دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضیات مالی

قیمت‌گذاری و پوشش ریسک سبد مشتقات اعتباری با استفاده از شدت‌های نکول مرتبط

توسط:

طیبه شائی‌زاد

استاد راهنما:

دکتر محمد جلوداری ممقانی

استاد مشاور:

دکتر جواد دمیرچی

اسفند ماه ۹۱ ۱۳

سپاس‌گزاری

سپاس خدای را که هر توفیقی در گرو عنایت اوست. اکنون که با یاری او توانسته‌ام تلاشی هر چند ناچیز را در راه کسب دانش به انجام رسانم، بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر محمد جلوداری ممقانی، که به پایان رساندن این تحقیق جز با راهنمایی‌های پدرانه و هدایت‌های بی‌دریغ ایشان میسر نبود، قدردانی نمایم.

در پایان، از خانواده‌ام، به ویژه مادر و همسرم که با حمایت‌های خویش، همواره مرا پشتیبانی کرده‌اند نهایت سپاس و قدردانی را دارم.

امیدوارم از ادای حق این عزیزان برآیم.

اسفند ۹۱

چکیده

با توجه به رشد سریع بازار مشتقات اعتباری، معرفی مدل‌های مناسب برای آن‌ها یکی از مسائل پراهمیت برای دست اندرکاران بازار مشتقات است. عامل اصلی در هر یک از این مدل‌ها روشی است که وابستگی زمان‌های نکول را ایجاد می‌کند. مدل‌های مشتقات اعتباری را به سه دسته اساسی طبقه‌بندی می‌کنند.

۱) مدل‌هایی که در آن‌ها شدت‌های نکول وابسته‌اند ولی زمان‌های نکول شرطی مستقل‌اند. مدل دوفی و گارلینیو (۲۰۰۱) در این رده قرار می‌گیرند.

۲) مدل‌های عاملی کاپولا، که وابستگی ساختاری شدت‌های نکول را بررسی می‌کنند. مدل‌های لی (۲۰۰۱)، لوران وگریگوری (۲۰۰۵) و هال و وایت (۲۰۰۴) از این دسته‌اند.

۳) مدل‌های که بین نکول شرکت‌ها رابطه مستقیم برقرار می‌کنند. مدل جرو و یو (۲۰۰۱) در این دسته‌اند.

هدف این پایان نامه مطالعه‌ی مدلی از نوع سوم برای مشتقات سوآپ نکول و مشتقات وثیقه با پشتوانه بدهی با استفاده از روش‌های فرایند مارکوف است. برای ساختن این مدل‌ها از دینامیک قیمت‌های دارایی آغاز می‌کنیم و متغیرهای وضعیت نکول و ویژگی‌های توزیعی قیمت را بدست می‌آوریم. در این دسته ازمدل‌ها شدت‌های نکول را به عنوان شرایط آغازی در نظر می‌گیریم، به ویژه تأثیر نکول یک شرکت را بر شدت‌های نکول شرکت‌های دیگر تعیین می‌کنیم. به طور کلی با استفاده از این روش رفتار پارامترهای سرایت و وابستگی نکول را می توان به صورت شهودی پیش‌بینی کرد و با استفاده ازفرمولبندی دینامیک، استراتژی پوششی مبتنی بر مدل را بدست آورد.

واژه‌های کلیدی: مشتقات اعتباری، CDO، پوشش، زنجیرهای مارکف.

