به ازای هر $f \in X^*$، $F_x(f) = f(x)$.

نگاشت $J : X \longrightarrow X^{**}$ با ضابطه $x \mapsto F_x$ که به ازای هر $x \in X$ داریم:

$$J(x) = F_x = \widehat{x}.$$

یک همریختی طولپا یا یک نشاننده طبیعی از X به X^{**} خواهد بود. که X^{**} فضای دوگان دوم X است.

اثبات. به مرجع [۱]، قضیه (۲۸.۲۳) مراجعه شود. □

[13] Goldstine

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنیم X,Y دو فضای نرم دار باشند، به ازای هر $T\in B(X,Y)$، نگاشت یکتای $T^*\in B(Y^*,X^*)$ به نام الحاقی[۱۴] T، نظیر می‌شود که
به ازای هر $x\in X, y^*\in Y^*$، در رابطه

$$\langle Tx,y^*\rangle=\langle x,T^*y^*\rangle.$$

صدق کند.

همچنین

$$\|T\|=\|T^*\|.$$

برقرار است.

تعریف ۲۶.۱.۱. فضای برداری مختلط H را یک فضای حاصل ضرب داخلی[۱۵] گوییم، هرگاه عملی روی H به نام ضرب داخلی وجود داشته باشد که به ازای هر $x,y,z\in X$ روابط زیر برقرار باشد:

(۱) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$.

(۲) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$.

(۳) $(\alpha\in\mathbb{C})\qquad \langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$.

(۴) $\langle x,x\rangle\geq ۰$.

(۵) $\langle x,x\rangle=۰\Leftrightarrow x=۰$.

به ازای هر $x\in H$، $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{۱}{۲}}$ را تعریف می کنیم، آن‌گاه $\|\cdot\|$ یک نرم روی H است. اگر H با این نرم تشکیل یک فضای باناخ بدهد آن‌گاه H را فضای هیلبرت[۱۶] می‌نامیم. یا

[۱۴] Adjoint

[۱۵] Inner multiplication

[۱۶] Hilbert

به عبارتی فضای ضرب داخلی H با نرم بالا چنانچه کامل باشد آن‌گاه H فضای هیلبرت است.

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد، هرگاه H شامل یک زیر مجموعه چگال و شمارا باشد، آن‌گاه H را جدایی پذیر نامیم، در غیر این صورت H را جدایی ناپذیر گوییم.

تعریف ۲۸.۱.۱. اگر H یک فضای هیلبرت باشد، عملگر $T \in B(H)$ را یکانی گوییم، اگر

$$TT^* = T^*T = 1$$

مجموعه تمام عملگر های یکانی روی H را با $U(H)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۹.۱.۱. اگر H فضای هیلبرت باشد، سه نوع توپولوژی روی $B(H)$ تعریف می‌شود:

(۱) توپولوژی نرم (یکنواخت[۱۷]): همگرایی دنباله‌ی(T_n)، از عملگرها به T، تحت توپولوژی نرم. یعنی

$$\|T - T_n\| \longrightarrow 0.$$

(۲) توپولوژی عملگر قوی(SOT): گوییم تور (T_α)، از عملگرها به طور قوی یا تحت توپولوژی عملگر قوی، به عملگر T همگراست، هرگاه به ازای هر $x \in H$ داشته باشیم:

$$\|(T - T_\alpha)x\| \longrightarrow 0.$$

[۱۷] Uniform