فهرست مطالب

فهرست مطالب ه

فهرست جدول‌ها ح

فهرست شکل‌ها ط

نمادها و علایم اختصاری ی

۱ مفاهیم و کلیات ۱

۱-۱ مقدمه ۱

۱-۲ مفاهیم و تعاریف مالی ۲

۱-۲-۱ ریسک ۲

۱-۲-۲ سبدمالی ۴

۱-۳ مفاهیم و تعاریف ریاضی ۴

۱-۳-۱ فضای احتمال ۴

۱-۳-۲ امید شرطی و ویژگی‌های آن ۴

۱-۳-۳ زمان‌های توقف ۵

۱-۳-۴ فرایندهای قابل‌پیش‌بینی ۶

۱-۳-۵ مارتینگل‌ها ۶

۱-۳-۶ فرایندهای مارکف ۸

۱-۳-۷ فرایندهای پواسون ۱۰

۱-۴ چشم انداز فصل‌های آینده ۱۱

۲ مدل‌سازی ۱۲

۲-۱ مقدمه ۱۲

۲-۲ مدل‌های فرم تقلیل‌یافته ۱۳

۲-۲-۱ مدل‌های با شدت متداخل ۱۳

۲-۲-۲ شرح مدل ۱۳

۲-۳ نرخ خطر و شدت نکول ۱۵
۲-۳-۱ شدت نکول ۱۵
۲-۳-۲ شدت نکول با استفاده از فرایندهای پواسون ۱۶
۲-۴ ویژگی‌های شدت نکول ۱۸
۲-۵ چگالی شرطی ۲۰
۲-۶ مدل‌های با ساختار گروهی همگن ۲۱
۲-۶-۱ شرح ساختار گروهی همگن ۲۲
۲-۷ نتیجه‌گیری ۲۸

۳ مشتقات اعتباری ۲۹
۳-۱ مقدمه ۲۹
۳-۲ ریسک اعتباری و اهمیت مدیریت آن ۳۰
۳-۳ مشتقات اعتباری ۳۰
۳-۳-۱ سوآپ بازده کل ۳۲
۳-۳-۲ قرارداد اختیار معامله اعتباری دامنک ۳۴
۳-۳-۳ سوآپ نکول اعتباری ۳۵
۳-۳-۴ تعهدات با پشتوانه بدهی ۳۹
۳-۴ نتیجه‌گیری ۴۳

۴ قیمت‌گذاری مشتقات اعتباری ۴۴
۴-۱ مقدمه ۴۴
۴-۲ ساختار بازار ۴۵
۴-۳ بلوک ساختمانی ۴۷
۴-۳-۱ قیمت‌گذاری ادعای بقا و ادعای پرداخت نکول ۴۷
۴-۴ قیمت‌گذاری سوآپ نکول اعتباری kام ۴۸
۴-۴-۱ بخش پرداخت نکول ۴۹
۴-۴-۲ بخش پرداخت امتیاز ۵۰
۴-۵ قیمت‌گذاری قطعه CDO ترکیبی ۵۲
۴-۵-۱ بخش پرداخت امتیاز و بخش پرداخت نکول با دامنک قطعه kام ۵۴
۴-۵-۲ مثال عددی ۵۵
۴-۶ نتیجه‌گیری ۵۶

۵ پوشش مشتقات اعتباری **۵۷**

۵-۱ مقدمه ۵۷

۵-۲ مسئله پوشش ۵۸

۵-۲-۱ استراتژی خودتأمین ۵۸

۵-۲-۲ ادعای قابل‌نکول و ادعای سرایت ۶۱

۵-۲-۳ تغییرناپذیری در قیمت دارایی پایه ۶۲

۵-۳ پوشش ادعای قابل‌نکول ۶۳

۵-۳-۱ نمایش مارتینگلی ۶۳

۵-۳-۲ شرط داشتن رتبه کامل ماتریس Φ_t ۶۶

۵-۳-۳ پوشش CDS ۶۷

۵-۳-۴ مثال عددی ۷۰

۵-۴ نتیجه گیری ۷۴

مراجع **۷۵**

واژه نامه فارسی به انگلیسی **۷۷**

واژه نامه انگلیسی به فارسی **۷۹**

پیوست الف **۸۱**

پیوست ب **۸۳**

فهرست جدول‌ها

جدول (۴-۱) دامنک سوآپ نکول اعتباری kام [۱۱]..... ۵۵
جدول (۵-۱) تغییرات فرایند سود به دلیل نکول شاخص CDS غیر نکول و قطعات مختلف CDS غیر نکول برای سبدهای A, B و C [۱۰]..... ۷۲
جدول (۵-۲) نسبت پوشش شاخص CDS و طبقات مختلف در لحظه t =۰ [۱۰]..... ۷۳

فهرست شکل‌ها

شکل (۳-۱) گزارش ریسک اعتباری مؤسسه بانکداران بریتانیا ۳۲
شکل (۳-۲) فرایند سوآپ بازده کل..... ۳۳
شکل (۳-۳) فرایند سوآپ نکول اعتباری..... ۳۷
شکل (۳-۴) ساختار CDO..... ۴۰
شکل (۳- ۵) ساختار CDO ترکیبی..... ۴۲
شکل (۴- ۱) فرایند زیان سبد متناظر با زیان قطعات داده شده..... ۵۳
شکل (۵-۱) پوشش ادعای بقا با فرض این که $t < T_0$ ، شکل سمت چپ θ_1 برای ورقه قرضه صفرکوپن قابل‌نکول و شکل سمت راست θ_2 ، ... ، θ_5 برای ورقه قرضه صفرکوپن قابل‌نکول است [۱۲]..... ۷۰
شکل (۵-۲) فرایند افزایشی تابع زیان..... ۸۲
شکل (۵-۲) تابع زیان ۸۳

فهرست علائم اختصاری

نماد	تعریف
$a.s$	تقریباً مطمئن
CDS	سوآپ نکول اعتباری
CDO	وثیقه با پشتوانه بدهی
bp	معادل صدم یک درصد در سال است
diag	قطر
$V^{\mathbf{def}}$	ارزش بخش پرداخت نکول
V^{prem}	ارزش بخش پرداخت امتیاز
σ	سیگما میدان
$\perp$	متعامد بودن
$\langle XY\rangle_t$	$\int X_t dY_t$

پیشگفتار

در فصل اول این پایان‌نامه مروری بر مفاهیم اولیه مالی و ریاضی و فرایند تصادفی خواهیم داشت.

در فصل دوم به بیان مراحل ساخت مدل نکول و گروه‌های همگن می‌پردازیم و پس از آن مدل‌های نکول را شرح داده و و برخی از ویژگی‌های آن را بیان خواهیم کرد.

در فصل سوم انواع مشتقات اعتباری را تعریف و شرح خواهیم داد و ویژگی‌ها و اهمیت استفاده از هر کدام را بیان خواهیم کرد.

در فصل چهارم ابتدا به شرح ساختار بازار می‌پردازیم و پس از آن دو بلوک ساختمانی را بیان می‌کنیم که با استفاده از آن‌ها قیمت مشتقات اعتباری نظیر سوآپ اعتباری نکول و وثیقه با پشتوانه بدهی را بدست می‌آوریم.
در فصل پایانی به چگونگی پوشش مشتقات اعتباری با قضیه‌های خودتأمین و نمایش مارتینگلی طی دو مرحله می‌پردازیم.

فصل ۱

مفاهیم و کلیات

۱-۱ مقدمه

مشتقه اعتباری، قراردادی است که بازده آن به رتبهٔ اعتباری یک یا چند شرکت یا دولت بستگی دارد. هدف از به کار بردن مشتقات اعتباری، انتقال و مدیریت ریسک اعتباری است.

در این فصل ابتدا به تعاریف و مفاهیم مالی نظیر ریسک، سبدمالی و غیره می‌پردازیم و سپس به بیان ابزارهای ریاضی لازم جهت اندازه‌گیری و فرمولبندی ساختاری آن‌ها می‌پردازیم. این فصل در حقیقت مقدمه‌ای برای فصل‌های بعدی است.

۱- ۲ مفاهیم و تعاریف مالی

۱-۲-۱ ریسک

به طور کلی ریسک احتمالی است که انجام یا عدم انجام کاری مشخص منجر به زیان و پیامدهای ناخوشایند و ناخواسته گردد. تقریبا همه کوشش‌های بشری دربردارنده درجاتی از ریسک است، با این همه برخی از آنها ریسک‌های بیشتری را به همراه دارند. در ادبیات مالی ریسک را به عنوان رویدادهای غیرمنتظره‌ای تعریف می‌کنندکه معمولاً باعث تغییر در ارزش دارایی‌ها یا بدهی‌ها می‌شود. بنگاه‌های مالی در معرض انواع ریسک قرار دارند که به طور کلی می‌توان به دو دسته ریسک‌های تجاری و ریسک‌های غیرتجاری تقسیم کرد.

ریسک تجاری و غیرتجاری

ریسک‌های تجاری آن‌هایی هستند که از دید بنگاه برای سهام‌داران مزیت رقابتی و ارزش افزوده ایجاد می‌کنند. ریسک تجاری به بازار محصولی که یک بنگاه در آن فعالیت می‌کند مربوط می‌شود. این بازار شامل نوآوری‌های تکنولوژیک، طراحی محصول و بازاریابی می‌شود. نسبت عملیاتی (نسبت هزینه‌های ثابت به هزینه‌های متغیر) هم یک متغیر مهم محسوب می‌شود. در هر کسب و کاری پذیرش منطقی ریسک تجاری، یک مزیت رقابتی محسوب می‌شود.

سایر ریسک‌هایی که بنگاه بر آن‌ها کنترلی ندارد، ریسک‌های غیرتجاری را تشکیل می‌دهند. این دسته شامل ریسک‌های استراتژیک می‌شوند که نتیجه تغییرات بنیادی در محیط سیاسی و اقتصادی هستند مثالی از این نوع، ازبین رفتن سریع تهدید اتحاد جماهیر شوروی در اواخر دهه ۸۰ میلادی است که باعث کاهش تدریجی بودجه دفاعی شد و مستقیماً روی صنایع دفاعی تأثیر گذاشت. سلب مالکیت و ملی شدن هم جزو ریسک‌های استراتژیک محسوب می‌شوند. پرهیز از این ریسک‌ها مشکل است، مگر این که کسب و کارها و محل های سرمایه گذاری را متنوع کنیم. ریسک‌های مالی که بخشی از ریسک‌های تجاری هستند را می‌توان به ریسک‌هایی تعبیر کرد که به سقوط بازارهای مالی مربوط اند، مانند ضررهای ناشی از تغییر نرخ بهره و یا تغییر قیمت سهام. ریسک مالی را می‌توان به دقت بهینه کرد به طوری که بنگاه بتواند بر روی فعالیت اصلی خودش تمرکز کند. منابع اصلی تولید ریسک مالی به قرار زیر است:

۱) ریسک بازار: در اثر نوسانات قیمت دارایی‌ها در بازار ایجاد می‌شود. ریسک بازار که یکی از عوامل اصلی ایجاد کننده ریسک است، به همراه ریسک اعتباری نقش اصلی را در اکثر ورشکستگی‌ها ایفا می‌کنند.

۲) ریسک قانونی: زمانی مطرح می‌شود که یک معامله از نظر قانونی قابل انجام نباشد. ریسک قانونی در کل با ریسک اعتباری مرتبط است زیرا دوطرف معامله در صورت تحمل زیان در یک معامله در جستجوی بستر قانونی برای زیر سؤال بردن اعتبار معامله می‌گردند.

۳) ریسک نقدینگی دارایی: با نام ریسک نقدینگی بازار هم شناخته می‌شود، زمانی رخ می دهد که معامله با قیمت پیش‌بینی‌شده قابل انجام نباشد (به دلیل تغییر وضعیت نسبت به زمان معامله عادی) این ریسک به دارایی‌ها و زمان بازار بستگی دارد. بعضی دارایی‌ها مانند ارزهای اصلی یا اوراق قرضه، بازارهای گسترده‌ای دارند و معمولاً به راحتی با نوسان کمی در قیمت، نقد می‌شوند اما این امر در مورد همه دارایی‌ها صادق نیست.

۴) ریسک عملیاتی: عموماً از اشتباهات انسانی یا اتفاقات و خطاهای تکنیکی ناشی می‌شود. نمونه‌های این ریسک عبارتند از:

تقلب موقعیتی که معامله‌گرها اطلاعات غلط می‌دهند، اشتباهات مدیریتی و نارسایی کنترل، خطای تکنیکی ممکن است ناشی از نقص در اطلاعات، پردازش معاملات، سیستم‌های ترابری یا به طور کلی هر نارسایی دیگری در سطح سازمان باشد. ریسک عملیاتی ممکن است منجر به ریسک‌های اعتباری و بازار شوند.

۵) ریسک اعتباری: ریسکی است که از نکول یا ورشکستگی یک طرف قرارداد ناشی می‌شود، به طور کلی این ریسک از «اتفاقی اعتباری» ناشی می‌شود. در گذشته این ریسک معمولاً در مورد اوراق قرضه واقع می‌شد، بدین صورت که قرض‌دهنده‌ها نگران دریافت اقساط وام بودند. به همین دلیل گاهی ریسک اعتباری را ریسک نکول هم می نامند.

ریسک اعتباری از این واقعیت ریشه می‌گیرد که طرف قرارداد، نتواند یا نخواهد تعهدات خود را انجام دهد. این ریسک با پرداخت وجه جایگزین ناشی از نکول به طرف قرارداد برطرف می‌کنند.
ضررهای ناشی از ریسک اعتباری ممکن است قبل از وقوع نکول واقعی طرف قرارداد رخ دهند. به طور کلی ریسک اعتباری را می‌توان به عنوان ضرر محتمل که در اثر یک رخداد اعتباری اتفاق می‌افتد، بیان کرد. رخداد اعتباری زمانی واقعی شود که توانایی طرف قرارداد در تکمیل تعهداتش تغییر کند. ریسک اعتباری یکی از مهم‌ترین عوامل ریسک در بانک‌ها و شرکت‌های مالی است. این ریسک از این جهت ناشی می‌شود که دریافت‌کنندگان تسهیلات توانایی بازپرداخت اقساط بدهی خود را به بانک نداشته باشند.

اندازه‌گیری ریسک اعتباری

برای اندازه‌گیری ریسک اعتباری باید به این موارد توجه کرد:

- **احتمال نکول:** احتمالی است که طرف قرارداد در مدت تعیین‌شده در قرارداد، به تمام یا بخشی از تعهدات‌اش، خواسته یا ناخواسته عمل نکند.
- **میزان تعهد اعتباری:** عبارت است از اندازه تعهداتی که تحت تاثیر نکول قرار می‌گیرد.
- **نرخ بازیافت:** بخشی از تعهداتی است که در صورت نکول ایفا می‌شود.

تعریف ۱- ۲- ۱. می گوییم یک طرف قرارداد نکول کرده‌است اگر نتواند به تمام یا بخشی از تعهدات‌اش، عمل کند.

۱- ۲- ۲ سبد مالی

سبد مالی یا پُرتفُو[1] ترکیبی از مجموعه‌ای از دارایی‌های متفاوت است. هدف از تشکیل سبد، توزیع ریسک سرمایه‌گذاری بین چند دارایی است؛ بدین ترتیب، سود یک دارایی می‌تواند ضرر دارایی‌های دیگر را جبران کند. سبد به منظور کاهش ریسک و به صورتی انتخاب می‌شود تا در شرایط عادی احتمال کاهش بازده همه دارایی‌ها نزدیک به صفر باشد. سبد می‌تواند متعلق به شخصیت حقیقی و یا حقوقی باشد.

۱- ۳ مفاهیم و تعاریف ریاضی

۱- ۳- ۱ فضای احتمال

تعریف ۱- ۳- ۱. فرض کنیم Ω فضای نمونه و $\mathcal{F}$، σ- میدانی از زیر مجموعه‌های Ω و $P : \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ یک اندازه احتمال باشد. در این صورت سه تایی مرتب $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را فضای احتمال می‌نامیم.

۱- ۳ - ۲ امید شرطی و ویژگی‌های آن

[1] Portfolio

تعریف ۱- ۳- ۲. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی انتگرال پذیر بر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد و $\mathcal{H}$ زیر σ- میدان $\mathcal{F}$ باشد؛ یعنی $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$. امید X نسبت به P را با نماد $\int XdP$ یا $E(X)$ نشان می‌دهیم. امید شرطی X نسبت به پالایه[۱] $\mathcal{H}$ برابر با $E(X|\mathcal{H})$ است.

قضیه ۱- ۳- ۱ (ویژگی‌های امید شرطی). فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی و انتگرال‌پذیر بر فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F},P)$ باشند، در این صورت:

۱) اگر $X \geq 0$، آنگاه $E(X|\mathcal{H}) \geq 0$.

۲) $E(aX + bY|\mathcal{H}) = aE(X|\mathcal{H}) + bE(Y|\mathcal{H})$ (a و b اعداد حقیقی هستند).

۳) اگر X ، $\mathcal{H}$ -اندازه‌پذیر باشد آنگاه $E(X|\mathcal{H}) = X$ و $E(E(X|\mathcal{H})) = E(X)$.

۴) اگر $X = c$ باشد آنگاه $E(X) = c$ (c مقداری ثابت است).

۵) اگر $\mathcal{G}$ ، $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$، σ- میدان دیگری باشد آنگاه

$$E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}).$$

۶) اگرY، $\mathcal{H}$-اندازه‌پذیر و XY یک متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه $E(XY|\mathcal{H}) = YE(X|\mathcal{H})$.

۷) اگر φ تابعی محدب و انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه $\varphi\big(E(X|\mathcal{H})\big) \leq E(\varphi(X)|\mathcal{H})$ (نابرابری ینسن).

۱- ۳- ۳ زمان‌های توقف

فرض کنید که پالایه $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t, \dots \mathcal{F}_T)$ بر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ داده‌شده‌باشد. متغیر تصادفی

$$\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

را یک $\mathcal{F}_t$ - زمان توقف نسبت به پالایه $\mathcal{F}$ می‌نامیم اگر برای هر $t \geq 0$ ، $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

ویژگی‌های زمان‌های توقف

۱) فرض کنید τ یک متغیر تصادفی باشد، دراین صورت τ یک زمان توقف است اگر و تنها اگر به ازای هر $t \geq 0$ ، $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$.

۲) فرض کنید τ_1 و τ_2 زمان های توقف باشند، در این صورت

[۲] Filtration

$(i \quad .\tau_۱ \vee \tau_۲ = \max(\tau_۱, \tau_۲)$
$(ii \quad .\tau_۱ \wedge \tau_۲ = \min(\tau_۱, \tau_۲)$

برهان. مشاهده می‌شود که

$$\{\tau < t\} = \cup_{n=۱}^{\infty} \underbrace{\{\tau \leq t - ۱/n\}}_{\epsilon \mathcal{F}_{t-۱/n} \subseteq \mathcal{F}_t}$$

همچنین داریم

$$\{\tau_۱ \wedge \tau_۲ \leq t\} = \{\tau_۱ \leq t\} \cup \{\tau_۲ \leq t\} \epsilon \mathcal{F}_t$$

و

$$\{\tau_۱ \vee \tau_۲ \leq t\} = \left\{\tau_۱ \leq t\right\} \cap \left\{\tau_۲ \leq t\right\} \epsilon \mathcal{F}_t$$

■

مثال ۱-۳-۱. فرض کنید $B(t)$ حرکت براونی استاندارد باشد و τ اولین زمانی باشد که $B(t)$ برابر با ۱ می‌شود؛ یعنی

$$\tau = \inf\{t : \ B(t) = ۱\}$$

در این صورت τ یک زمان توقف است.

۱- ۳- ۴ فرایندهای قابل‌پیش‌بینی

تعریف ۱- ۳- ۳. فرایند تصادفی X را نسبت به پالایه $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_۱, \dots, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_T)$ سازوار گوییم اگر به ازای هر $t = ۰, ۱, ۲, \dots, T$ ، X_t یک متغیر تصادفی در $\mathcal{F}_t$ باشد؛ یعنی X_t ، $\mathcal{F}_t$- اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۱- ۳- ۴. فرض کنید که پالایه $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_۱, \dots, \mathcal{F}_t, \dots \mathcal{F}_T)$ داده‌شده‌باشد. فرایند X نسبت به این پالایه قابل‌پیش‌بینی است اگر به ازای هر $t \geq ۱$ ، X_t ، $\mathcal{F}_{t-۱}$- اندازه‌پذیر باشد. یعنی مقدار X_t با توجه به اطلاعات موجود تا لحظه $t - ۱$ تعیین می‌شود.

همچنین می‌توان گفت X قابل‌پیش‌بینی است اگر یکی از شرایط زیر را داشته‌باشد.

۱) فرایندی سازوار و از چپ پیوسته باشد.

۲) فرایندی از راست پیوسته باشد به طوری که، برای هر زمان توقف τ ، X_τ، $\mathcal{F}_\tau$- اندازه پذیر باشد که $\mathcal{F}_\tau$ σ- میدان تولید شده توسط مجموعه های $\{\tau < t\} \cap A \in \mathcal{F}_t$ است که در آن A می‌باشد.

مثال ۱-۳-۲. فرض کنید τ یک زمان توقف باشد، فرایند $X_t = I_{[0,\tau]}(t)$ را در نظر می‌گیریم. X_t یک فرایند سازوار است زیرا مقدار آن بر مجموعه $\{\tau \leq t\}$ برابر با ۱ است، همچنین بدیهی است که X_t از چپ پیوسته است بنابراین فرایندی قابل پیش‌بینی است.

۱- ۳- ۵ مارتینگل‌ها

در این زیربخش برخی از ویژگی‌های مارتینگل‌ها را که از اهمیت خاصی برخوردارند، می‌آوریم.

تعریف ۱- ۳- ۵. فرض کنید $\mathcal{F}_t$ یک دنباله نانزولی از میدان‌های سیگمایی و X_t یک متغیر تصادفی $\mathcal{F}_t$- اندازه پذیر باشد. $\{X_t, \mathcal{F}_t\}$ را یک مارتینگل گوئیم اگر

۱) X_t، انتگرال‌پذیر باشد؛ یعنی $E(|X_t|) < \infty$

۲) به ازای هر t و s ، $0 \leq s < t$ $a.s$ $E(X_t|\mathcal{F}_s)=X_s$.

مثال ۱-۳-۳. فرض کنید $\mathcal{F}_t$ یک دنباله نانزولی از میدان‌های سیگمایی و X یک متغیر تصادفی انتگرال-پذیر باشد. قرار می‌دهیم

$$X_t = E(X|\mathcal{F}_t)$$

در این صورت X_t یک مارتینگل است. زیرا اولاً

$$|X_t| = |E(X|\mathcal{F}_t)| \leq E(|X||\mathcal{F}_t)$$

$$E|X_t| \leq E\big(E(|X||\mathcal{F}_t)\big) = E(|X|) < \infty$$

و ثانیاً به ازای هر t و s ، $0 \leq s < t$

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) = E(E(X|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = E(X|\mathcal{F}_s) = X_s .$$

قضیه ۱- ۳- ۲. فرض کنید که X_t یک متغیر تصادفی قابل‌پیش‌بینی وکراندار و Y_t مارتینگل باشد در این صورت انتگرال تصادفی $\langle XY\rangle_t$ مارتینگل است.

برهان. باید ثابت کنیم که شرط‌های تعریف (۱- ۳- ۵) برقرارند. در اینجا درستی هر یک از این شرط‌ها را به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم.

$$E|\langle XY\rangle_t| = E\left|\int X_t dY_t\right| = E\left|\sum_{n=1}^{t} X_n\left(Y_n - Y_{n-1}\right)\right|$$
$$\leq \sum_{n=1}^{t} E\left|X_n\left(Y_n - Y_{n-1}\right)\right| \leq 2c\sum_{n=1}^{t} E\,|Y_n| < \infty$$

$$E\left(\langle XY\rangle_{t+1}\middle|\,\mathcal{F}_t\right) = E(\langle XY\rangle_t|\,\mathcal{F}_t) + E\left(X_{t+1}(Y_{t+1} - Y_t\middle|\,\mathcal{F}_t\right)$$
$$= \langle XY\rangle_t + XE\left(X_{t+1}(Y_{t+1} - Y_t)\middle|\,\mathcal{F}_t\right)_{t+1}$$
$$= \langle XY\rangle_t$$

■

مارتینگل‌های موضعی

تعریف ۱- ۳- ۶. فرایند سازوار$\mathrm{X(t)}$ یک مارتینگل موضعی است اگر دنباله‌ای از زمان‌های توقف τ_n وجود داشته‌باشد ، به طوری که

۱) $\tau_n \uparrow \infty$

۲) به ازای هر n ، فرایند متوقف‌شده $\mathrm{X(t \wedge \tau_n)}$ در لحظه t، مارتینگل باشد.

نیمه مارتینگل‌ها

تعریف ۱- ۳- ۷. X را یک نیمه‌مارتینگل می‌نامیم اگر آن را بتوان به صورت مجموع یک مارتینگل موضعی و یک فرایند سازوار متناهی تجزیه کرد.

مثال ۱-۳-۴. فرض کنید که $X_t = B^2(t)$ ، که در آن $B(t)$ یک حرکت براونی است. X_t یک نیمه مارتینگل با تجزیه $X_t = M_t + t$ است. جزء مارتینگلی آن $M_t = B^2(t) - t$ است و $A_t = t$ فرایند سازوار متناهی است.

۱- ۳- ۶ فرایندهای مارکف

فرایند R^d مقدار X را یک فرایند مارکف می‌گوییم اگر به ازای هر t، گذشته و آینده X ؛ یعنی $\mathcal{F}_t^X = \sigma\,(X_s : s \le t)$ و $\sigma(X_{t+u} : 0 \le u)$ نسبت به X شرطی مستقل باشند یعنی؛ به ازای هر t و هر متغیر تصادفی کراندار Y ، $Y \in \sigma(X_{t+u} : 0 \le u)$

$$E(Y|\mathcal{F}_t^X) = E(Y|X_t) \qquad (۱\text{-}۳\text{-}۱)$$

است.

تعریف ۱- ۳- ۸. احتمال انتقال فرایند مارکف X خانواده‌ای از اندازه‌های احتمال $(P_{s,t}, 0 \le s < t)$ است به طوری که در معادله چاپمن کولموگروف صدق کند.

$$P_{s,t}\,(x,A) = \int P_{s,u}\,(x,dy)P_{u,t}\,(y,A) = \mathbb{p}\,(X_t \epsilon A|X_s = x) \qquad (۲\text{-}۳\text{-}۱)$$

برای هر تابع کراندار f و فرایند مارکف X با احتمال انتقال $P_{s,t}$ داریم

$$E(f(X_t)|X_s) = P_{s,t}f(X_s) = \int f(y)P_{s,t}\,(X_s,dy) \qquad 0 \le s < t \qquad (۳\text{-}۳\text{-}۱)$$

اگر $P_{s,t}$ فقط وابسته به تفاضل $t - s$ باشد آنگاه فرایند مارکف را یک فرایند مارکف زمان همگن می‌نامیم. به طورکلی نتایج مربوط به فرایندهای مارکف زمان همگن را می‌توان با اضافه کردن بعد زمانی به فضا به فرایندهای مارکف زمان ناهگمن گسترش داد.

تعریف ۱- ۳- ۹. مولد بی‌نهایت یک فرایند مارکف زمان همگن را با عملگر $\mathcal{L}$ نشان می‌دهیم و به صورت

$$\mathcal{L}(f)(x) = \lim \frac{E_x(f(X_t)) - f(x)}{t} \qquad (۴\text{-}۳\text{-}۱)$$

تعریف می‌کنیم، که در آن E_x امید فرایند X_t است که مقدار آن در لحظه $t = ۰$ ، x است. دامنه عملگرمولد را با $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ نشان می‌دهیم که تشکیل شده از توابع کراندار f با نرم $\|f\| = sup|f|$.

لم ۱- ۳- ۱. فرض کنید که X یک فرایند مارکف زمان همگن باشد در این صورت

$$\frac{d}{dt}\,(P_t f) = P_t \mathcal{L} f = \mathcal{L} P_t f \quad , f \epsilon\, \mathcal{D}(\mathcal{L})\,. \qquad (۵\text{-}۳\text{-}۱)$$

برهان. رابطه فوق با توجه به این‌که $E_x(f(X_t)) = P_t f(x)$ و از تعریف مولد بی‌نهایت به‌دست می‌آید.

■